集合と写像

現代の数学はすべて，もとをたどれば，集合のことばに基づいて表現される．ここでは，集合と写像に関する基本事項を学ぶ．一部は復習である．

われわれは自然数の概念は既知とする．また，例を挙げるときは，他の数概念も自由に用いることにする．

1.1 集合

●集合に関する基本概念

集合 (set) とは，「ものの集まり」のことである．ただし，どんな「もの」を考えても，それがその「集まり」の中にあるかないかがはっきり定まっていなければならない．（はっきり定まってさえいれば，必ずしも実際に判定できなくてもよい．たとえば，ある数が「有理数であるかそうでないか」には明確な定義があるので，有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ はいま言った意味で「集合」である．だが，与えられた数が有理数であるかどうかを実際に判定するのは，非常に難しい場合もある．）

注意 この説明は曖昧だと感じる人もいるだろう．実際，本当は，「何を集合と呼ぶか」ということを公理的に厳密に規定する（公理的集合論）．このプリントでそれを正確に述べることはしないが，本節の最後で少しだけその話題に踏み込む．

集合の中にある各々の「もの」のことを，その集合の**元**（げん） (element)，または**要素**と呼ぶ．「もの」a が集合 A の元であることを記号で

$$a \in A$$

と表す．またこのとき，a は A に**属する** (a belongs to A) という．($a \in A$ でないことは $a \notin A$ と表す[*1]．)

われわれは，元をまったく持たない「集まり」も集合とみなす．そのような集合を**空集合** (empty set) といい，記号 $\emptyset$ で表す（ゼロに斜線．他には，ギリシャ文字のファイ ϕ とか，ただの○に斜線を引いた記号を使う人もいる）．

A を集合とするとき，A の元のうち一部が集まってできている集合のことを，一般に A の**部分集合** (subset) と呼ぶ．集合 B が A の部分集合であることを

$$B \subset A \quad \text{あるいは} \quad A \supset B$$

と表す．ここで「一部が集まってできている」と書いたけれども，これには「全部集まっている」場合や「一つも集まっていない」場合も含まれる．つまり，A 自身や空集合 $\emptyset$ も集合 A の部分集合と考える．すなわち

$$A \subset A, \quad \text{また} \quad \emptyset \subset A.$$

「A は A の部分集合である」というのは，「部分」という語の語感からすると不自然に感じるかもしれないが，これが数学における通常の言葉遣いである．A の部分集合であって A ではないもの（$B \subset A$ かつ $B \neq A$ であるような B）は A の**真部分集合** (proper subset) と呼ばれる．

「集合 B が集合 A の部分集合である」ということを記号を用いて表すと

$$x \in B \ \Rightarrow \ x \in A \tag{1.1}$$

となる．

注意 (1.1) は，より正確に言えば，次の命題が真であるという主張を表している：

$$\forall x \, (x \in B \to x \in A). \tag{1.2}$$

[*1] 以下，この種の注意は省略する．

誤解を生じないためには，(1.2) のように書いたほうがいい場合もある．けれども，以下では，曖昧にならないよう必要に応じて言葉を補いながら，(1.1) のような書き方をすることにする．

次に，既知の集合から新しい集合を得るためのいろいろな方法があったことを思い出そう．

集合 A と集合 B の**和集合** (union)，もしくは**合併**とは，A に属するか，または B に属するような元全体のなす集合のことである．これを $A \cup B$ で表す．

A と B の**共通部分** (intersection)，もしくは**積集合**，**交わり**とは，A に属し，かつ B にも属するような元全体のなす集合のことである．これを $A \cap B$ で表す．

A から B を除いた**差集合** (difference) とは，A に属するが，B には属さないような元全体のなす集合のことである．これを $A \setminus B$ で表す．

A と B の**直積** (direct product) とは，元の対(つい) (a, b) $(a \in A,\, b \in B)$ 全体のなす集合のことである（より正確には「対」ではなく「順序対」）．これを $A \times B$ で表す．

以上を記号で書けば次のようになる．

$$A \cup B = \{\, x \mid x \in A \text{ または } x \in B \,\}, \tag{1.3a}$$
$$A \cap B = \{\, x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B \,\}, \tag{1.3b}$$
$$A \setminus B = \{\, x \mid x \in A \text{ かつ } x \notin B \,\}, \tag{1.3c}$$
$$A \times B = \{\, (a, b) \mid a \in A,\, b \in B \,\}. \tag{1.3d}$$

