9.2 次で定義される数列 (a_n) を考える：

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

数列 (a_n) が単調増加で，かつ任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $a_n < 3$ であることを証明せよ．

［証明］まず数列 (a_n) が単調増加であることを示す（実際には以下のように，狭義単調増加であることがわかる）．a_n の定義式の右辺を二項定理により展開すると次が得られる（二項係数を $\binom{n}{k}$ と書く）：

$$\begin{aligned}
a_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot (n-k+1)}{k!} \cdot \frac{1}{n^k} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \cdots \cdot \frac{n-k+1}{n} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \cdot 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \cdots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \prod_{l=0}^{k-1} \left(1 - \frac{l}{n}\right). \qquad (*)
\end{aligned}$$

また，n を $n+1$ で置き換えて

$$a_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} \prod_{l=0}^{k-1} \left(1 - \frac{l}{n+1}\right).$$

したがって

$$a_{n+1} - a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \left[\prod_{l=0}^{k-1} \left(1 - \frac{l}{n+1}\right) - \prod_{l=0}^{k-1} \left(1 - \frac{l}{n}\right)\right] + \frac{1}{(n+1)!} \prod_{l=0}^{n} \left(1 - \frac{l}{n+1}\right).$$

右辺各項はすべて正なので，$a_{n+1} - a_n > 0$，つまり $a_n < a_{n+1}$ である．すなわち (a_n) は狭義単調増加であることがわかった．

次に任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $a_n < 3$ であることを示す．$n = 1$ のときは $a_1 = 2 < 3$ なので，以下では $n \geq 2$ とする．そのとき，再び $(*)$ を用いて

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \prod_{l=0}^{k-1} \left(1 - \frac{l}{n}\right) < 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}.$$

$k \geq 2$ に対し $1/k! \leq 1/2^{k-1}$ であることを用いて

$$a_n < 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 2 + \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) < 3$$

を得る．

コメント 問題文で注意したことをもう一度確認しておきます．この議論は新しい数 e を定義するためのものでした．「上に有界な単調増加数列は収束する」という定理（実数の完備性の一表現）があるので，それを適用するために，前提となる 2 つの仮定の成立を確かめたわけです．

第一の目的はそれだったので，大雑把に $a_n < 3$ という評価を与えたのですが，上の議論に少し工夫を加えるだけで，もっと精密な上からの評価も得られます．たとえば

$$a_n < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k!} < 2 + \frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{3! \cdot 4^{k-3}} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1 - 1/4} = 2 + \frac{13}{18} \, (= 2.722\cdots)$$

など（計算途中では $n \geq 5$ としましたが，(a_n) は単調増加ですから，結果的にはすべての n について正しい不等式です）．一方で下からの良い評価を得るのは大変ですけれど，コンピュータで計算すると $a_{74} = 2.7001\cdots$．これで e の小数第一位までの値が 2.7 であることがわかりました．

授業でも触れたとおり，実は $e = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ でもあります（これを $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ とも書く）．こちらのほうが収束がはるかに速い．

なお，もしかしたら初めてかもしれませんが，$\prod$ は積を表す記号です（π の大文字 Π を大きくした記号．π は product の頭文字 p に対応します）．使い方は $\sum$ と同様です（こちらは sum の頭文字 s に対応する σ（シグマ）の大文字 Σ を大きくしたわけです）．