10 月 26 日の講義では，ベクトルの集合 X に対して，「X のベクトルの一次独立な最大個数」$r(X)$ について扱った．定理 4.3.A において，$X = \{\, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n \,\}$ に対して

- 実際に $r(X)$ を求め，
- さらに，一次独立な $r(X)$ 個のベクトルの組を構成する

ためのアルゴリズム（具体的な手続き）を与えた．

証明の中で見たように，定理 4.3.A のアルゴリズムでできるベクトルの組 S は，実際には，X の極大一次独立系であった．したがってまた，次の性質も満たすのだった：

(2′) 任意のベクトル $\boldsymbol{v} \in X$ は S のベクトルの一次結合として表される．

例題 4.3.1 と例題 4.3.2 について補足したい．講義では次の形で扱った．

例題 4.3.1′ $V = \mathbb{R}^3$ において次の 4 個のベクトルを考える：

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$r = r(\{\, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4 \,\})$ を求めよ．また r 個の一次独立なベクトルを 1 組求めよ．

例題 4.3.2′ $V = \mathbb{R}[x]_2$ において次の 4 個のベクトルを考える：

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 1 + x + 2x^2, & f_2(x) &= 2 + 2x + 4x^2, \\ f_3(x) &= 1 + 3x - 3x^2, & f_4(x) &= -2 - 4x + x^2. \end{aligned}$$

$r = r(\{\, f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x) \,\})$ を求めよ．また r 個の一次独立なベクトルを 1 組求めよ．

結論としては，いずれも $r = 2$ で，一次独立なベクトルの組として例題 4.3.1′ では $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_3$ を，例題 4.3.2′ では $f_1(x)$, $f_3(x)$ を選ぶことができるのだった（他にも選ぶことのできる組は存在する．答えはただ一つではない）．

ところで，例題 4.3.1′ や例題 4.3.2′ の後に続けて，「他のベクトルをそれらの一次結合で表せ」と問われたらどうするか．教科書には行列の簡約化を用いた方法が紹介されているが，もっと原始的な方法も紹介しておきたい．方法はいろいろあって，どんなやり方でやってもいいのである．

例題 4.3.1′ において，$\boldsymbol{a}_4$ を $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_3$ の一次結合で表すことを考えてみよう．求めたいのは

$$\boldsymbol{a}_4 = c_1 \boldsymbol{a}_1 + c_3 \boldsymbol{a}_3 \tag{1}$$

を満たす $c_1, c_3 \in \mathbb{R}$ である．**これは未知数 c_1, c_3 に関する連立 1 次方程式である．**そのことは，式 (1) を

$$\boldsymbol{a}_4 = A' \begin{bmatrix} c_1 \\ c_3 \end{bmatrix}, \qquad \text{ただし} \quad A' = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_3 \end{bmatrix} \tag{2}$$

と書き直すとさらに浮き彫りになるだろう（A' は列ベクトルを並べた 3×2 行列）．これを解けばいいのだから，たとえば例題 2.3.2 の方法を使って解いてやればいい．

今度は，例題 4.3.2′ において，$f_4(x)$ を $f_1(x)$, $f_3(x)$ の一次結合で表すことを考えてみる．求めたいのは

$$f_4(x) = c_1 f_1(x) + c_3 f_3(x) \tag{3}$$

を満たす $c_1, c_3 \in \mathbb{R}$ である．**これもまた，以下に見るように，実質的に未知数 c_1, c_3 に関する連立 1 次方程式である．**式 (3) は，10 月 19 日に導入した一次結合の記法によって

$$f_4(x) = (f_1(x), f_3(x)) \begin{bmatrix} c_1 \\ c_3 \end{bmatrix} \tag{4}$$

とも表すことができる．ここで $V=\mathbb{R}[x]_2$ の 3 つのベクトル 1, x, x^2 を用いて $f_4(x)$ と $(f_1(x), f_3(x))$ を表すと

$$f_4(x)=(1,x,x^2)\begin{bmatrix}-2\\-4\\1\end{bmatrix}, \qquad (f_1(x),f_3(x))=(1,x,x^2)\begin{bmatrix}1&1\\1&3\\2&-3\end{bmatrix}$$

だから，式 (4) は

$$(1,x,x^2)\begin{bmatrix}-2\\-4\\1\end{bmatrix}=(1,x,x^2)\begin{bmatrix}1&1\\1&3\\2&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_3\end{bmatrix} \tag{5}$$

となる（右辺には“行列”が 3 つ並んでいるが，前 2 つを先に掛けても後 2 つを先に掛けても結果は同じ）．3 つのベクトル 1, x, x^2 が一次独立であることから，式 (5) は

$$\begin{bmatrix}-2\\-4\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\1&3\\2&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_3\end{bmatrix}$$

と同値．ところがこれは式 (2) と同じである（ほんとうに寸分違わず同じ式である）．したがって，ここから先は例題 $4.3.1'$ の場合と同じ．

一般に，問題の解決方法というものはいろいろあります．教科書やその他のテキストに書かれた手法はもちろん参考にするのですが，願わくばそれらにとらわれず，さまざまな手法を考えて，それらの違いとか，各々の手法の持つ利点を味わってほしいです．ちょっと高度な要求ではありますが．（問：いま取り上げた問題について，教科書に載っている手法にはどんな利点があるか？）