関数の連続性

8.1 関数の極限と連続性

「関数の極限」にはいろいろな状況がある．

$$\boxed{} \quad \text{のとき} \quad \boxed{}$$

↑		↑
$x \to a$		$f(x) \to b$
$x \to \pm\infty$		$f(x) \to \pm\infty$
$x \to a$（ただし $x > a$），$x \to a$（ただし $x < a$）		

最も基本的なものは「$x \to a$ のとき $f(x) \to b$」であって，それは次のように定義される．

定義 $f\colon I \to \mathbb{R}$ を a を含む開区間 I で定義された関数とする．x が a に近づくとき $f(x)$ が b に**収束するとは**

$$\forall\varepsilon > 0\, \exists\delta > 0\, \forall x \in I\, (0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - b| < \varepsilon)$$

が成り立つことをいう．このときもちろん $\lim_{x\to a} f(x) = b$ と書く．

他は次のように定義する．（網羅的にはやらないので，勘所をつかんでください．）

- 「$x \to +\infty$ のとき $f(x) \to b$」（x が正の無限大に向かうとき $f(x)$ が b に収束する）：
$$\forall\varepsilon > 0\, \exists x_0 \in \mathbb{R}\, \forall x \in I\, (x > x_0 \to |f(x) - b| < \varepsilon).$$
- 「$x \to a$（ただし $x > a$） のとき $f(x) \to b$」（x が右から a に近づくとき $f(x)$ が b に収束する）：
$$\forall\varepsilon > 0\, \exists\delta > 0\, \forall x \in I\, (0 < x - a < \delta \to |f(x) - b| < \varepsilon).$$
- 「$x \to a$ のとき $f(x) \to +\infty$」（x が a に近づくとき $f(x)$ が正の無限大に発散する）：
$$\forall y_0 \in \mathbb{R}\, \exists\delta > 0\, \forall x \in I\, (0 < |x - a| < \delta \to f(x) > y_0).$$

定義 開区間 $I \subset \mathbb{R}$ 上で定義された関数 $f\colon I \to \mathbb{R}$ が $a \in I$ において**連続**であるとは，

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

であることをいう．f が I の各点で連続であるとき，単に f は（I 上で）**連続**であるという．

多変数ベクトル値関数 f についても，$\lim_{x\to a} f(x) = b$ であることの定義，および連続性の定義は同様．
なお，関数 $f\colon I \to \mathbb{R}$ が $a \in I$ において連続であることは，次と同値である：

$$\forall\varepsilon > 0\, \exists\delta > 0\, \forall x \in I\, (|x - a| < \delta \to |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

8.2 数列の極限との関係

定理 1 開区間 $I \subset \mathbb{R}$ 上で定義された関数 $f\colon I \to \mathbb{R}$ が $a \in I$ において連続であることは，「a に収束する任意の数列 (a_n) に対して，数列 $(f(a_n))$ が $f(a)$ に収束する」ということと同値である．

これもまた，多変数ベクトル値関数 f についても，数列を点列に置き換えれば同じである．

演習問題

8.1 次の関数が連続であることを証明せよ．

(1) $f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N})$

(2) $f(x) = \sqrt{x}$（区間 $(0, \infty)$ 上で）

［なお，

$$\lim_{x \to 0,\, x > 0} f(x) = f(0)$$

も成り立つ（証明せよ）．このことも含めて，「$f(x) = \sqrt{x}$ は区間 $[0, \infty)$ 上で連続である」という言い方をする．］

8.2 $I,\ J \subset \mathbb{R}$ を開区間とし，$f\colon I \to \mathbb{R}$, $g\colon J \to \mathbb{R}$ を連続関数とする．さらに，f の値域 $R(f) = \{\, f(x) \mid x \in I \,\}$ は J に部分集合として含まれると仮定する．そのとき合成関数 $h\colon I \to \mathbb{R}$, $h(x) = g(f(x))$ が定義されるが，これもまた連続であることを証明せよ．

8.3 関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

で定義する．

(1) f が $x = 0$ で連続であることを証明せよ．

(2) $a \neq 0$ に対し，f が $x = a$ で連続でないことを証明せよ．

［ヒント：$\mathbb{Q}$ は $\mathbb{R}$ で稠密なのであった．また $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ も $\mathbb{R}$ で稠密である（証明せよ）．これらの事実を用いよ．］

8.4（指数関数 $f(x) = a^x$ の特徴付け）

$a > 0$ とする．関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は連続で，$f(1) = a$ を満たし，さらに次の性質を持つものと仮定する：

$$f(x + y) = f(x)f(y) \qquad (\text{任意の } x,\, y \in \mathbb{R} \text{ について}).$$

(1) $f(0) = 1$ を示せ．また任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し $f(x) > 0$ であることを示せ．

(2) 任意の $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ に対し

$$f(m/n) = (\sqrt[n]{a}\,)^m$$

であることを示せ．（なお，a の正の n 乗根 $\sqrt[n]{a}$ の存在と一意性は自明ではないが，それはここでは問題としない．）——これで $x \in \mathbb{Q}$ に対する $f(x)$ の値が決まったことになる．

(3) さらに連続性を用いて，上述のような f は（存在するとすれば）一意的であることを証明せよ．

8.5* $\mathbb{R}^n$ の部分集合 A が**開集合**であるとは，任意の $a \in A$ に対し，ある $\varepsilon > 0$ を選ぶと，a の ε 近傍 $\{\, x \in \mathbb{R}^n \mid |x - a| < \varepsilon \,\}$ が A に部分集合として含まれていることをいう．（多変数ベクトル値）関数 $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ が連続であるためには，次の条件が必要十分であることを証明せよ：$\mathbb{R}^n$ の任意の開集合 A に対して，その逆像

$$f^{-1}(A) = \{\, x \in \mathbb{R}^m \mid f(x) \in A \,\}$$

は $\mathbb{R}^m$ の開集合である．

［この考え方は，一般の「位相空間」における連続写像の定義につながる．］