数学の楽しみ 1D［レポート課題についてのコメントと解答例］ 2016 年 7 月 28 日

提出されたレポートはいずれもそれぞれに頑張って書かれていたと思います（程度の差はありますが）.

すべてのレポートに 10 点または 8 点がついています．重要なところに勘違いがあるとか，意味の不明確な記述が多いとか，あるいは見落としが多いと感じたレポートは 8 点としました．具体的には赤字のコメントを見てください.

議論を一部省略してもよいとしましたが，このことについて注意をひとつ．省略は，あくまでも内容を読み手に適切に伝えるために行うのであって，何かを曖昧にごまかすために行うのではありません．これは高度な技術です——そのことを出題時にもっと慎重に伝えておくべきでした.

- 準備そのものは「いくらでも細かく説明できる」という状態までやる．（あたりまえですよね！）
- あることについて，それを書くか省略するか迷ったら，それは書くべき.
- きちんとした考えのもとで省略することに決めたなら，何が省略されているのかは絶対に明確にする.

こういった姿勢で臨むのがいいと思います.

あと，ぜひ LaTeX を習得しましょう．何だそれは？ まずは次の Web ページを見てみよう.

LaTeX 入門 - TeX Wiki https://texwiki.texjp.org/?LaTeX 入門

具体的な使い方についても Web 上にさまざまな情報がありますが，1 冊，本を持っていたほうが良いように思います．次の本が定番です.

奥村晴彦，黒木裕介『［改訂第 6 版］LaTeX 2_ε 美文書作成入門』（技術評論社，2013 年）
紹介ページ：http://oku.edu.mie-u.ac.jp/~okumura/bibun6/

［解答例］

指数関数 $f(x) = a^x$ の構成について述べる．ただし底 a は 1 でない正の実数とする．より正確に言えば，以下で述べるのは，次の定理の証明である.

定理　a を 1 でない正の実数とするとき，次の性質を満たす関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が存在する.

(i) 任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して $f(x+y) = f(x)f(y)$.
(ii) $f(1) = a$.
(iii) f は連続である.

また，そのような関数 f は一意的である.

これから述べる議論は，4 つのステップからなる.

- ステップ 1：$x \in \mathbb{Q}$ に対する関数の値 $f(x)$ が条件 (i), (ii) によって決まることを示す（命題 2）.
- ステップ 2：関数 f の一意性を議論する（命題 4）.
- ステップ 3：一般の x に対する $f(x)$ の定義を与える（命題 5 に基づく）.
- ステップ 4：そうして定義された関数 f が，実際に定理の条件を満たすことを証明する（命題 6）.

予備的考察として，まず次の補題を示しておこう.

補題 1　関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が条件 (i), (ii) を満たすならば，任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し $f(x) > 0$ である.

［証明］条件 (i) により $f(x) = f(x/2)^2$ であるから $f(x) \geq 0$．また，条件 (i), (ii) により $f(x)f(1-x) = f(1) = a \neq 0$ なので，$f(x)$ は 0 ではない．ゆえに $f(x) > 0$. □

以下では $a>1$ と仮定する．というのは，$a>1$ に対して定理の主張が示されれば，$0<a<1$ の場合についても次のようにして主張がすぐに従うからである．まず，$a^{-1}\ (>1)$ について条件 (i), (ii), (iii) を満たす関数 g をとる．すると，補題 1 によって

$$f(x)=\frac{1}{g(x)}$$

により $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を定めることができるが，これが a について (i), (ii), (iii) を満たす関数になっている．また逆に，a について (i), (ii), (iii) を満たす関数 f があれば，その逆数をとることで a^{-1} について (i), (ii), (iii) を満たす関数 g を作ることができるから，g の一意性から f の一意性が導かれる．