実際に集合が用いられる場面では，「全体集合」とか「普遍集合」と呼ばれる集合 X が（しばしば暗黙のうちに）指定されていて，その部分集合だけが考察の対象となる状況がある．そういう状況では，全体集合 X の部分集合 A に対し，差集合 $X \setminus A$ のことを A の**補集合** (complement) といい，A^c で表す．

●記法

集合を書き表す際の記法には，外延的記法と内包的記法の 2 種類がある．たとえば，20 以下の素数全体の集合を書き表したいとき，これを $\{\, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 \,\}$ と元をすべて並べて書くのは外延的記法である．内包的記法では $\{\, x \mid (x \text{ の満たすべき条件}) \,\}$ という書き方をする（x は別の文字でもかまわない）．たとえば今の例では

$$\{\, x \mid x \text{ は } 20 \text{ 以下の素数} \,\} \tag{1.4}$$

である．この記法は (1.3) でもすでに用いた．なお，縦棒 | の代わりにセミコロン ; を使う人も多い．

内包的記法を使う際に，全体集合 X が指定されていて，X の元のみからなる集合だけを考えるときは，$\{\, x \in X \mid (\text{さらに } x \text{ の満たすべき条件}) \,\}$ という書き方も用いる．たとえば

$$\{\, x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 5 \,\} = \{\, x \mid x \in \mathbb{N} \text{ かつ } 1 \leq x \leq 5 \,\} = \{\, 1, 2, 3, 4, 5 \,\}.$$

$\{\, x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 5 \,\}$ とすると，$\{\, x \mid x \in \mathbb{N} \text{ かつ } 1 \leq x \leq 5 \,\}$ と書いたときと比べて，自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ が全体集合として意識されているというニュアンスが加わる．

注意 以上が基本的なことだが，さらに，さまざまな略記が行われる．たとえば，ある集合の内包的記法として $\{\, x \mid x \text{ は○○} \,\}$ と書きたいとき，これを単に $\{\, \text{○○} \,\}$ と書いてしまったりする．つまり，たとえば (1.4) を $\{\, 20 \text{ 以下の素数} \,\}$ と書くことがある．

なお，ついでにコメントしておくと，これを $\{\, 20 \text{ 以下の素数の集合} \,\}$ と書くのは誤りである．なぜなら，そう書くと，$\{\, x \mid x \text{ は } 20 \text{ 以下の素数の集合} \,\}$，すなわちすべての「20 以下の素数の集合」を元とするような集合のことになってしまうからだ．

●集合の相等

2 つの集合 A, B に対して，A と B が**等しい**ことを意味する $A = B$ という記号をすでに何度か使っているが，われわれはこれを次のように定義する：

$$\begin{aligned} A = B &\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (x \in A \Rightarrow x \in B) \text{ かつ } (x \in B \Rightarrow x \in A) \\ &\Leftrightarrow A \subset B \text{ かつ } B \subset A. \end{aligned}$$

つまり，集合の概念において意味を持つのは元が「属する」という関係だけだということだ．元の並ぶ順序であるとか，元の重複であるとか，そういったことは集合の概念ではとらえられない（あるいは，そういうものは積極的に捨象してしまうのである）．

注意 ついでに（前期の授業でも言ったが）強調しておくと，与えられた 2 つの集合 A, B が等しいことを実際に証明するときも，$A \subset B$ と $B \subset A$ の両方を示すのが基本である．もっと楽なやり方がある場合もあるが，基本を忘れてはいけない．

●冪（べき）集合

集合 A に対して，A のすべての部分集合からなる集合のことを，A の**冪集合** (power set) といい，$\mathscr{P}(A)$ や 2^A という記号で表す．

たとえば，$A = \{1, 2, 3, 4\}$ に対しては次のようになる：

$$
\begin{aligned}
\mathscr{P}(A) = \{&\emptyset, \\
&\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \\
&\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \\
&\{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \\
&\{1,2,3,4\}\}.
\end{aligned}
$$

この場合，冪集合 $\mathscr{P}(A)$ は 16 個の元からなる．一般に，有限集合 A に対し，その元の個数を n とすれば，冪集合 $\mathscr{P}(A)$ は 2^n 個の元からなる（なぜか？）．これが 2^A という記号の由来である．

