数学的な文章の書き方 (2)

11.1　数学的文章における原則（その 2）——段落（パラグラフ）について

前回は,「文（センテンス）」を作る上での指針として次の 3 点を挙げた.

- 文章とは，文の集まりである
- 文の内容を明確にする
- 他の文とのつながりを接続詞によって適切に示す

今回は,「段落（パラグラフ）」の作り方に関して，2 つの指針を挙げる．例は長くなってしまうので示さないが，たとえば演習問題 8.3 (2) の解答例はある程度のボリュームがあり，こういったことを意識しながら書かれていることが見えやすいと思う．参照してほしい.

●段落が「全体として何を述べているのか」，中心的な内容を意識する

英語圏における「パラグラフ・ライティング」の考え方によれば，段落は「ばらばらな文の集まりではなく，それ全体として一つの内容を主張しているもの」とされる．一つの段落は，一つのトピック・センテンス (topic sentence) と，それを敷衍したり裏付けたりするサポート・センテンス (supporting sentences) からなる．トピックから外れる内容は，その段落に含めるべきでない.

数学的文章を書こうとするときは，そこで説明しようとする論理は一般に複雑なので，上のような考えを厳格に実現するのは難しい（おそらく，段落の数がとても多くなってしまう）．しかし，基本的な姿勢としてはこれに従うのがよい．「ある程度の分量を書いたところで，なんとなく次の段落に移る」のではなく，**その段落の中心的な内容は何か**ということを明確にしながら書くべきだ．また，可能ならば，トピック・センテンスに相当する文を入れるとよい.

●概観から細部へ

全体を俯瞰するような内容を，なるべく先に述べるのがよい．これは，段落内においてもそうだし（つまりトピック・センテンスはなるべく先に置くとよい)，複数の段落の配置に関してもそうである．数学的文章で述べることがらには論理的順序というものがあるから，常に「結論を先に述べる」ということはできないけれども，それでも，要所要所で先の見通しを与えることはできる.

「俯瞰する」ことによって，読者が道に迷うリスクが減る．また，書き手が細部の論理を間違えたとしても，文章が致命的に理解不能なものになるリスクが減る（ついでに言えば，こういうことは，試験の点数にも無視できない影響があると思う).

たとえば，次のようなことは考慮に値する——いつもそうすべきというわけではないが.

- 証明の初めに，証明全体の流れを示す.
- 証明の鍵となる主張を先に述べて，それを用いて証明をいったん完結させてしまう.
- 細かな定義は後回しにして，定理を先に述べてしまう.

文章全体が長くなればなるほど，こういった工夫の価値は増す.

レポート課題

以下のようにレポートを作り，提出してください．

内容　指数関数の構成について．すなわち，次の定理の証明について述べよ．

> **定理**　a を 1 でない正の実数とする．そのとき，次の性質を満たす関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が存在する．
>
> (i)　任意の $x, y \in \mathbb{R}$ について $f(x+y) = f(x)f(y)$.
>
> (ii)　$f(1) = a$.
>
> (iii)　f は連続である．

形式　A4 用紙，片面．表紙は付けない．
手書きの場合は 10 枚以下，そうでなければ 5 枚以下（常識的に読みやすい文字の大きさで）．
初めに学籍番号と名前を書くこと．左上をホチキスでとめること．

提出　7/14 授業の冒頭，教室にて．何らかの事情でもっと早く提出したい場合は，相談してください．

以下は補足です．

- 「数列の極限や関数の連続性，あるいは実数の完備性については十分な知識がある．しかし，この授業でやった内容は何も知らない」という読者を想定して，そのような人にとって理解しやすいように記述してください．
- 第 10 回・第 11 回で提示した指針を念頭に置きつつ，**必ず 1 回以上推敲してください**．すべての指針が厳格に反映されている必要はありません（原則にすぎないので）．
- 推敲前の草稿作成の段階においては，他の人の協力を得てもかまいません（その場合，その人のお名前を付記すること）．ただし，推敲は自力でやってください．
- 授業で一部を説明しますが，その議論の方針に従わなくてもかまいません．
- 必ずしもすべてのことに詳しい証明を付けなくてもいいです．重要でないとか，必要だが深入りするのは本題から外れると思われることについては，適度に説明を省いてください．
- 高校で扱うような極限の性質については既知としてかまいません．また，以下のことがらを用いる場合も，証明は省いてけっこうです．（これら以外はすべて証明せよということではありません．）
  - 数列の極限の一意性.
  - 収束する数列の任意の部分列もまた同じ極限に収束すること．
- 以下の論点についての議論を含めるか否か，迷うかもしれません．どちらでもかまいません．
  - 関数 f の一意性.
  - $a > 0$ に対する a の正の累乗根 $\sqrt[q]{a}$ の存在と一意性.

試験，評価について

期末試験を 8/4 にやります．時間や場所については 7/28 にお知らせします．試験範囲は 7/14 までの内容，およびプリントの演習問題（$\star$ 付きのものは除外）です．

評価の基準について第 1 回のガイダンスで述べましたが，それを次のように修正します．

- 小テスト（12 点）
- レポート（10 点）
- 期末試験（100 点）

さらに授業中の発表状況に基づき加点の可能性があります．