●ステップ 1——有理数に対する値の決定

命題 2　関数 $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が条件 (i), (ii) を満たすならば，有理数 $x=p/q\in\mathbb{Q}$（$p\in\mathbb{Z},\ q\in\mathbb{N}$）に対して

$$f(x)=\sqrt[q]{a^p} \tag{1}$$

でなければならない．

［証明］まず，式 (1) を $q=1$ の場合について示す．すなわち，$p\in\mathbb{Z}$ に対し

$$f(p)=a^p \tag{2}$$

ということだ．これは $p=1$ については (ii) より正しい．また (i) より $f(p+1)=f(1)f(p)$ なので，数学的帰納法により任意の $p\in\mathbb{N}$ についても正しい．さらに (i) から $f(1)=f(0)f(1)$ なので，$f(1)=a\neq 0$ により $f(0)=1$ とわかる. 最後に, $1=f(0)=f(p)f(-p)$ なので, $p<0$ のときも $f(p)=f(-p)^{-1}=(a^{-p})^{-1}=a^p$ である．

続いて一般の q の場合を確かめる．$qx=p$ より $f(qx)=f(p)=a^p$ だから，もし

$$f(qx)=f(x)^q \tag{3}$$

であるとすれば，補題 1 と合わせて $f(x)=\sqrt[q]{f(qx)}=\sqrt[q]{a^p}$ が従う．ところでこの (3) は，(2) を $p\in\mathbb{N}$ について確かめたのとまったく同様にして，(i) と数学的帰納法によって示される． □

式 (1) の右辺を $a^{p/q}$ と書くことにする．この記法は $p/q=p'/q'$ のとき $\sqrt[q]{a^p}=\sqrt[q']{a^{p'}}$ でなければ意味がないが，実際に $p/q=p'/q'$ のとき，$r=pq'=p'q$ とおくと，$\sqrt[q]{a^p}$ と $\sqrt[q']{a^{p'}}$ はいずれも qq' 乗すると a^r になるので，非負累乗根の一意性によって $\sqrt[q]{a^p}=\sqrt[q']{a^{p'}}$ である．

有理数の範囲で a^x には単調性があることを指摘しておく．

補題 3　$a>1$ という仮定のもとで，$x,\ x'\in\mathbb{Q},\ x\le x'$ のとき $a^x\le a^{x'}$ である．

［証明］$x=p/q,\ x'=p'/q'$（ただし $p,\ p'\in\mathbb{Z},\ q,\ q'\in\mathbb{N}$）とおく．仮定 $x\le x'$ によって $pq'\le p'q$ だから，$a^{pq'}\le a^{p'q}$ である．したがって，もし $a^{p/q}>a^{p'/q'}$ だとすると，両辺を qq' 乗して $a^{pq'}>a^{p'q}$ となってしまうから矛盾である． □

●ステップ 2——一意性

命題 4　条件 (i), (ii), (iii) を満たす関数 f は一意的である．

［証明］$x\in\mathbb{Q}$ に対しては命題 2 で $f(x)$ の値が決定されているから，証明すべきことは，$x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ に対して $f(x)$ の値が 2 通り以上の可能性を持たないこと，すなわち定理に示された性質を満たす $f_1,\ f_2$ について，$f_k(x)=b_k\ (k=1,\ 2)$ とおけば $b_1=b_2$ となることである．

以下，x を任意に固定された無理数とする．するとまず，x に収束するような有理数からなる数列 (x_n) がとれる（たとえば，各 n に対して，$|x_n-x|<1/n$ となるように $x_n\in\mathbb{Q}$ をとればよい．これは $\mathbb{Q}$ の $\mathbb{R}$ にお

ける稠密性によって可能である）．そして連続関数の性質によって，数列 $(f(x_n))$ は $f(x)$ に収束しなければならない：

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x). \tag{4}$$

これは f_1, f_2 の両方について成り立つ．よって

$$\lim_{n\to\infty} f_k(x_n) = b_k \qquad (k = 1,\ 2).$$

ところで各 x_n は有理数だから，命題 2 で $f(x_n)$ は一通りに決定されており，その値は a^{x_n} だった．ゆえに

$$\lim_{n\to\infty} a^{x_n} = b_k \qquad (k = 1,\ 2).$$

数列 (a^{x_n}) が 2 つ以上の異なる実数に収束することはないから，$b_1 = b_2$ でなければならない． □

●ステップ 3——一般の x に対する $f(x)$ の定義

ステップ 1 において，条件 (i), (ii) に対する必要条件として式 (1) を得た．逆にわれわれは，これから条件を満たす f を構成するにあたり，まず有理数 $x = p/q$ に対し $f(x) = a^{p/q}$ と定義する．このとき，(ii) は当然成り立つし，$x, y \in \mathbb{Q}$ の範囲で (i) が成り立つことも，非負累乗根の一意性に基づいて証明することができる（その詳細は省略する）．