無限集合に対しては，その冪集合はとてつもなく大きなものになる．たとえば自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ の冪集合 $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ を想像してみてほしい．$\mathscr{P}(\mathbb{N})$ については 2 章で再び触れることになる．

● Russell のパラドックス

冪集合を考えるのは，「そういう概念を言葉として用意しておくと便利」という理由もあるが，もっと理論的な理由もある．本節の最後に少しだけ触れておく．

最初に書いたように，集合をナイーブに「ものの集まり」と理解することには問題がある．そのことをまず説明する．

たとえば，「すべての集合からなる集まり」A を考えてみよう．これは集合と見なしてもよいだろうか．一見，そう考えることには何の障害もないように思える．

しかし次のように考えを進めると問題が生じる．A の“部分集合”として「集合 x であって，x 自身がそれに属していないもの全体の集まり」というものを考え，それを B とする．A が集合であるならば，その元のうち一定の条件を満たすものを集めた B も集合とせざるを得ない（これは集合論における基本的な要請と考えられている）．では，B は B 自身に属するのだろうか？ $B \in B$ とすると定義によって $B \notin B$ だし，$B \notin B$ とすると定義によって $B \in B$ となってしまうので，どちらにしても矛盾である――これを **Russell のパラドックス**という．

このパラドックスに対する通常の解決策は，「A のような『大きすぎる』集まりは，集合論の枠組みから排除してしまう」というものである．

では，上記の A は集合と呼ばないとして，どんな集まりならば集合と呼んでよいのか．それを公理として記述するのが公理的集合論である．もっとも標準的に用いられている「ZFC 公理系」には，たとえば「すでに集合とわかっているものに対し，その冪集合も集合である」という公理が入っている．冪集合も一般にはずいぶん大きな集合になり得るけれど，それくらいなら許すことにするわけだ．

1.2 写像

●写像に関する基本概念

A, B を集合とする．A の各々の元に対し，B のある元を対応づけるような規則のことを，A から B への**写像** (mapping) という．また，A, B をその写像の**定義域** (domain)，**終域** (codomain, target) と呼ぶ．f が

A を定義域，B を終域とする写像であるとき，それを明示するために，f のことを $f\colon A \to B$ と書くことがある．

写像 f が $a \in A$ に対し $b \in B$ を対応づけるとき，f は a を b に**移す**（**写す**）という．このとき，b を $f(a)$ と書いて，a における f の**値** (value) とか，f による a の**像** (image) と呼ぶ．また，f が a を $f(a)$ に移すことを，$f\colon a \mapsto f(a)$ と表すことがある．

2 つの写像 f, g が**等しい**というのは，f と g の定義域どうし，終域どうしがいずれも同じ集合であって，しかも定義域の任意の元 a に対し $f(a) = g(a)$ であることをいう．

注意 写像の概念は，関数の概念の拡張である．写像 $f\colon A \to B$ の終域 B が実数全体の集合 $\mathbb{R}$ または複素数全体の集合 $\mathbb{C}$ であるときに，f のことを集合 A 上の（実数値または複素数値）関数と呼ぶ．（具体的な式で書き表されるものだけが「関数」であるわけではない！）

写像 $f\colon A \to B$ に対し，ある元 $a \in A$ の f による像になっているような B の元全体の集合を f の**値域** (range) といい，このプリントでは $R(f)$ と表す．これは B の部分集合である．記号で書けば

$$R(f) = \{\, b \in B \mid f(a) = b \text{ となるような } a \in A \text{ が存在する} \,\}$$

である．この右辺はさらに $\{\, f(a) \mid a \in A \,\}$ と略記される．

例 1.1. 特定の関係を持つ集合の間に標準的に存在するような写像の例を挙げる．

(1) 集合 A に対し，定義域と終域がいずれも A であるような写像 $f\colon A \to A$ であって，任意の $a \in A$ を a 自身に移すような写像を考えることができる．これを A 上の**恒等写像** (identity mapping) といい，このプリントでは id_A と表す．

(2) B を集合とし，A をその部分集合とする．そのとき，写像 $f\colon A \to B$ を，$a \in A$ に対し（a は B の元でもあるから）$f(a) = a$ と定めることにより定義できる．この写像 f を A から B への**包含写像** (inclusion) という．包含写像はしばしば文字 i で表され，また，$i\colon A \hookrightarrow B$ という記号で書かれたりする．

