8.1 次の関数が連続であることを証明せよ．

(1) $f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N})$

(2) $f(x) = \sqrt{x}$（区間 $(0, \infty)$ 上で）

［証明］

(1) $a \in \mathbb{R}$ を任意にとり，f が a において連続であることを証明する．そのためには，任意に与えられた $\varepsilon > 0$ に対し，うまく $\delta > 0$ を選び，任意の $x \in \mathbb{R}$ について，もし $|x-a| < \delta$ ならば $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$ となるようにできればよい．

$$|f(x) - f(a)| = |x^n - a^n| = \left| \sum_{i=1}^{n} x^{n-i} a^{i-1} \right| \cdot |x - a|$$

であるが，まず $|x - a| < 1$ と仮定すると $|x| < |a| + 1$ なので

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^{n} x^{n-i} a^{i-1} \right| &\leq \sum_{i=1}^{n} |x|^{n-i} |a|^{i-1} \leq \sum_{i=1}^{n} (|a| + 1)^{n-i} |a|^{i-1} \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} (|a| + 1)^{n-i} (|a| + 1)^{i-1} = n(|a| + 1)^{n-1} \end{aligned}$$

である．そこでさらに $|x - a| < \varepsilon/n(|a| + 1)^{n-1}$ と仮定すれば

$$|f(x) - f(a)| < n(|a| + 1)^{n-1} \cdot \frac{\varepsilon}{n(|a| + 1)^{n-1}} = \varepsilon.$$

ゆえに $\delta = \min\{1, \varepsilon/n(|a| + 1)^{n-1}\}$ と定めればよい．

(2) $a \in (0, \infty)$ を任意にとり，f が a において連続であることを証明する．そのためには，任意に与えられた $\varepsilon > 0$ に対し，うまく $\delta > 0$ を選び，任意の $x \in (0, \infty)$ について，もし $|x - a| < \delta$ ならば $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ となるようにできればよい．

$$|f(x) - f(a)| = |\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \cdot |x - a| \leq \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot |x - a|$$

だから，$|x - a| < \sqrt{a}\,\varepsilon$ と仮定すれば

$$|f(x) - f(a)| < \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \sqrt{a}\,\varepsilon = \varepsilon.$$

ゆえに $\delta = \sqrt{a}\,\varepsilon$ と定めればよい．

コメント 関数の連続性の定義の確認でした．

なお，(2) において $\lim_{x \to 0,\, x > 0} f(x) = f(0)$ であることの証明も念のためやっておきます．示すべきことは，任意に与えられた $\varepsilon > 0$ に対し，うまく $\delta > 0$ を選ぶと，任意の $x \in [0, \infty)$ について，もし $0 < x - 0 < \delta$ ならば $|f(x) - f(0)| < \varepsilon$ となるようにできるということです．$|f(x) - f(0)| = \sqrt{x} \leq x$ ですから，$\delta = \varepsilon$ と定めればそうなります．

8.2 I, $J \subset \mathbb{R}$ を開区間とし，$f\colon I \to \mathbb{R}$, $g\colon J \to \mathbb{R}$ を連続関数とする．さらに，f の値域 $R(f) = \{ f(x) \mid x \in I \}$ は J に部分集合として含まれると仮定する．そのとき合成関数 $h\colon I \to \mathbb{R}$, $h(x) = g(f(x))$ が定義されるが，これもまた連続であることを証明せよ．

［証明］$a \in I$ を任意にとる．任意に与えられた $\varepsilon > 0$ に対し，うまく $\delta > 0$ を選ぶことで，任意の $x \in I$ について，もし $|x - a| < \delta$ ならば $|h(x) - h(a)| < \varepsilon$ となるようにできればよい．

まず関数 g の点 $f(a)$ における連続性から，ある $\delta_1 > 0$ をとると，任意の $y \in J$ について，$|y - f(a)| < \delta_1$ ならば $|g(y) - g(f(a))| < \varepsilon$ となる．次に関数 f の点 a における連続性から，ある $\delta_2 > 0$ をとると，任意の $x \in I$ について，$|x - a| < \delta_2$ ならば $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ となる．これらを組み合わせると，任意の $x \in I$ について，$|x - a| < \delta_2$ ならば $|g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon$ となることがわかる．ゆえに $\delta = \delta_2$ とすればよい．

