数学の楽しみ 1D［第 12 回・演習問題の解答例］

12.1 (1) 次で定義される数列 (a_n) が正の無限大に発散することを証明せよ：

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

(2) 次で定義される数列 (b_n) がある実数 γ に収束することを証明せよ：

$$b_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n.$$

ただし $\log n = \displaystyle\int_1^n \frac{1}{x}\,dx$ であることを用いてよい．

［証明］

(1)「数列 (a_n) が正の無限大に発散する」というのは，任意の $M \in \mathbb{R}$ に対し，ある $N \in \mathbb{N}$ を適切に選ぶと，$n \geq N$ であるような任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n > M$ となるということであった．

任意に $M \in \mathbb{R}$ をとる．いま，$n = 2^k$（k は自然数）のときを考えると，a_n すなわち a_{2^k} は

$$\begin{aligned}
a_{2^k} &= 1 + \boxed{\frac{1}{2}} + \boxed{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} + \boxed{\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}} + \boxed{\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}} + \cdots + \boxed{\frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k}} \\
&\geq 1 + \underbrace{\boxed{\frac{1}{2}}}_{1\text{ 個}} + \underbrace{\boxed{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}}_{2\text{ 個}} + \underbrace{\boxed{\frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{8}}}_{4\text{ 個}} + \underbrace{\boxed{\frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16}}}_{8\text{ 個}} + \cdots + \underbrace{\boxed{\frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{2^k}}}_{2^{k-1}\text{ 個}} \\
&= 1 + \boxed{1 \cdot \frac{1}{2}} + \boxed{2 \cdot \frac{1}{4}} + \boxed{4 \cdot \frac{1}{8}} + \boxed{8 \cdot \frac{1}{16}} + \cdots + \boxed{2^{k-1} \cdot \frac{1}{2^k}} = 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}}_{k\text{ 個}} = 1 + \frac{k}{2}
\end{aligned}$$

と下から評価できる．さらにまた数列 (a_n) は単調増加だから，$n \geq 2^k$ のとき $a_n \geq 1 + k/2$ とわかる．そこで，$M < 1 + k/2$ となるような $k \in \mathbb{N}$ をとり（ここで Archimedes の原理を用いた），$N = 2^k$ とおく．すると $n \geq N\ (= 2^k)$ のとき $a_n \geq 1 + k/2 > M$ となる．これで (a_n) が正の無限大に発散することが示された．

(2) 問題で与えられた数列 (b_n) の代わりに，

$$b'_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \log n$$

で定義される数列 (b'_n) について考える．$b_n = b'_n + 1/n$ で $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$ だから，(b'_n) が収束することを証明すればよい．ところで以下に示すように，実は (b'_n) は上に有界な単調増加数列である．したがって実数の完備性によって (b'_n) は収束する．

まず (b'_n) が単調増加であることを示す．$\log n = \displaystyle\int_1^n \frac{1}{x}\,dx$ を用いると

$$b'_{n+1} - b'_n = \frac{1}{n} - \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx$$

であるが，$n \leq x \leq n+1$ で $1/x \leq 1/n$ だから第 2 項の積分は $1/n$ 以下なので，$b'_{n+1} - b'_n \geq 0$．すなわち $b'_n \leq b'_{n+1}$．

次に (b'_n) が上に有界であることを示す．今度は $k \leq x \leq k+1$ で $1/x \geq 1/(k+1)$ であることを用いると

$$\int_1^n \frac{1}{x}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx + \int_2^3 \frac{1}{x}\,dx + \cdots + \int_{n-1}^n \frac{1}{x}\,dx \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

なので，

$$b'_n \leq \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n} \leq 1.$$

これで証明が完了した．

コメント これは今回よりも前の授業の内容に関する問題でした．(1) では何よりもまず，数列が「正の無限大に発散する」ことの定義を正確に思い出さなければなりません．できたでしょうか？ (2) は，そう簡単に方針が立たないかもしれませんが，$\log n$ を図形の面積として表すなどして状況をつかみつつ，いろいろな可能性を考えてみましょう．上に述べた以外の方法もあると思います．

12.2 授業では，Archimedes の原理 (A) を，上に有界な単調増加数列が収束すること (M) から証明した．

(1) Weierstrass の公理 (W) から (A) を直接証明せよ．

(2) Bolzano–Weierstrass の定理 (BW) から (A) を直接証明せよ．

［証明］Archimedes の原理とは「自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ は上に有界ではない」という命題のことだった．

(1) 背理法を用いる．$\mathbb{N}$ が上に有界であると仮定する．そのとき (W) によって $\mathbb{N}$ は上限 $\sup \mathbb{N}$ を持つので，それを s とおく．すると上限の定義によって $s-1$ は $\mathbb{N}$ の上界ではない．すなわち $s-1 < n$ なる $n \in \mathbb{N}$ が存在する．ところがこのとき $s < n+1$ であるから，s より大きな自然数が存在することになって，s が $\mathbb{N}$ の上界であることに反する．ゆえに初めの仮定は偽であって，$\mathbb{N}$ は上に有界ではない．

(2) 背理法を用いる．$\mathbb{N}$ が上に有界であると仮定する．

$a_n = n$ で定義される数列 (a_n) を考える．すると仮定からこの数列が有界ということになるので（より正確には，上に有界であることが仮定から従う．下に有界であることは明らか），(BW) によって，(a_n) は収束部分列 (a_{n_k}) を持つ（ここで $1 \leq n_1 < n_2 < \cdots$ である）．

この部分列 (a_{n_k}) の極限を α とおく．言い換えれば $\lim_{k\to\infty} n_k = \alpha$ である．すると数列の極限の定義によって，ある $k_0 \in \mathbb{N}$ であって，

$$|n_k - \alpha| < \frac{1}{2}$$

が任意の $k \geq k_0$ について成り立つようなものが存在する．そのとき特に $|n_{k_0} - \alpha| < 1/2$，すなわち $\alpha - 1/2 < n_{k_0} < \alpha + 1/2$ なのだが，ここで $n_{k_0+1} > n_{k_0}$ より $n_{k_0+1} \geq n_{k_0} + 1$ であることを用いると

$$n_{k_0+1} \geq n_{k_0} + 1 > \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) + 1 = \alpha + \frac{1}{2}$$

である．しかしこれは k_0 の取り方に矛盾する．

ゆえに初めの仮定は偽であって，$\mathbb{N}$ は上に有界ではない．

コメント この問題の答えについてもそうですし，授業で紹介した (W) $\Rightarrow$ (M) や (M) $\Rightarrow$ (A) の証明についても同じですが，これらの証明自体を丸ごと覚えようとする必要はありません．そうではなくて，証明についてじっくり考えることを通じて，実数の完備性に関連する諸命題についての理解を深めてください．その上で，こういった証明を「何もないところから自分で作れるか？」と自問してみるのがよいです．