(3) 2 つの集合 A, B に対し，写像 $\pi_1\colon A \times B \to A$ および $\pi_2\colon A \times B \to B$ を

$$\pi_1(a, b) = a, \qquad \pi_2(a, b) = b$$

によって定める．これらをそれぞれ第 1 成分および第 2 成分への**射影** (projection) という．

f を A から B への写像，U を A の部分集合とするとき，写像 $f'\colon U \to B$ を

$$f'(a) = f(a), \qquad a \in U$$

によって定めることができるが，この f' を f の U への**制限** (restriction) といい，記号 $f|_U$ で表す．f' が f の制限であるとき，逆に f は f' の A への**拡張**あるいは**延長** (extension) であるという．

2 つの写像 $f\colon A \to B$ および $g\colon B \to C$ が与えられたとする（f の終域と g の定義域が一致していることに注意せよ）．各 $a \in A$ に対し，$f(a) \in B$ だから $g(f(a)) \in C$ を考えることができるが，

$$h(a) = g(f(a)), \qquad a \in A$$

で定義される写像 $h\colon A \to C$ のことを f と g の**合成写像** (composition) といい，$g \circ f$ で表す．

●写像のグラフ

写像 $f\colon A \to B$ の**グラフ** (graph) とは，次で与えられる直積集合 $A \times B$ の部分集合である：

$$\{\, (a, b) \in A \times B \mid b = f(a) \,\}.$$

これを $G(f)$ と表すことにする．

すべてを集合のことばで表すという考え方からすれば，このグラフこそが写像の実体であると考えるのが適切である（関連して演習問題 1.7 を参照のこと）．

●像，逆像

$f\colon A\to B$ を写像とし，U を A の部分集合とするとき，U の元の f による像全体からなる B の部分集合を，f による U の**像** (image) といい，$f(U)$ と表す．すなわち

$$\begin{aligned} f(U) &= \{\, b\in B \mid f(a)=b \text{ となるような } a\in U \text{ が存在する} \,\} \\ &= \{\, f(a) \mid a\in U \,\}. \end{aligned}$$

空集合 $\emptyset\subset A$ の像はいつでも空集合である．また，定義域 A の像 $f(A)$ は値域 $R(f)$ に等しい．

注意 だから，$R(f)$ という記号は，実際には用意する必要はなかった．以下，主に $f(A)$ という記号を用いる．

また，写像 $f\colon A\to B$ があるとき，B の部分集合 V に対して，$f(a)$ が V に属するような元 $a\in A$ 全体からなる A の部分集合のことを，V の f による**逆像** (preimage) といい，$f^{-1}(V)$ で表す（後に出てくる逆写像と同じ記号を使ってしまうが，概念としてはきちんと区別すること）．つまり

$$f^{-1}(V)=\{\, a\in A \mid f(a)\in V \,\}.$$

特に，B の元 b に対して，1 元集合 $\{\, b \,\}$ の f による逆像 $f^{-1}(\{\, b \,\})$ のことを，元 b の**逆像**ともいい，記号 $f^{-1}(b)$ で表す．この $f^{-1}(b)$ のことを，幾何学的イメージに基づき $b\in B$ に対する f の**ファイバー** (fiber*2) と呼ぶこともある．

像と逆像については，一般に次のような性質がある．

命題 1.2. $f\colon A\to B$ を写像，U_1, U_2, U を A の部分集合，V_1, V_2, V を B の部分集合とする．そのとき

$$f(U_1\cup U_2)=f(U_1)\cup f(U_2), \qquad f^{-1}(V_1\cup V_2)=f^{-1}(V_1)\cup f^{-1}(V_2), \tag{1.5a}$$
$$f(U_1\cap U_2)\subset f(U_1)\cap f(U_2), \qquad f^{-1}(V_1\cap V_2)=f^{-1}(V_1)\cap f^{-1}(V_2), \tag{1.5b}$$
$$f(U_1\setminus U_2)\supset f(U_1)\setminus f(U_2), \qquad f^{-1}(V_1\setminus V_2)=f^{-1}(V_1)\setminus f^{-1}(V_2), \tag{1.5c}$$
$$f^{-1}(f(U))\supset U, \qquad f(f^{-1}(V))\subset V. \tag{1.5d}$$

