数列の極限

7.1 数列の極限

(a_n) を実数列とする．（以下単に「数列」と書く．n の動く範囲を明示するときは $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ などとする．）

注意 この授業では，数列を表すのに丸括弧を使う．$\{a_n\}$ と書くと集合 $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ と紛らわしいからである．

定義

(1) 数列 (a_n) が実数 $a \in \mathbb{R}$ に**収束する**とは，次が成り立つことをいう：

任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある $N \in \mathbb{N}$ をうまく選ぶと，$n \geq N$ を満たすすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $|a_n - a| < \varepsilon$ が成り立つ．

論理記号で書けば次のとおり：

$$\forall\varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N}\, (n \geq N \to |a_n - a| < \varepsilon).$$

またこのとき，$a \in \mathbb{R}$ を実数列 (a_n) の**極限**といい，$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ とか $a_n \to a\ (n \to \infty)$ と書く．ある実数 $a \in \mathbb{R}$ に収束するような数列は単に**収束する**といい，収束しない数列は**発散する**という．

(2) 数列 (a_n) が**正の無限大に発散する**とは，次が成り立つことをいう（「正の無限大に収束する」ではないので注意）：

任意の $M > 0$ に対し，ある $N \in \mathbb{N}$ をうまく選ぶと，$n \geq N$ を満たすすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n > M$ が成り立つ．

論理記号で書くと

$$\forall M > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N}\, (n \geq N \to a_n > M).$$

また，数列 $(-a_n)$ が正の無限大に発散するとき，(a_n) は**負の無限大に発散する**という．（もちろん，正負どちらの無限大にも発散しないような発散数列もたくさん存在する．）

高校で学んだ数列の極限に関する基本的性質には次のようなものがあった．これらは，上で与えた定義に基づいて証明されるべきものである．授業では一部しか証明しないので，なるべく各自で確認しておくこと．

- スカラー倍と極限との関係，四則演算と極限との関係（和と差の極限，積の極限，商の極限）
- 定数 $r > 0$ に対する r^n の極限
- はさみうちの原理

次の補題は，たとえば“積の極限”を証明するときなどに大切な役割を果たす．

補題 収束する数列 (a_n) は有界である．

ただし，数列 (a_n) が**有界**であるとは，集合 $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ が有界であることを指す．つまり，「任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $|a_n| \leq M$」となる $M > 0$ が存在するということ（これは問題 6.3 における定義と同値）．

7.2 点列の極限

(a_n) が $\mathbb{R}^m$ $(m \geq 2)$ の点列であるときも，それが $a \in \mathbb{R}^m$ に**収束する**ことは，上述の数列の極限とまったく同じように定義される．ただし，$|a_n - a|$ を $a_n - a \in \mathbb{R}^m$ のベクトルとしての長さと解釈する．言い換えれば，$\mathbb{R}^m$ における a_n と a の間の Euclid 距離である．

点列については，「正の（または負の）無限大に発散する」という概念はない．

演習問題

7.1 次で定義される数列 (a_n) はいずれもある $a \in \mathbb{R}$ に収束する．極限 a を答え，(a_n) が実際に a に収束することを，数列の収束の定義に基づいて証明せよ．また，$\varepsilon = 1/10, 1/100, 1/1000$ のそれぞれについて，数列の収束の定義に現れる N として選ぶことのできる最小の自然数を挙げよ．

(1) $a_n = 1/n^2$

(2) $a_n = 1/\log_2 n$

(3) $a_n = n/(2n+1)$

7.2 数列 (a_n) が $a \in \mathbb{R}$ に収束しているとする．

(1) すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $L \leq a_n \leq M$ ならば（ただし $L, M \in \mathbb{R}$），$L \leq a \leq M$ であることを証明せよ．

(2) すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $L < a_n < M$ だとしても，$L < a < M$ とは限らない．このことを例を挙げて説明せよ．

7.3 数列 $(a_n), (b_n)$ がそれぞれ $a, b \in \mathbb{R}$ に収束しているとする．そのとき次を証明せよ．

(1) $c \in \mathbb{R}$ に対し $\lim_{n\to\infty} ca_n = ca$.

(2) $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$（複号同順）.

7.4 (1) 数列 (a_n) が発散するとはどういうことか，定義に基づいて説明せよ．論理記号を用いてもよい．

(2) 数列 (a_n) が正の無限大に発散するとする．そのとき，(a_n) は発散することを証明せよ．
［字面だけ追うとあたりまえのようにも見えるが，そうではない．定義に基づいて考えること．］

7.5* “商の極限” について反省してみよう．

> **定理**　数列 $(a_n), (b_n)$ がそれぞれ $a, b \in \mathbb{R}$ に収束しているとする．さらに $b \neq 0$ と仮定する．そのとき
> $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$$
> が成り立つ．

ここで「$b \neq 0$」という仮定は右辺 a/b が定義されるために必要なものである．そうすると，次の疑問も自然に生じるのではないだろうか：

「a_n/b_n が定義されるようにするために，この定理には『すべての $n \in \mathbb{N}$ について $b_n \neq 0$』という仮定も付け加える必要があるのではないか？」

あなたはこの疑問にどのように答えるか．