そこで無理数 x に対する $f(x)$ の定義が問題となる．ところで命題 4 の証明では，無理数 x に対し，(x_n) を x に収束する有理数列とするとき，数列 $(f(x_n))$ が，すなわち (a^{x_n}) が $f(x)$ に収束しなければならないことを用いたのだった．つまり $f(x)$ は数列 (a^{x_n}) の極限以外の数ではあり得ない．そこで次のことを示す．

命題 5　$x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ とし，(x_n) を x に収束する有理数列とするとき，

(1) 数列 (a^{x_n}) はある実数に収束する．

(2) また，その極限は数列 (x_n) の選び方に依存せず，x のみにより決まる．

この極限をもって $f(x)$ の定義とする．

証明に先立って，実数の完備性，特に「任意の Cauchy 列は収束する」ということを思い出しておく．数列 (x_n) が Cauchy 列であるというのは，どんな $\varepsilon > 0$ に対しても，うまく $N \in \mathbb{N}$ を選ぶと，$m, n \geq N$ を満たすような任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して $|x_m - x_n| < \varepsilon$ が成り立つようにできることを指すのだった．なお，逆に「収束する任意の数列は Cauchy 列である」というのも正しい（こちらは定義からすぐにわかる）．以下ではこれらの事実を用いる．

［命題 5 (1) の証明］数列 (a^{x_n}) が Cauchy 列であることを確かめればよい．

$\varepsilon > 0$ を任意の正数とする．一般に

$$|a^{x_m} - a^{x_n}| = a^{x_n}|a^{x_m - x_n} - 1|$$

である．収束する数列は有界だから，特に「任意の n に対し $x_n \leq M$」となる $M > 0$ が存在する．この M は，必要なら大きく取り直すことによって，有理数とすることができる．すると補題 3 により $a^{x_n} \leq a^M$ だから，次が得られる：

$$|a^{x_m} - a^{x_n}| \leq a^M|a^{x_m - x_n} - 1|. \tag{5}$$

ところで，数列 (x_n) は収束しているから Cauchy 列でもある．ゆえに，どんな $q \in \mathbb{N}$ に対しても，ある $N_1 \in \mathbb{N}$ をうまく選べば，$m, n \geq N_1$ のとき $|x_m - x_n| < 1/q$，すなわち $-1/q < x_m - x_n < 1/q$ となる．補題 3 によって

$$a^{-1/q} \leq a^{x_m - x_n} \leq a^{1/q}. \tag{6}$$

ここで $q \to \infty$ のとき数列 $(a^{1/q})$, $(a^{-1/q})$ はともに 1 に収束する．このことを示すには，$a^{-1/q} = (a^{1/q})^{-1}$ だから数列 $(a^{1/q})$ についてだけ確かめればよい．$a^{1/q} \to 1$ $(q \to \infty)$ であることは次の評価式からわかる：

$$|a^{1/q} - 1| = \frac{a-1}{a^{(q-1)/q} + a^{(q-2)/q} + \cdots + a^{1/q} + 1} < \frac{a-1}{q}.$$

このことから特に，$|a^{1/q}-1|<\varepsilon/a^M$ かつ $|a^{-1/q}-1|<\varepsilon/a^M$ となるような $q\in\mathbb{N}$ が存在する．この q に対応する前々段落の N_1 を N とおく．すると式 (6) により $|a^{x_m-x_n}-1|<\varepsilon/a^M$ で，式 (5) と合わせて

$$|a^{x_m}-a^{x_n}|<\varepsilon$$

となる．これで数列 (a^{x_n}) が Cauchy 列であることが証明された． □

［命題 5 (2) の証明］(x_n) と (x'_n) がともに x に収束する有理数列であるとして，

$$\lim_{n\to\infty}a^{x_n}=\alpha,\qquad \lim_{n\to\infty}a^{x'_n}=\alpha'$$

とおく．示すべきことは $\alpha=\alpha'$ である．

次のようにして新しい有理数列 (x''_n) を構成する：

$$x''_n=\begin{cases}x_{(n+1)/2}, & n\text{ が奇数のとき},\\ x'_{n/2}, & n\text{ が偶数のとき}.\end{cases}$$