●全射，単射，全単射

写像 $f\colon A\to B$ が**全射**である (surjective)，または**上への写像**であるというのは，値域 $f(A)$ が B に等しいことをいう．言い換えれば，すべての $b\in B$ に対して，$f(a)=b$ となるような $a\in A$ が存在するということである．

写像 $f\colon A\to B$ が**単射**である (injective)，または（中への）**一対一写像**である（古い言い方だが，本を読むと出てくることがある）というのは，値域に属する任意の元 $b\in f(A)$ に対し，b の逆像 $f^{-1}(b)$ が 1 つの元のみからなる集合であることをいう．言い換えれば，$a, a'\in A$ について $a\neq a'$ ならば $f(a)\neq f(a')$ だということである（演習問題 1.2）．

f が全射かつ単射であるとき，f は**全単射**である (bijective)，**上への一対一写像**である，または**一対一対応**であるという．このとき，各 $b\in B$ に対してただ一つだけ存在する $f(a)=b$ となるような $a\in A$ を対応させる写像 $B\to A$ のことを，f の**逆写像** (inverse mapping) といい，f^{-1} で表す．これはまた，

$$g\circ f=\mathrm{id}_A, \qquad f\circ g=\mathrm{id}_B$$

を満たす唯一の写像 $g\colon B\to A$ である．

●有限集合，無限集合

全単射の概念の応用として，「有限集合」の概念を正確に定義しておく．

われわれは自然数の概念は既知としていたことを思い出そう．0 でない自然数 $n\in\mathbb{N}$ に対し，$\{\, 1,2,\dots,n \,\}$ というのは「有限集合」と呼ばれるべき典型的な集合であるが，これをモデルとして次のように定義する

*2 イギリス式綴りでは fibre．以降ではいちいち断らず，アメリカ式の綴りのみを示す．

——集合 A が**有限集合** (finite set) であるとは，$A = \emptyset$ であるか，またはある自然数 $n \in \mathbb{N}$ について，A と $\{1, 2, \ldots, n\}$ の間に全単射が存在することをいう．有限集合でない集合は**無限集合** (infinite set) と呼ばれる．

有限集合 A に対して，その元の個数を $|A|$ とか $\#A$ と書く．すなわち，$|\emptyset| = 0$ であり，また A と $\{1, 2, \ldots, n\}$ の間に全単射があるときは $|A| = n$ である．

無限集合は次の性質によって特徴づけることができる．

定理 1.3. 無限集合は，そのある真部分集合との間に全単射を持つ．

証明は次節で述べる選択公理を用いて行われる（演習問題 1.12）．

1.3 集合族，直積，選択公理

●集合族

Λ を空でない集合とし，各 $\lambda \in \Lambda$ に対し，集合 A_λ が定められている状況を考える．そのとき，A_λ たち全体を指して**集合族** (family of sets) といい，$(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ と表す．Λ は集合族 $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ の**添字集合** (index set) と呼ばれる．

特に，$\Lambda = \mathbb{N}$ を添字集合とする集合族 $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ とは，**集合列** (sequence of sets) $A_1, A_2, A_3, \ldots$ に他ならない（ここでは $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ としている）．集合族とは，集合列の概念の一般化である．

集合族 $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ について，各々の A_λ がある集合 X の部分集合になっているとき，これを特に X の**部分集合族**という．X の部分集合族は，添字集合 Λ から X の冪集合 $\mathscr{P}(X)$ への写像とも見なすことができる．

例 1.4. 集合 X, Y（ただし $X \neq \emptyset$）に対し，直積集合 $X \times Y$ の部分集合 Z が与えられているとする．そのとき，各 $x \in X$ に対し

$$A_x = \{\, y \in Y \mid (x, y) \in Z \,\}$$

と定めれば，$(A_x)_{x \in X}$ は X を添字集合とする Y の部分集合族である．

集合族 $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ に対し，いずれかの集合 A_λ に属しているような元全体の集合を $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ の**和集合**といい，すべての集合 A_λ に属しているような元全体の集合を $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ の**共通部分**という．これらはそれぞれ

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda, \qquad \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$$

