実数論 (2)

復習

われわれは実数全体の集合 $\mathbb{R}$ について次の「完備性」の公理を要請した．

(R10)（以下 (W) で表す）空でない上に有界な実数の集合は上限を持つ．（**Weierstrass の公理**）

そして，それからの帰結として次の 3 つを挙げた．

(M) 上に有界な単調増加数列は収束する．
(BW) 任意の有界数列は収束する部分列を持つ．（**Bolzano–Weierstrass の定理**）
(C) Cauchy 列は収束する．（**Cauchy の収束条件**）

実際には，Archimedes の原理を (A) とするとき，これらの命題には次の関係がある：

$$(\mathrm{W}) \Leftrightarrow (\mathrm{M}) \Leftrightarrow (\mathrm{BW}) \Leftrightarrow (\mathrm{C}) \wedge (\mathrm{A}). \tag{$*$}$$

そこで，(W), (M), (BW), (C) を総称して「実数の完備性」と呼ぶ．

12.1　最大最小値の存在定理

実数の完備性を用いて次の定理が証明できる．より具体的には，Bolzano–Weierstrass の定理を用いるのが標準的なやり方だと思う．

定理　有界閉区間上の連続関数 $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ は，最大値および最小値を持つ．

ここで「最大値を持つ」というのは，「ある数 $c \in [a,b]$ において最大値が達成される」ということ，すなわち次のような数 $c \in [a,b]$ が存在するということを意味している：

任意の $x \in [a,b]$ に対し $f(c) \geq f(x)$.

「最小値を持つ」についても同様．

この定理を用いて平均値の定理が証明される．そして，微分法の重要な応用は平均値の定理に基づいて行われる．こうして実数論は微分法に接続される．

なお，多変数の実数値関数についても，「有界閉区間」を「$\mathbb{R}^n$ の有界閉集合」に置き換えれば同じ主張が成り立つ．証明も本質的には変わらないが，授業では扱わない．演習問題 12.3 を参照のこと．

12.2　実数の完備性の言い換えの証明について

同値性 $(*)$ の証明はまだ与えていなかった．今回，その方針を説明し，実際に一部を証明してみる（全部はやらないが，興味があればぜひ，関連書を参照するなどして残りの部分を埋めることを試みてほしい）．

演習問題

12.1 (1) 次で定義される数列 (a_n) が正の無限大に発散することを証明せよ：

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

(2) 次で定義される数列 (b_n) がある実数 γ に収束することを証明せよ：

$$b_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n.$$

ただし $\log n = \displaystyle\int_1^n \frac{1}{x}\,dx$ であることを用いてよい．

［この $\gamma = 0.57721\cdots$ は Euler の定数と呼ばれる．まだ無理数かどうかもわかっていないそうです．］

12.2 授業では，Archimedes の原理 (A) を，上に有界な単調増加数列が収束すること (M) から証明した．

(1) Weierstrass の公理 (W) から (A) を直接証明せよ．

(2) Bolzano–Weierstrass の定理 (BW) から (A) を直接証明せよ．

12.3* $A \subset \mathbb{R}^N$ とする．A が原点を中心とするある半径 $R > 0$ の開球 $B(0,R) = \{\, x \in \mathbb{R}^N \mid |x| < R \,\}$ に部分集合として含まれるとき，A は**有界**であるという（ここで $x = (x_1, \ldots, x_N)$ に対し $|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_N^2}$ と書いた）．また，A の点列 (a_n) であって $\mathbb{R}^N$ において収束するようなものを任意にとったとき，その極限も常に A に属するならば，A は**閉集合**であるという（直観的にはだいたい「縁を含む」ということ）．

さて，$A \subset \mathbb{R}^N$ を有界閉集合とし，$f\colon A \to \mathbb{R}$ を A で定義された連続関数とする——すなわち，任意の $a \in A$ において

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in A (|x - a| < \delta \to |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$$

が真であるとする．そのとき f は最大値および最小値を持つ．これを証明せよ．