すると定義からすぐにわかるように (x''_n) も x に収束するから，この命題の (1) によって数列 $(a^{x''_n})$ も収束する．その極限を α'' とする．すると (a^{x_n}) と $(a^{x'_n})$ はいずれも $(a^{x''_n})$ の部分列だから，どちらも α'' に収束している．数列の極限は一意的なので，$\alpha=\alpha''$，また $\alpha'=\alpha''$ である．ゆえに $\alpha=\alpha'$． □

●ステップ 4——定理の条件を満たすことの証明

ステップ 3 で $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を定義することができた．この f について，まず定理の条件 (ii) は当然成り立つ．条件 (i) も，$x,y\in\mathbb{Q}$ の範囲で成り立っていることと数列の極限の性質（四則演算との関係）によって直ちに成立することがわかる．したがって，残る問題点は条件 (iii)，すなわち f の連続性である．

命題 6　ステップ 3 で定義した関数 $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は連続である．

準備として，単調性を確認しておく．すなわち，$x,x'\in\mathbb{R}$ が $x\le x'$ を満たすとき

$$f(x)\le f(x'). \tag{7}$$

x が有理数か否か，x' が有理数か否かによって $2\times2=4$ 通りのパターンがあるが，そのうち $x,x'\in\mathbb{Q}$ の場合については補題 3 ですでに示した．残る 3 パターンについて，$x\in\mathbb{Q}$，$x'\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ の場合を例にとって説明する．この場合は，x' に収束する有理数列 (x'_n) として，特に単調減少列をとる．すると $f(x')$ の定義によって $f(x'_n)\to f(x')$ $(n\to\infty)$ であり，また $x\le x'_n$ なので $f(x)\le f(x'_n)$ でもある．よって極限の性質により不等式 (7) が従う．他のパターンについても，同様の議論によって証明できる．

ではいよいよ，f の連続性を示す．

［命題 6 の証明］2 段階に分けて行う．まず $x=0$ における連続性を示し，それから一般の場合を示す．

$x=0$ における連続性．$\varepsilon>0$ を任意にとる．示すべきことは，$\delta>0$ をうまく選ぶと，$|x|<\delta$ を満たす任意の $x\in\mathbb{R}$ について $|f(x)-f(0)|=|f(x)-1|<\varepsilon$ となることである．

ステップ 3 の途中でやったように，数列 $(a^{1/q})$, $(a^{-1/q})$ は $q\to\infty$ のときいずれも 1 に収束するのだった．したがって特に，$|a^{1/q}-1|<\varepsilon$ かつ $|a^{-1/q}-1|<\varepsilon$ となるような $q\in\mathbb{N}$ が存在する．$\delta=1/q$ とすれば，$|x|<\delta$ のとき，$-1/q<x<1/q$ と f の単調性によって $|f(x)-1|<\varepsilon$ が従う．

一般の $x=x_0$ における連続性．$\varepsilon>0$ を任意にとる．条件 (i) と補題 1 を用いると

$$|f(x)-f(x_0)|=f(x_0)\left|\frac{f(x)}{f(x_0)}-1\right|=f(x_0)|f(x-x_0)-1|$$

という変形ができる．ここで，f は 0 において連続であることをすでに示したから，「$|x-x_0|<\delta$ ならば $|f(x-x_0)-1|<\varepsilon/f(x_0)$」となるような $\delta>0$ が存在する．この δ について，$|x-x_0|<\delta$ のとき，

$$|f(x)-f(x_0)|=f(x_0)|f(x-x_0)-1|<f(x_0)\cdot\frac{\varepsilon}{f(x_0)}=\varepsilon.$$

ゆえに f は $x=x_0$ においても連続である． □

以上で，冒頭の定理の証明が完結した．