コメント 「連続関数の合成は再び連続である」という，連続性の持つ非常に重要な性質です．詳細は省きますが，数列を使った方法（プリントの定理 1 を使った方法）でも素直に証明することができます．

8.3 関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

で定義する．

(1) f が $x = 0$ で連続であることを証明せよ．

(2) $a \neq 0$ に対し，f が $x = a$ で連続でないことを証明せよ．

［証明］

(1) 任意に $\varepsilon > 0$ をとる．そのとき，ある $\delta > 0$ をとると，任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し，もし $|x - 0| < \delta$ ならば $|f(x) - f(0)| < \varepsilon$ となるようにできればよい．

$$|f(x) - f(0)| = \begin{cases} |x|, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

なので，いずれにしても $|f(x) - f(0)| \leq |x|$ である．したがって $\delta = \varepsilon$ とすればよい．

(2) 本題に入る前に，無理数全体の集合 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ が $\mathbb{R}$ で稠密であること，すなわち任意の $a \in \mathbb{R}$ と $\varepsilon > 0$ に対して，$|a - x| < \varepsilon$ を満たす無理数 x が存在することを示しておく．そのために，無理数をひとつとって α とする（たとえば $\alpha = \sqrt{2}$ とすればよい）．有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ が $\mathbb{R}$ で稠密であることを用いると，$|(a + \alpha) - x_1| < \varepsilon$ を満たす $x_1 \in \mathbb{Q}$ が存在することがわかる．そこで $x = x_1 - \alpha$ とおけば，これは無理数であって，しかも $|a - x| < \varepsilon$ が成り立つ．

さてそれでは，$a \neq 0$ に対し f が $x = a$ で連続でないことを証明する．示すべきことは次のことである：ある $\varepsilon > 0$ をうまく選ぶことにより，どんな $\delta > 0$ をとっても，$|x - a| < \delta$ かつ $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$ であるような $x \in \mathbb{R}$ が存在するようにできる．$a \in \mathbb{Q}$ か $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ かによって場合分けをする．

まず $a \in \mathbb{Q}$ とする．このとき $\varepsilon = |a|$ (> 0) とおく．するとどんな $\delta > 0$ をとっても，$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ が $\mathbb{R}$ で稠密であることによって，$|x - a| < \delta$ を満たす $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ が存在する．この x に対して

$$|f(x) - f(a)| = |0 - a| = |a| \geq \varepsilon$$

が成り立つ．

次に $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ とする．このときは $\varepsilon = |a|/2$ とおく．するとどんな $\delta > 0$ をとっても，今度は $\mathbb{Q}$ が $\mathbb{R}$ で稠密であることによって，$|x - a| < \delta$ を満たす $x \in \mathbb{Q}$ が存在する．必要ならば x を取り直すことにより，さらに $|x - a| < |a|/2$ とすることができる．この x に対して

$$|f(x) - f(a)| = |x - 0| = |x| > |a| - \frac{|a|}{2} = \frac{|a|}{2} = \varepsilon$$

が成り立つ．

以上で，いずれにしても f が $x = a$ で連続でないことがわかった．

コメント (2) では，関数がある点で「連続でない」ということの証明を体験してもらいました．「連続である」ということの否定を正しく作ることはできたでしょうか．

(1) では問題 8.1 と同様に「連続である」のほうを証明したのですが，この事実は直観的にはややわかりづらいのではないかと思います．それはおそらく，「グラフが $x = 0$ でつながっている」という感じがしないか

らでしょう．ある区間における連続性はともかくとして，1 点における関数の連続性の概念は，「グラフがつながっている」というイメージとは必ずしも近くないのだということを，この問題を通じて感じとってください．

8.4 $a > 0$ とする．関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は連続で，$f(1) = a$ を満たし，さらに次の性質を持つものと仮定する：

$$f(x+y) = f(x)f(y) \qquad (\text{任意の } x, y \in \mathbb{R} \text{ について}).$$

(1) $f(0) = 1$ を示せ．また任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し $f(x) > 0$ であることを示せ．

(2) 任意の $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ に対し

$$f(m/n) = (\sqrt[n]{a}\,)^m$$

であることを示せ．

(3) さらに連続性を用いて，上述のような f は（存在するとすれば）一意的であることを証明せよ．

［証明］以下，$f(x+y) = f(x)f(y)$ という性質を $(*)$ として引用する．

(1) $(*)$ によって $f(1) = f(0)f(1)$ である．$f(1) = a \neq 0$ であることから，両辺を $f(1)$ で割って $f(0) = 1$.

