数学の楽しみ 1D［第 9 回・演習問題の解答例（その 1)］

9.1 $\mathbb{R}$ に関する性質のうち (R1) から (R9) までを用いて，次の問いに答えよ．

(1) 零元の一意性を証明せよ．また，各々の $a \in \mathbb{R}$ に対し，$-a \in \mathbb{R}$ が一意的であることを証明せよ．

(2) $(-a)b = -ab$ を証明せよ（$-ab$ とは $-(ab)$ のこととする）．また，$(-a)(-b) = ab$ を証明せよ．

(3) $1 \geq 0$ を証明せよ．

［証明］

(1) 零元の一意性. 零元が 2 つあると仮定し，それらを $0_1, 0_2 \in \mathbb{R}$ とする．すると 0_1 が零元であることから $0_1+0_2 = 0_2$ だが，一方で 0_2 が零元であること（および加法の交換律）から $0_1+0_2 = 0_2+0_1 = 0_1$ でもある．ゆえに $0_1 = 0_2$.

$-a$ の一意性.「$-a$」の持つべき性質を満たす実数が 2 つあると仮定し，それらを $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ とする．つまり

$$a + b_1 = 0, \qquad a + b_2 = 0$$

ということである．すると，加法の結合律と交換律から $b_1 + (a + b_2) = b_2 + (a + b_1)$ であるが，左辺は $b_1 + 0$ すなわち b_1 に等しく，右辺は $b_2 + 0$ すなわち b_2 に等しい．ゆえに $b_1 = b_2$ である．

(2) $(-a)b = -ab$ であること．$-ab$ というのは，ab と足して 0 になるような実数のことだった．したがって，「$(-a)b$ が $-ab$ に等しい」とは，$ab + (-a)b = 0$ であることを意味する．これを証明すればよい．

分配律によって $ab + (-a)b = (a + (-a))b = 0 \cdot b$ である．ところで $0 \cdot b = (0 + 0)b = 0 \cdot b + 0 \cdot b$ だから，両辺に $-(0 \cdot b)$ を加えて $0 \cdot b = 0$ を得る．ゆえに $ab + (-a)b = 0$.

$(-a)(-b) = ab$ であること．前半で示したことを用いると，$(-a)(-b) = -a(-b) = -(-b)a = -(-ba) = -(-ab)$ である．ここで $c = -(-ab)$ とおくと，$-(-ab)$ の定義によって $(-ab) + c = 0$ であるが，一方で $-ab$ の定義から $(-ab) + ab = 0$ でもある．(1) の後半により $c = ab$. 以上で $(-a)(-b) = ab$ がわかった．

(3) プリントの (R6) により $1 \geq 0$ と $1 \leq 0$ の少なくとも一方は成り立つので，$1 \leq 0$ でないことを示すことにする．もし $1 \leq 0$ だとすると，(R8) より両辺に -1 を加えても順序は保たれるから，$0 \leq -1$ となる．したがって (R9) より $0 \leq (-1)(-1)$．ところで (2) の後半により $(-1)(-1) = 1 \cdot 1 = 1$ だから，$0 \leq 1$ となる．$0 \leq 1$ と $1 \leq 0$ の両方が成立したので (R6) により $0 = 1$ だが，これは (R5) に反する．

コメント 全順序体に関する基本的な性質の導出です．定義に挙げられている性質 (R1)–(R9) にはいかに無駄がないか，贅肉がそぎ落とされているかということを感じ取ってください．

なお，わかりやすさの観点からそうしたのですが，(3) の解答例の議論には少し無駄があるので注意を付け加えておきます．まず「$1 \geq 0$ と $1 \leq 0$ の少なくとも一方は成り立つ」ということを指摘し，$1 \leq 0$ を仮定すると矛盾が生じることを示すことにしたのですが，その途中で，$1 \leq 0$ という仮定のもとで「$0 \leq 1$」が証明されています．ですから（わざわざ「矛盾」と言わなくても）いずれにしても $1 \geq 0$ が成り立つわけなので，それで証明終わりということにしても問題ありません．(R5) を利用する必要は，本当はありません．

9.3 Weierstrass の公理を用いて，中間値の定理を証明せよ．

［証明］まず証明することを確認しておく．$f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ を連続関数とし，$f(a) < f(b)$ と仮定する．そのとき，示すべきことは，$f(a) < \gamma < f(b)$ を満たす $\gamma \in \mathbb{R}$ に対し，$f(c) = \gamma$ となるような $c \in [a, b]$ の存在である．

$[a, b]$ の部分集合 A を次のように定義する：

$$A = \{\, x \in [a, b] \mid f(x) < \gamma \,\}.$$

Weierstrass の公理によって A は上限を持つ．なぜなら，$a \in A$ だから $A \neq \emptyset$ であるし，また A は $\mathbb{R}$ において上に有界だからである．そこで $c = \sup A$ とおく．われわれは $f(c) = \gamma$ となることを証明するのだが，それを，$f(c) < \gamma$ でも $f(c) > \gamma$ でもないことを示すことによって行う．

$\underline{f(c) > \gamma \text{ でないこと}}$．$f(c) > \gamma$ と仮定する．そのとき，まず $c = a$ ではなく，よって $a < c$ であることに注意しておく．f の $x = c$ における連続性から，$\varepsilon = f(c) - \gamma\ (> 0)$ としたとき，$\delta > 0$ をうまく選ぶと，$|x - c| < \delta$ を満たす任意の $x \in [a, b]$ について $|f(x) - f(c)| < \varepsilon = f(c) - \gamma$ が成り立つ．特に，$a < c' < c$ なる c' を $|c - c'| < \delta$ となるようにとれば，どの $x \in [c', c]$ についても $|f(x) - f(c)| < f(c) - \gamma$ である．ところで $f(c) > \gamma$ と $|f(x) - f(c)| < f(c) - \gamma$ から $f(x) > \gamma$ がわかるので，どの $x \in [c', c]$ についても $x \notin A$ である．このことと c が A の上界であることにより，c' も A の上界とわかる．しかしこれは c が A の上限，すなわち最小の上界であることに反する．

$\underline{f(c) < \gamma \text{ でないこと}}$．$f(c) < \gamma$ と仮定する．そのとき，$c = b$ ではないから $c < b$ である．f の $x = c$ における連続性から，$\varepsilon = \gamma - f(c)\ (> 0)$ としたとき，$\delta > 0$ をうまく選ぶと，$|x - c| < \delta$ を満たす任意の $x \in [a, b]$ について $|f(x) - f(c)| < \varepsilon = \gamma - f(c)$ が成り立つ．特に，$c < c'' < b$ なる c'' を $|c'' - c| < \delta$ となるようにとれば，$|f(c'') - f(c)| < \gamma - f(c)$ である．これと $f(c) < \gamma$ より $f(c'') < \gamma$ がわかるので，$c'' \in A$ である．ところが $c < c''$ なのだから，これは c が A の上界であることに反する．

コメント 本格的な「存在証明」の一例でした．授業でやった「$\sqrt{2}$ の存在」と同じだということを納得してもらえればと思います．（もちろん，上に書いた証明とまったく同じでなければならないということはありません．いろいろバリエーションは考えられます．）

実数の完備性の概念は，初めは取っつきづらいと思いますが，ぜひ十分に時間をかけて慣れてください．きっと仲良くなってくれるはずです．