数学の楽しみ 1D［第 7 回・演習問題の解答例］

7.1 次で定義される数列 (a_n) はいずれもある $a \in \mathbb{R}$ に収束する．極限 a を答え，(a_n) が実際に a に収束することを，数列の収束の定義に基づいて証明せよ．また，$\varepsilon = 1/10, 1/100, 1/1000$ のそれぞれについて，数列の収束の定義に現れる N として選ぶことのできる最小の自然数を挙げよ．

(1) $a_n = 1/n^2$

(2) $a_n = 1/\log_2 n$

(3) $a_n = n/(2n+1)$

［解］

(1) 極限は 0 である．

（証明）任意に与えられた $\varepsilon > 0$ に対して，

$$n \geq N \quad \Rightarrow \quad |a_n - 0| = \frac{1}{n^2} < \varepsilon$$

となるように $N \in \mathbb{N}$ を選ぶことができればよい．$1/n^2$ は n について単調減少だから，$1/N^2 < \varepsilon$ となっていればよい．そして $1/N^2 < \varepsilon \Leftrightarrow N > \sqrt{1/\varepsilon}$ だから，Archimedes の原理によってそのような $N \in \mathbb{N}$ は存在する．

$\varepsilon = 1/10, 1/100, 1/1000$ に対して，最小の N はそれぞれ $N = 4, 11, 32$．（実際にこれらが最小の N であることは各自確認せよ．）

(2) 極限は 0 である．

（証明）任意に与えられた $\varepsilon > 0$ に対して，

$$n \geq N \quad \Rightarrow \quad |a_n - 0| = \frac{1}{\log_2 n} < \varepsilon$$

となるように $N \in \mathbb{N}$ を選ぶことができればよい．$1/\log_2 n$ は n について単調減少だから，$1/\log_2 N < \varepsilon$ となっていればよい．そして $1/\log_2 N < \varepsilon \Leftrightarrow N > 2^{1/\varepsilon}$ だから，Archimedes の原理によってそのような $N \in \mathbb{N}$ は存在する．

$\varepsilon = 1/10, 1/100, 1/1000$ に対して，最小の N はそれぞれ $N = 2^{10}+1, 2^{100}+1, 2^{1000}+1$．

(3) 極限は $1/2$ である．

（証明）任意に与えられた $\varepsilon > 0$ に対して，

$$n \geq N \quad \Rightarrow \quad \left| a_n - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2(2n+1)} < \varepsilon$$

となるように $N \in \mathbb{N}$ を選ぶことができればよい．ところで

$$\frac{1}{2(2n+1)} < \frac{1}{4n}$$

だから，$n \geq N$ のとき $1/4n < \varepsilon$ であれば十分であって，さらに $1/4n$ は n について単調減少だから，$1/4N < \varepsilon$ となっていればよい．$1/4N < \varepsilon \Leftrightarrow N > 1/4\varepsilon$ なので，Archimedes の原理によってそのような $N \in \mathbb{N}$ は存在する．

$\varepsilon = 1/10, 1/100, 1/1000$ に対して，最小の N はそれぞれ $N = 3, 25, 250$．（$1/4N < \varepsilon$ となる最小の N はそれぞれ $N = 3, 26, 251$ だが，「$1/4N < \varepsilon$」というのは N に対して過剰な要求をしていることに注意．）

コメント 数列の収束の定義の確認でした．

(1), (2) と比べて，(3) だけ少し違う議論の仕方をしたことにも注意してください．「$n \geq N$ のとき $1/2(2n+1) < \varepsilon$」という目標を直接扱うのではなく，「$n \geq N$ のとき $1/4n < \varepsilon$」にすり替えています．このすり替えはどうしても必要というわけではありませんが，本質的でない複雑な計算を避けるためにやっています．

7.2 数列 (a_n) が $a \in \mathbb{R}$ に収束しているとする．

(1) すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $L \leq a_n \leq M$ ならば（ただし $L, M \in \mathbb{R}$），$L \leq a \leq M$ であることを証明せよ．

(2) すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $L < a_n < M$ だとしても，$L < a < M$ とは限らない．このことを例を挙げて説明せよ．

［解］

(1) $a < L$ や $M < a$ ではあり得ないことを示せばよい．どちらについても同様に議論できるので，$a < L$ でないことだけを証明する．

仮に $a < L$ であるとする．するとまず，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，$L \leq a_n \leq M$ より

$$|a_n - a| \geq L - a \quad (> 0)$$

であることに注意しよう．$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ なのだから，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある番号 $N \in \mathbb{N}$ 以降のすべての n について $|a_n - a| < \varepsilon$ でないとならないはずなのだが，いま指摘したことは，$\varepsilon = L - a$ のときは $|a_n - a| < \varepsilon$ となる n がまったく存在しないことを意味する．これは矛盾だから，われわれの仮定 $a < L$ は正しくない．

(2) たとえば $a_n = 1/n$ を考えればよい. すべての $n \in \mathbb{N}$ について $0 < a_n < 2$ だが, 極限 $a = \lim_{n\to\infty} a_n = 0$ は $0 < a < 2$ を満たさない.