と表される．すなわち

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{\, x \mid x \in A_\lambda \text{ を満たす } \lambda \in \Lambda \text{ が存在する} \,\},$$
$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{\, x \mid \text{すべての } \lambda \in \Lambda \text{ に対して } x \in A_\lambda \,\}.$$

特に $\Lambda = \{1, 2, \ldots, n\}$ のとき，これらは $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i$, $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ とも書かれる．また $\Lambda = \mathbb{N}$ のときは $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ とも書かれる．

命題 1.5. 集合族 $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ と集合 B に対し

$$\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) \cap B = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (A_\lambda \cap B), \qquad \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) \cup B = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (A_\lambda \cup B). \tag{1.6}$$

集合族 $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ が集合 X の部分集合族である場合には

$$\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right)^c = \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c\right), \qquad \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right)^c = \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c\right). \tag{1.7}$$

命題 1.6. $f\colon A \to B$ を写像とし，$(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, $(V_\mu)_{\mu\in M}$ をそれぞれ A, B の部分集合族とすれば

$$f\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f(U_\lambda), \qquad f^{-1}\left(\bigcup_{\mu\in M} V_\mu\right) = \bigcup_{\mu\in M} f^{-1}(V_\mu) \tag{1.8a}$$

$$f\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda\right) \subset \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f(U_\lambda), \qquad f^{-1}\left(\bigcap_{\mu\in M} V_\mu\right) = \bigcap_{\mu\in M} f^{-1}(V_\mu). \tag{1.8b}$$

●直積

集合族 $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ に対し，各 $\lambda\in\Lambda$ に対して $a_\lambda \in A_\lambda$ であるような元の族 $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ 全体からなる集合を，集合族 $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の**直積**といい，次のように表す：

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \{\, (a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \mid \text{各 } \lambda\in\Lambda \text{ に対し } a_\lambda \in A_\lambda \,\}. \tag{1.9}$$

ここに現れた元の族 $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ というのは，集合族 $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の和集合を A とおくとき，しばしば Λ から A への関数 $a\colon \lambda \mapsto a_\lambda$ と見なされる（$a(\lambda)$ を a_λ と書いていると考えるのである）．

例 1.7. 実数列 $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ は，すべての $i\in\mathbb{N}$ に対し $A_i = \mathbb{R}$ であるような集合列 $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ の直積 $\displaystyle\prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{R}$ の元であり，また写像 $\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ とも見なされる．

Λ が有限集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ である場合には，$\Lambda = \{1, 2, \ldots, n\}$ を添字集合とする集合族 $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ というのは単なる集合の組 $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ である．この場合，$(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の直積とは，$a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, …, $a_n \in A_n$ であるような元の組 $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ 全体の集合にすぎない．これを $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} A_i$ とか $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ と書く：

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{\, (a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1,\ a_2 \in A_2,\ \ldots,\ a_n \in A_n \,\}.$$

特に $n = 2$ であれば，これは 1.1 節で定義した直積 $A_1 \times A_2$ そのものである．

$\Lambda = \mathbb{N}$ の場合には，$(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の直積は $\displaystyle\prod_{i=1}^{\infty} A_i$ とも書かれる．

●選択公理

集合族 $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ について，$A_\lambda = \emptyset$ となる $\lambda\in\Lambda$ が一つでも存在すれば，直積 (1.9) は空集合になる．というのは，Λ のある元 λ_0 に対して $A_{\lambda_0} = \emptyset$ とすれば，Λ で定義されたどんな写像 a についても，$a(\lambda_0)$ が A_{λ_0} に属することはないからである．

では逆に，次の命題は真であろうか：

$$\text{任意の集合族 } (A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \text{ について，すべての } \lambda\in\Lambda \text{ に対し } A_\lambda \neq \emptyset \text{ ならば，} \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \neq \emptyset \text{ である．} \tag{1.10}$$

「直積が空集合でない」というのは，定義によって，「$a_\lambda \in A_\lambda$ であるような元の族 $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が存在する」ということである．Λ が有限集合の場合には，これは真であることが数学的帰納法によって証明できる．真偽が微妙になるのは，Λ が無限集合の場合である．

実はこの命題 (1.10) は，今まで述べたことだけからは，真であるとも偽であるとも結論できないことが知られている．しかし，実用的には (1.10) が真であるとすると便利なので，これは通常（集合論そのものを研究するのでないかぎりは）正しいものと認めて議論を行う．つまり，(1.10) を公理として付け加える——これは**選択公理** (the axiom of choice) と呼ばれる．