再び $(*)$ によって $f(x) = f(x/2)^2$ である．したがって $f(x) \geq 0$．さらに，もしある $x \in \mathbb{R}$ について $f(x) = 0$ であるとすれば，$f(x/2) = 0$ であり，数学的帰納法によって任意の $n \in \mathbb{N}$ について $f(x/2^n) = 0$ である．ところが数列 $(x/2^n)$ は 0 に収束するから，f の連続性とプリントの定理 1 によって $f(0) = \lim_{n\to\infty} f(x/2^n) = 0$ でなければならない．これは前の段落で証明したことに矛盾する．ゆえに，任意の $x \in \mathbb{R}$ について $f(x) > 0$ である．

(2) まず，任意の $m \in \mathbb{Z}$ について

$$f(m) = a^m$$

であることを示す．$m > 0$ のときは，$(*)$ より $f(m) = f(1)f(m-1) = af(m-1)$ だから，数学的帰納法によって $f(m) = a^m$ である．$m = 0$ の場合は，$f(m) = a^m$ とは $f(0) = 1$ ということであって，これはすでに確かめた．最後に $m < 0$ のときは，$-m > 0$ だから，$f(-m) = a^{-m}$ であることはすでにわかっている．また $(*)$ より

$$1 = f(0) = f(m)f(-m)$$

だから，やはり $f(m) = a^m$ が得られる．

これを用いて問題の式を示す．性質 $(*)$ から，再び数学的帰納法によって $f(m) = f(m/n)^n$ が得られる．このことと $f(m) = a^m$，$f(m/n) > 0$ によって

$$f(m/n) = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a}\,)^m$$

である．

(3) 有理数に対する f の値は (2) で一通りに確定してしまった．そこで x を無理数とする．そのとき，$\mathbb{Q}$ は $\mathbb{R}$ で稠密だから，x に収束するような有理数列 (x_n) が存在する（各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，$|x - x_n| < 1/n$ となるような $x_n \in \mathbb{Q}$ をとればよい）．すると f の連続性とプリントの定理 1 から

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$$

でなければならない．数列の極限はただ一通りに定まる（同じ数列が異なる 2 つの数に収束することはない）から，$f(x)$ の値もただ一通りであることがわかる．

コメント まずひとつお詫びをしておきます．(1) の「任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し $f(x) > 0$ であることを示せ」というのは (2) のための準備として入れたんですが，実際にはここまでのことは必要なく，「任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し $f(x) \geq 0$ であることを示せ」だけでも十分でした．問題の難度が不必要な形で少々上がってしまいました．ごめんなさい．

さて，もちろん，指数関数 $f(x)=a^x$ はこの問題に述べた性質を持ちます．そして (3) により，逆に「f がこれらの性質を満たす」ということから $f(x)=a^x$ が結論されることがわかりました．そのことを指して，指数関数 $f(x)=a^x$ はこれらの性質によって**特徴付けられる**という言い方をすることがあります．

なお，(3) の問題文には注意深く「存在するとすれば」という但し書きが付けてあります．この授業の立場としては，指数関数 $f(x)=a^x$ はまだ定義されていません——というのは，そのためには実数の完備性が必要になるからです．第 11 回に指数関数の定義を扱うつもりです．

ちなみに，連続性の要請を外すと，それ以外の性質を満たすような関数 f は指数関数以外にも存在します．そのことは，$\mathbb{R}$ に $\mathbb{Q}$ ベクトル空間としての基底が存在する（Hamel 基底と呼ばれます）ことを利用して証明されます．