コメント ここで示したことを，閉区間 $[L, M]$ は極限について「閉じて」おり，開区間 (L, M) は「閉じていない」，と言い表すこともあります．――では半開区間 $(L, M]$, $[L, M)$ はどうでしょうか.

7.3 数列 (a_n), (b_n) がそれぞれ $a, b \in \mathbb{R}$ に収束しているとする．そのとき次を証明せよ．

(1) $c \in \mathbb{R}$ に対し $\lim_{n\to\infty} ca_n = ca$.

(2) $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$（複号同順）.

［証明］

(1) 任意に与えられた $\varepsilon > 0$ に対して，

$$n \geq N \quad \Rightarrow \quad |ca_n - ca| < \varepsilon$$

となるように $N \in \mathbb{N}$ を選ぶことができればよい．$c = 0$ のときは $|ca_n - ca|$ は常に 0 だからどのように N をとっても大丈夫なので，以下では $c \neq 0$ とする．$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ という仮定から，すべての $n \geq N$ に対し $|a_n - a| < \varepsilon/|c|$ となるように $N \in \mathbb{N}$ を選ぶことができる．この N に対して，$n \geq N$ であれば

$$|ca_n - ca| = |c||a_n - a| < |c| \cdot \frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon$$

となる．これで $\lim_{n\to\infty} ca_n = ca$ が示された.

(2) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$ がわかったとすると, (1) より $\lim_{n\to\infty}(-b_n) = -b$ でもあるから，$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b$ も従う．だから $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$ だけを証明する.

任意に与えられた $\varepsilon > 0$ に対して，

$$n \geq N \quad \Rightarrow \quad |(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon$$

となるように $N \in \mathbb{N}$ を選ぶことができればよい．三角不等式によって

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b|$$

である．$\lim_{n\to\infty} a_n = a$，$\lim_{n\to\infty} b_n = b$ という仮定から，すべての $n \geq N$ に対し $|a_n - a| < \varepsilon/2$，$|b_n - b| < \varepsilon/2$ となるように $N \in \mathbb{N}$ を選ぶことができる．この N に対して，$n \geq N$ であれば

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

となる．これで $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$ が示された．

コメント 一般的な主張の証明なので問題 7.1 より難しく感じられるかもしれませんが，全体の形は同じであるということを実感してください．(1) の証明の第一文（「選ぶことができればよい」まで）は，問題 7.1 (1) の証明の第一文と形式的には何も変わりません．

(1) と (2) を比べると，(2) は $|(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon$ という目標を $|a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon$ に「すり替えている」分だけ複雑になっていると言えそうです．しかしこれも問題 7.1 (3) の「すり替え」と同じことであって，さほど目新しいわけでもありません．

7.4 (1) 数列 (a_n) が発散するとはどういうことか，定義に基づいて説明せよ．論理記号を用いてもよい．

(2) 数列 (a_n) が正の無限大に発散するとする．そのとき，(a_n) は発散することを証明せよ．

［証明］

(1) 数列 (a_n) が「収束する」というのは，「(a_n) が a に収束するような $a \in \mathbb{R}$ が存在する」ということだから，論理記号で書くと次のようになる：

$$\exists a \in \mathbb{R}\, \forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N}\, (n \geq N \to |a_n - a| < \varepsilon).$$

数列 (a_n) が「発散する」というのは「収束しない」ということだったので，論理記号で書けば

$$\forall a \in \mathbb{R}\, \exists \varepsilon > 0\, \forall N \in \mathbb{N}\, \exists n \in \mathbb{N}\, (n \geq N \land |a_n - a| \geq \varepsilon)$$

である．通常の言葉で書くと，たとえば

任意の $a \in \mathbb{R}$ について，ある $\varepsilon > 0$ をうまく選ぶと，どんな $N \in \mathbb{N}$ に対しても，$n \geq N$ にもかかわらず $|a_n - a| \geq \varepsilon$ となるような $n \in \mathbb{N}$ が存在する

となる．（「にもかかわらず」という部分は論理的には「かつ」でいいのだが，多少気持ちを込めた．）

(2) (a_n) を正の無限大に発散する数列として，(1) の命題が成り立つことを証明する．

任意に $a \in \mathbb{R}$ をとる．$\varepsilon > 0$ としてわれわれは $\varepsilon = 100$ を選ぶ（実は何でもよい）．数列 (a_n) が正の無限大に発散することから，

$$n \geq N_1 \quad \Rightarrow \quad a_n > |a| + 100 \tag{$*$}$$

となるように $N_1 \in \mathbb{N}$ を選ぶことができる（「正の無限大に発散する」ということの定義において $M = |a| + 100$ としたのである）．すると，どんな $N \in \mathbb{N}$ が与えられたとしても，$n = \max\{N, N_1\}$ とおけば

$$|a_n - a| \geq |a_n| - |a| = a_n - |a| > 100 = \varepsilon$$

となる（初めの不等号は三角不等式から従う．その次の等号で用いたのは $|a_n| = a_n$ という事実だが，これは $(*)$ から特に $a_n > 0$ なので正しい）．これで (1) の命題の成立が示された．

コメント 「総合演習」的な性格の問題として出しました．

- 言葉に惑わされず，定義に従って落ち着いて考えること
- 必要なら論理記号を用いるなどして状況を整理すること

を確認してください．