数学的な文章の書き方 (1)

今回から次回にかけて，狭い意味での数学的文章——すなわち，レポートや試験の答案，あるいは論文——の書き方についての原則的な指針を与えてみたいと思う．ごく基本的なことがらに限定し，細かい各論には立ち入らない．実際のところ，最も重要なことは，「より良い文章を目指す」という姿勢を身につけることである．

10.1　例

まず，例として，次の定理の証明について検討してみる．

定理　数列 (a_n) がある実数に収束するとき，

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

で定義される数列 (b_n) も同じ数に収束する．

以下に，「証明」として書かれた文章の例を掲げる（架空のものである）．これには不明確な部分がたくさんある．どのように修正するとよいだろうか．自分の草稿のようなつもりで推敲してみよう．

$a = \lim_{n\to\infty} a_n$．任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$N_1 \in \mathbb{N}$ を $n \geq N_1$ のとき $|a_n - a| < \varepsilon/2$ となるようにとる．

$$\begin{aligned}
|b_n - a| &= \left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - a \right| = \left| \frac{(a_1 - a) + (a_2 - a) + \cdots + (a_n - a)}{n} \right| \\
&\leq \frac{|a_1 - a| + |a_2 - a| + \cdots + |a_n - a|}{n} \\
&< \frac{|a_1 - a| + |a_2 - a| + \cdots + |a_{N_1-1} - a| + (n - N_1 + 1)\cdot\varepsilon/2}{n}
\end{aligned}$$

$M = \max\{\, |a_1 - a|, |a_2 - a|, \ldots, |a_{N_1-1} - a| \,\}$

$$|b_n - a| < \frac{(N_1 - 1)M + (n - N_1 + 1)\cdot\varepsilon/2}{n}$$

$(n - N_1 + 1)\cdot\varepsilon/2$ はいくらでも大きくなるので，$(N - N_1 + 1)\cdot\varepsilon/2 > (N_1 - 1)M$ となり，$n \geq N$ のとき

$$|b_n - a| < \frac{(N - N_1 + 1)\cdot\varepsilon/2 + (n - N_1 + 1)\cdot\varepsilon/2}{n} \leq \frac{n - N_1 + 1}{n}\varepsilon \leq \varepsilon$$

よって b_n は a に収束する．

改善例

仮定から $\lim_{n\to\infty} a_n$ が存在するので，それを a とする．証明すべきことは数列 (b_n) が a に収束することである．つまり，任意にとった $\varepsilon > 0$ に対し，すべての $n \geq N$ について $|b_n - a| < \varepsilon$ となるような N が存在することを示せばよい．

極限の定義によって，$N_1 \in \mathbb{N}$ を $n \geq N_1$ のとき $|a_n - a| < \varepsilon/2$ となるようにとることができる．すると $n \geq N_1$ のとき

$$\begin{aligned}|b_n - a| &= \left|\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - a\right| = \left|\frac{(a_1 - a) + (a_2 - a) + \cdots + (a_n - a)}{n}\right| \\ &\leq \frac{|a_1 - a| + |a_2 - a| + \cdots + |a_n - a|}{n} \\ &< \frac{|a_1 - a| + |a_2 - a| + \cdots + |a_{N_1 - 1} - a| + (n - N_1 + 1)\cdot\varepsilon/2}{n}\end{aligned}$$

が成り立つ．そこでさらに $M = \max\{\,|a_1 - a|, |a_2 - a|, \ldots, |a_{N_1-1} - a|\,\}$ とおくと

$$|b_n - a| < \frac{(N_1 - 1)M + (n - N_1 + 1)\cdot\varepsilon/2}{n}.$$

ここで，Archimedes の原理によって $(N - N_1 + 1)\cdot\varepsilon/2 > (N_1 - 1)M$ となるような $N \in \mathbb{N}$ が存在する．この N に対し，$n \geq N$ のとき

$$|b_n - a| < \frac{(N - N_1 + 1)\cdot\varepsilon/2 + (n - N_1 + 1)\cdot\varepsilon/2}{n} \leq \frac{n - N_1 + 1}{n}\varepsilon \leq \varepsilon.$$