選択公理はどんどん使ってよいが，それはわれわれが選び取っている立場だということを，頭の片隅に置いておこう．

例 1.8. 任意の線型空間（ベクトル空間）に基底が存在することは，選択公理を用いて証明される．普通は，選択公理と「Zorn の補題」が同値であることをまず証明して，基底の存在は直接的には Zorn の補題を用いて示す．だが Zorn の補題を述べるには順序集合論を展開しなくてはならないので，これ以上言及しないことにする．

演習問題

1.1　(1.5b) および (1.5d) を証明せよ．また，等式になっていないものについては，等号が成立しないような例を挙げよ．

1.2　単射の定義に関連して，写像 $f\colon A \to B$ に対し，次が同値であることを証明せよ．

(i)　値域に属する任意の元 $b \in f(A)$ に対し，b の逆像 $f^{-1}(b)$ が 1 つの元のみからなる．

(ii)　$a, a' \in A$ について，$a \neq a'$ ならば $f(a) \neq f(a')$ である．

1.3　写像 $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ に対し，次を証明せよ．

(1)　$g \circ f$ が全射ならば g は全射である．

(2)　$g \circ f$ が単射ならば f は単射である．

1.4　例 1.4 の A_x に対し $\displaystyle\bigcup_{x \in X} A_x$, $\displaystyle\bigcap_{x \in X} A_x$ とはどういう集合か説明せよ．

1.5　(1.6) および (1.7) を証明せよ．

1.6　(1.8a) および (1.8b) を証明せよ．

1.7　写像のグラフについて次の問いに答えよ．

(1)　直積集合 $A \times B$ の部分集合 Γ がある写像 $f\colon A \to B$ のグラフになっているための必要十分条件を，写像の概念を用いずに与えよ．

(2)　写像 $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ に対し，合成写像 $g \circ f$ のグラフ $G(g \circ f)$ を，$G(f)$ と $G(g)$ を用いて表せ．

1.8　V を線型空間（ベクトル空間），W_1, W_2 をその部分空間とする．

$$W_1 + W_2 = \{\, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{x} \in W_1,\, \boldsymbol{y} \in W_2 \,\}$$

によって V の部分集合 $W_1 + W_2$ を定める．

(1)　$W_1 + W_2$ が V の部分空間であることを示せ．

(2)　$W_1 \cup W_2 \subset W_1 + W_2$ であることを示せ．

(3)　$W_1 \cup W_2 = W_1 + W_2$ となるのはどのようなときか説明せよ．

1.9　集合列 $\mathscr{A} = (A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ に対し次のように定める（ここでは $\mathbb{N} = \{\, 1, 2, 3, \dots \,\}$ としている）：

$$\mathscr{A}^* = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=k}^{\infty} A_i, \qquad \mathscr{A}_* = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{i=k}^{\infty} A_i.$$

(1)　一般に $\mathscr{A}^* \supset \mathscr{A}_*$ は成り立つか．成り立つならば証明を，そうでなければ反例を与えよ．

(2)　一般に $\mathscr{A}^* \subset \mathscr{A}_*$ は成り立つか．成り立つならば証明を，そうでなければ反例を与えよ．

1.10　写像 $f\colon A \to B$ に対し，$g \circ f = \mathrm{id}_A$ を満たす写像 $g\colon B \to A$ のことを f の**左逆写像**，$f \circ g = \mathrm{id}_B$ を満たす写像 $g\colon B \to A$ のことを f の**右逆写像**と呼ぶ．次を証明せよ．

(1)　f が左逆写像を持つための必要十分条件は，f が単射であることである．

(2)　f が右逆写像を持つための必要十分条件は，f が全射であることである．

1.11　A を集合，$\mathscr{A} = \mathscr{P}(A) \setminus \{\, \emptyset \,\}$ とするとき，写像 $f\colon \mathscr{A} \to A$ を，任意の $U \in \mathscr{X}$ に対し $f(U) \in U$ となるようにとれることを証明せよ．

1.12　次のようにして定理 1.3 の証明を与えよ．

(1)　A が無限集合ならば，単射 $\mathbb{N} \to A$ が存在することを示せ．

(2)　定理 1.3 を証明せよ．