実数論 (1)

9.1 実数の公理的定義

定義 「実数全体の集合」$\mathbb{R}$ とは，全順序体（たい）であって，さらに完備性の公理を満たすもののことである．その各々の元のことを**実数**という．

以下で上の定義に注釈を加えてゆく．

「$\mathbb{R}$ が**体** (field) である」というのは次のことを意味する．

(R1) $\mathbb{R}$ には加法および乗法と呼ばれる演算が定義されている．すなわち，任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対し，$a + b, ab \in \mathbb{R}$ が定義されている．
(R2) 加法と乗法について，結合律，交換律，分配律が成立する．
(R3) 加法と乗法について，それぞれ単位元が存在する．すなわち，次のような $0, 1 \in \mathbb{R}$ が存在する：

$$0 + a = a, \qquad 1 \cdot a = a \qquad \text{（それぞれ，任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して）}.$$

なお，加法の単位元を「零元」ともいう．
(R4) 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して，$a + (-a) = 0$ なる元 $-a \in \mathbb{R}$ が存在する（加法に関する逆元）．また，0 でない任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して，$aa^{-1} = 1$ なる元 $a^{-1} \in \mathbb{R}$ が存在する（乗法に関する逆元）．
(R5) $0 \neq 1$.

さらに次が成り立つことを指して，「$\mathbb{R}$ は全順序体 (totally ordered field) である」という．

(R6) 任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対し，$a \leq b$ または $b \leq a$ が成立する．両方が成立するのは $a = b$ の場合のみ．
(R7) 関係 $\leq$ は推移律を満たす．すなわち，$a \leq b$ かつ $b \leq c$ ならば $a \leq c$.
(R8) $a \leq b$ ならば $a + c \leq b + c$.
(R9) $a \geq 0, b \geq 0$ ならば $ab \geq 0$.

完備性 (completeness) の公理には，互いに同値な，さまざまな表現の仕方がある．ここではひとまず次を採用する．

(R10) 空でない上に有界な実数の集合は上限を持つ．（**Weierstrass の公理**，$\mathbb{R}$ の順序完備性）

ここで集合 A の**上限** (supremum) とは，A の上界全体の集合の最小元のことである．A の上限のことを，それが存在するとき，$\sup A$ と書く．反対に，A の下界全体の集合の最大元のことを A の**下限** (infimum) という．$A \neq \emptyset$ かつ A が下に有界であるとき，A は下限を持つ（証明せよ）．それを $\inf A$ と書く．

Weierstrass の公理の重要性はどんな点にあるか？　——これは何らかの性質を持つ実数が「存在する」ことを示すための一般的原理を与えている．われわれは，この公理を知る以前には，既知の実数 a に対して「a が A の上限である（または，ない）」というのを証明することしかできなかった．

Weierstrass の公理を用いて中間値の定理を証明することができる．

定理（中間値の定理）$f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ を有界閉区間 $[a, b]$ 上で定義された連続関数とし，$f(a) < f(b)$ とする．そのとき，$f(a) < \gamma < f(b)$ ならば，$f(c) = \gamma$ となる $c \in [a, b]$ が存在する．

9.2 実数の完備性の言い換え

Weierstrass の公理 (R10) と同値な性質のいくつかを定理として紹介する．これから少しずつ慣れていくので，今日の時点では（特に定理 2 と定理 3 については）とりあえず見ておくだけでよい．

定理 1 上に有界な単調増加数列は収束する．

ここで，数列 (a_n) が「単調増加」とは「広義単調増加」$(a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots)$ のことと約束する．

定理 2（Bolzano–Weierstrass の定理） 任意の有界数列は収束する部分列を持つ．

ただし，数列 (a_n) の**部分列**というのは，狭義単調増加な自然数列 (n_k) から得られる $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ という形の数列のことである．もっと直観的に言えば，数列 (a_n) の項を間引いて得られるような数列のこと．

定理 3（Cauchy の収束条件，$\mathbb{R}$ の距離完備性）Cauchy 性を持つ任意の数列は収束する．

ここで数列 (a_n) が **Cauchy 性**を持つ（または **Cauchy 列**である）というのは次のことをいう：

> 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $N \in \mathbb{N}$ をうまく選ぶと，$n, m \geq N$ を満たすすべての $n, m \in \mathbb{N}$ に対して $|a_n - a_m| < \varepsilon$ が成り立つ．

論理記号で書けば

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N}\, \forall m \in \mathbb{N}\, (n \geq N \wedge m \geq N \to |a_n - a_m| < \varepsilon).$$

なお，Cauchy の収束条件は単独では「完備性の公理」としては不十分で，Archimedes の原理と組み合わせることにより Weierstrass の公理その他と同値になる．

予告

知識として仕入れるべきことは，以上で概ね終わりました．ここで一息入れ，第 10 回・第 11 回では「数学的な文章の書き方」について，これまでの内容を題材に考えてみることにします．

短時間で考えてもらうのに適切な問題が少なくなってきたので，小テストは来週以降は無しとします．代わりにレポート課題を 1 題出します（提出期限は 7/14 授業の冒頭．10 点満点として成績に反映）．詳しい要件は 6/30 に説明しますが，内容は「指数関数の構成（演習問題 8.4 にあるような関数の存在証明）」とします．

演習問題

9.1 $\mathbb{R}$ に関する性質のうち (R1) から (R9) までを用いて，次の問いに答えよ．
  (1) 零元の一意性を証明せよ．また，各々の $a \in \mathbb{R}$ に対し，$-a \in \mathbb{R}$ が一意的であることを証明せよ．
  (2) $(-a)b = -ab$ を証明せよ（$-ab$ とは $-(ab)$ のこととする）．また，$(-a)(-b) = ab$ を証明せよ．
  (3) $1 \geq 0$ を証明せよ．

9.2 次で定義される数列 (a_n) を考える：

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

数列 (a_n) が単調増加で，かつ任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $a_n < 3$ であることを証明せよ．（したがって定理 1 により数列 (a_n) は収束する．その極限を e と定義する．）［ヒント：二項定理を用いよ．］

9.3 Weierstrass の公理を用いて，中間値の定理を証明せよ．
［ヒント：授業で「$\sqrt{2}$ の存在」の証明をやる．それを参考にせよ．］