よって数列 (b_n) は a に収束する．

10.2　数学的文章における原則（その 1）——文（センテンス）について

●文章とは，文の集まりである

まずは形から入ろう．数学的文章におけるすべての構成要素は，図版などを除いて，いずれかの文に属するべきである．そうでなければ，その構成要素をそこに置く意図を，読者に伝えることはできないからだ．

数式も例外ではない．その数式をそこにおく目的を考え，適切な言葉を添えて，意図の伝わるような文の形にする．（数学的な文章を書くときには，日本語であっても句読点として「.」「,」を用いる人が多いが，これは数式の直後においても違和感を生じないようにするための配慮だと考えられる．）

どのような文にしていいかわからない場合は，次の類型を念頭に置くといいかもしれない．多くの文は次のいずれかにあてはまる（または複数の性格を同時に持つ——たとえば，下記の「定義の記述」の例は仮定の記述をも含んでいる）．

- 定義の記述（例：「収束する数列 (a_n) について，その極限を a とおく.」）
- 仮定の記述（例：「すべての n について $a_n \geq 0$ であると仮定する.」）
- 帰結の記述（例：「そのとき $a \geq 0$ が従う.」）
- 推論の記述（例：「なぜなら，$a < 0$ だとすると，……となり矛盾が生じるからである.」）

どれかに当てはまるならば，その性格がはっきりするように書き，どれにも当てはまらなければ，特に注意深く検討する．実際にはほとんどすべての文が，帰結や推論の記述であろう．

「複数の性格を同時に持つ文もある」ということに触れたけれども，一つの文が述べる内容は，なるべく単純なほうがいい．したがって，分割できる文は原則として分割したほうがいい．ただし文章のリズムとの兼ね合いもあるので，この点については柔軟に考えてよいと思う．

●文の内容を明確にする

各文が述べている内容を明確にしよう．読者が内容を迷うことなく受け取れるようにしよう．**意識的に「この文はいったい何を述べているのか」と自分に問いかけ**，その内容がストレートに伝わる表現を心がけよう．

これは必ずしも「説明を詳しくしよう」ということではない．詳しい説明は基本的には好ましいが，脇道に深く入り込むことにもなりかねないから，想定読者や文章の目的を考え，適切なバランスを探すべきである．

文の内容についてよく検討し，それを明確にした結果として，「その文は要らない」という結論に達することもあると思う．

> **例**　初めの（良くない）例における「$(n - N_1 + 1) \cdot \varepsilon/2$ はいくらでも大きくなるので」という部分は不明確である．「いくらでも大きくなる」とはどういうことか．もっと言えば，ここで「いくらでも大きくなる」といったことを述べる必要はあるか．その必要はない——という考えに基づいて改善例は書かれた．

これに関連して，「客観的内容」と「主観的内容」をはっきり区別しよう．これら二つの違いは「誰かの判断が含まれるか」という点にある．客観的内容には判断は含まれず，その妥当性は誰にでも確かめられる．主観的内容には判断が含まれる——他の人がその判断に同意するとは限らない．数学的議論を記述する文章は，原則として客観的内容だけで構成されるべきである．

●他の文とのつながりを接続詞によって適切に示す

数学的文章は何らかの論理を説明するものだから，各々の文は独立しているのではなく，互いに関連している．論理的構造を明確にするため，（広い意味での）接続詞を適切に使おう．

- したがって，ゆえに，すると，以上より，……
- ところが，ここで，一方で，……
- しかし，だが，……
- なぜなら，というのは，……

演習問題

10.1 以下に掲げるのは，

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

で定義される関数 $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ の連続性の証明の草稿（？）である．これを推敲して，証明を完成させよ．

$a \in (0,\infty)$．$\varepsilon > 0$ に対し，$\delta > 0$ をとって $|x-a| < \delta$ のとき

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

となるようにする．

$$|f(x) - f(a)| = \left| \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right| = \frac{|\sqrt{x} - \sqrt{a}|}{\sqrt{x}\sqrt{a}} = \frac{|x-a|}{\sqrt{x}\sqrt{a}(\sqrt{x}+\sqrt{a})}$$

$x > a/2$ で

$$\frac{|x-a|}{\sqrt{x}\sqrt{a}(\sqrt{x}+\sqrt{a})} < \frac{|x-a|}{\sqrt{a/2}\sqrt{a}(\sqrt{a/2}+\sqrt{a})}$$

$x - a$ はいくらでも小さくなるからよい．