数学の楽しみ 2D［問題 1.11 の解答例］

次の問題の解答例を示す．

授業中に説明したように，プリントの $\mathscr{X}$ は正しくは $\mathscr{A}$ です．それに加えて，さらに次のように修正させてください．

1.11　A を<u>空でない</u>集合，$\mathscr{A} = \mathscr{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$ とするとき，写像 $f\colon \mathscr{A} \to A$ を，任意の $U \in \mathscr{A}$ に対し $f(U) \in U$ となるようにとれることを証明せよ．

［証明］$\mathscr{A}$ の各元 U は A の空でない部分集合である．$\mathscr{A}$ を添字集合とする集合族 $(B_U)_{U\in\mathscr{A}}$ を

$$B_U = U$$

によって定義する．すると，すべての $U \in \mathscr{A}$ について B_U $(= U)$ は空集合でないから，選択公理を適用して，直積

$$\prod_{U\in\mathscr{A}} B_U$$

が空でないことがわかる．そこで $(a_U)_{U\in\mathscr{A}}$ をこの直積の元のひとつとすると，直積の定義により，$(a_U)_{U\in\mathscr{A}}$ は任意の $U \in \mathscr{A}$ に対して $a_U \in B_U$ すなわち $a_U \in U$ であるような元の族であるから，$f\colon \mathscr{A} \to A$ を

$$f(U) = a_U$$

で定義すれば，任意の $U \in \mathscr{A}$ に対して $f(U) \in U$ が成り立つ．　□

注意　A が空集合であっても問題の主張は正しいのですが，次のように説明を追加する必要があります．

まず，上の証明が $A = \emptyset$ のときにも適用できるか考えてみましょう．$\mathscr{P}(A) = \{\emptyset\}$，したがって $\mathscr{A} = \emptyset$ となるので，$\mathscr{A}$ を添字集合とする集合族 $(B_U)_{U\in\mathscr{A}}$ とか，その直積というのはいったい何かという問題が生じます（テキストでは添字集合は常に空集合でないものと仮定していました．その立場から言えば，$(B_U)_{U\in\mathscr{A}}$ とかその直積というのは未定義です）．

採り得る対応策は 2 つあります．第 1 の策は，$A = \emptyset$ の場合には選択公理を用いる上の証明は破棄して，別途直接的に議論するというもの．第 2 の策は，空集合を添字集合とする集合族の概念を導入するというものです．ここでは第 1 の策を採ります．

というわけで $A = \emptyset$ の場合をあらためて考えるのですが，示すべきことは「$f\colon \emptyset \to \emptyset$ という写像の存在」です（「任意の $U \in \mathscr{A}$ に対し……」の部分は，$\mathscr{A} = \emptyset$ だから空虚な条件であって，自動的に満たされる）．空集合 $\emptyset$ を定義域とする写像とは何か——これも説明していなかったんですが，通常，任意の集合 B に対し，$\emptyset$ を定義域，B を終域とする写像は一意的に存在すると考えます（写像をそのグラフとして理解することにするなら，これは自然な結論）．したがって「$f\colon \emptyset \to \emptyset$ という写像が存在する」というのは正しい主張だということになります．