日時

2017 年 2 月 9 日（木）13:00–14:30．試験時間は 90 分です．12:55 に問題等の配布を始めます．

注意

- 試験開始から 20 分以内に限り，遅刻者の受験を認めます．
- 試験開始から 25 分が経過した後は途中退室を許可します．一度退室したら再入室はできません．
- 本やノート等の参照は許可しません．

そのほか，「履修の手引」掲載の注意事項がすべて適用されます．

出題について

以下の 4 問から 2 問を選択して解答してもらいます．（どの問題を選択しても，評価の上限は同じです．）準備を整えておいてください．なお，準備の際にはテキストを参照したり他の人と相談したりしてかまいませんが，最終的には自分の文章で解答できるようにしてくることを望みます．

特に断り書きがない限り，自然数全体の集合 $\mathbb{N}$，整数全体の集合 $\mathbb{Z}$，有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$，実数全体の集合 $\mathbb{R}$，複素数全体の集合 $\mathbb{C}$ およびその諸性質は既知としてけっこうです．

1. (1) 選択公理とは何か説明せよ．
   (2) 次の命題が選択公理と同値であることを証明せよ．ただし id_B は集合 B 上の恒等写像を表す．
   「どんな集合 A, B および全射 $f\colon A \to B$ に対しても，$f \circ g = \mathrm{id}_B$ を満たす写像 $g\colon B \to A$ が存在する．」

2. (1) 非可算集合とは何か説明せよ．
   (2) 非可算集合の例を一つ挙げ，それが非可算集合であることを証明せよ．

3. (1) 同値関係とは何か，また商集合とは何か説明せよ．
   (2) 本問では，整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ およびその上の演算（加法，乗法）のみが既知であるとする．有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ の定義と，$\mathbb{Q}$ における演算（加法，乗法）の定義を説明せよ．演算の well-definedness も証明すること．

4. 複素数体 $\mathbb{C}$ の部分集合 $\mathbb{Z}[i]$ を次のように定義する（ここで i は虚数単位である）：

$$\mathbb{Z}[i] = \{\, a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z} \,\}.$$

   $\mathbb{Z}[i]$ は $\mathbb{C}$ における通常の加法と乗法によって（単位元を持つ）可換環となる．この $\mathbb{Z}[i]$ を Gauss 整数環といい，$\mathbb{Z}[i]$ の各々の元を Gauss 整数と呼ぶ．これに関して次の問いに答えよ．
   (1) $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ が $\mathbb{Z}[i]$ の単元であるとは，可逆であること，すなわち $\alpha\beta = 1$ を満たす $\beta \in \mathbb{Z}[i]$ が存在することをいう．$\mathbb{Z}[i]$ の単元をすべて挙げよ．それら以外に単元が存在しない理由も述べること．
   (2) $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ が Gauss 素数であるとは，α が次の条件 (i), (ii) を満たすことをいう．
   (i) α は $\mathbb{Z}[i]$ の単元ではない．
   (ii) $\alpha = \beta_1\beta_2$ を満たす任意の β_1, $\beta_2 \in \mathbb{Z}[i]$ に対し，β_1, β_2 のうち一方は $\mathbb{Z}[i]$ の単元である．
   3, 7 がいずれも Gauss 素数であることを証明せよ．また，2017 は Gauss 素数でないことを証明せよ．