2016年度 数学の楽しみ2D（担当：松本佳彦）期末試験

2017年2月9日（木）3限　試験時間90分

配布物：問題，解答用紙1枚，計算用紙1枚

以下の4問から2問を選択して解答せよ．（どの問題を選択しても，評価の上限は同じである．）

なお，特に断らない限り，自然数全体の集合 $\mathbb{N}$，整数全体の集合 $\mathbb{Z}$，有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$，実数全体の集合 $\mathbb{R}$，複素数全体の集合 $\mathbb{C}$ およびその諸性質は既知としてよい．

1. (1) 選択公理とは何か説明せよ．

   (2) 次の命題が選択公理と同値であることを証明せよ．ただし id_B は集合 B 上の恒等写像を表す．
   「どんな集合 A, B および全射 $f\colon A \to B$ に対しても，$f \circ g = \mathrm{id}_B$ を満たす写像 $g\colon B \to A$ が存在する．」

2. (1) 非可算集合とは何か説明せよ．

   (2) 非可算集合の例を一つ挙げ，それが非可算集合であることを証明せよ．

3. (1) 同値関係とは何か，また商集合とは何か説明せよ．

   (2) 本問では，整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ およびその上の演算（加法，乗法）のみが既知であるとする．有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ の定義と，$\mathbb{Q}$ における演算（加法，乗法）の定義を説明せよ．演算の well-definedness も証明すること．

4. 複素数体 $\mathbb{C}$ の部分集合 $\mathbb{Z}[i]$ を次のように定義する（ここで i は虚数単位である）：

$$\mathbb{Z}[i] = \{\, a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z} \,\}.$$

   $\mathbb{Z}[i]$ は $\mathbb{C}$ における通常の加法と乗法によって単位元を持つ可換環となる．この $\mathbb{Z}[i]$ を Gauss 整数環といい，$\mathbb{Z}[i]$ の各々の元を Gauss 整数と呼ぶ．これに関して次の問いに答えよ．

   (1) $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ が $\mathbb{Z}[i]$ の単元であるとは，可逆であること，すなわち $\alpha\beta = 1$ を満たす $\beta \in \mathbb{Z}[i]$ が存在することをいう．$\mathbb{Z}[i]$ の単元をすべて挙げよ．それら以外に単元が存在しない理由も述べること．

   (2) $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ が Gauss 素数であるとは，α が次の条件 (i), (ii) を満たすことをいう．

   (i) α は $\mathbb{Z}[i]$ の単元ではない．

   (ii) $\alpha = \beta_1\beta_2$ を満たす任意の $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{Z}[i]$ に対し，β_1, β_2 のうち一方は $\mathbb{Z}[i]$ の単元である．

   3, 7 がいずれも Gauss 素数であることを証明せよ．また，2017 は Gauss 素数でないことを証明せよ．

答案の返却について　数学資料室（全学教育推進機構実験棟 II 364 号室）にて，2月15日（水）から2月24日（金）まで．学生証持参のこと．開室時間は次のとおり：月 10:00–15:45，火 8:30–17:15，水 11:30–18:15，木 8:30–17:15，金 14:15–17:15．ただし担当者が席を外していることもあります．