数学における論理 (3)——実践練習：Archimedes の原理とその応用

6.1 Archimedes の原理

次の定理を **Archimedes の原理**という．

定理 1 任意の実数に対し，それより大きな自然数が存在する．

この命題は「自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ は上に有界ではない」と言い換えることもできる（問題 5.4 でやった）．

Archimedes の原理は，実数の完備性の公理から証明される深い事実である（あるいは実数の完備性の公理そのものの一部とも考えられる）．この点についての議論は後でやることにして，今回は，Archimedes の原理は正しいものと認めてそれを応用しながら，同時に論理記号や命題の同値変形などについて復習しよう．

なお，定理 1 は次の命題と同値である．これも Archimedes の原理と呼ばれる．

定理 1′ 任意の正の実数 a, b に対し，$na > b$ となる自然数 $n \in \mathbb{N}$ が存在する．

6.2 $\mathbb{Q}$ の $\mathbb{R}$ における稠密性

Archimedes の原理の応用として次がわかる．

定理 2 任意の $a \in \mathbb{R}$ と $\varepsilon > 0$ に対し，$|a - r| < \varepsilon$ を満たす $r \in \mathbb{Q}$ が存在する．

このことを指して，有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ は実数全体の集合 $\mathbb{R}$ において**稠密**（ちゅうみつ） (dense) であるという．$|a - r|$ というのは数直線上における a と r の距離であることを意識してほしい．a からの距離が ε より小さいような実数の集合 $\{ x \in \mathbb{R} \mid |a - x| < \varepsilon \}$ は a の「ε 近傍 (ε-neighborhood)」と呼ばれることがあるが，定理 2 の主張は，どんなに $\varepsilon > 0$ を小さくとったとしても，a の ε 近傍には有理数が属しているということである．やや曖昧な形になるが，「任意の実数は有理数によっていくらでも精度よく近似できる」と言い表すこともできる．

定理 2 の証明には次の補題を用いる．

補題 3 任意の実数 a に対し，

$$n \leq a < n + 1$$

を満たす整数 n がただ一つ存在する．

この n を実数 a の**整数部分**といい，$[a]$ で表す（Gauss の記号．ただしこの記号を用いるときは一言断ったほうがよいと思う．[ ] はさまざまな意味で用いられるからである）．

演習問題

6.1 A を自然数からなる空でない集合とする．A には最小元が存在することを証明せよ．
［ヒント：Archimedes の原理は無関係．各 $n \in \mathbb{N}$ に対して「$n \in A$ ならば A には最小元が存在する」ということを数学的帰納法を用いて示す——というのがひとつの方法.］

6.2 一般に，実数からなる集合 A が $\mathbb{R}$ において**稠密**であるというのは，任意の $a \in \mathbb{R}$ および $\varepsilon > 0$ に対し，$|a - x| < \varepsilon$ となるような $x \in A$ が存在することをいう．

(1) 実数からなる集合 A が $\mathbb{R}$ において稠密であるとはどういうことか，また稠密でないとはどういうことか，それぞれ論理記号を用いて表せ．否定記号は使わないこと．

(2) $\mathbb{Z}$ が $\mathbb{R}$ において稠密でないことを証明せよ．

6.3 実数からなる集合 A に対し，$M \in \mathbb{R}$ が A の**上界**であるとは，任意の $x \in A$ に対して $x \leq M$ であることをいう．A が上界を持つとき，A は**上に有界**であるという（これは問題 5.4 でやった)．同様に，$L \in \mathbb{R}$ が A の**下界**であるとは任意の $x \in A$ に対して $x \geq L$ であることをいい，A が下界を持つとき，A は**下に有界**であるという．A が上に有界かつ下に有界であるとき，単に A は**有界**であるという．
さて，次の集合を考える．

$$B = \left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

(1) B の上界になっているような実数全体の集合が $[1, \infty)$ に等しいことを証明せよ．

(2) B の下界になっているような実数全体の集合が $(-\infty, 0]$ に等しいことを証明せよ．

6.4* α を任意に定めた無理数とし，$A = \{\, m + n\alpha \mid m, n \in \mathbb{Z} \,\}$ とおく．A が $\mathbb{R}$ において稠密であることを証明したい．

(1) 次の $(*)$ を用いて，A が $\mathbb{R}$ において稠密であることを示せ．

$(*)$ 任意の $N \in \mathbb{N}$ に対し，次を満たすような $p, q \in \mathbb{N}$ であって $q \geq N$ なるものが存在する：

$$|\alpha - p/q| \leq 1/q^2.$$

［ヒント：$p - q\alpha$ の整数倍はすべて A の元になっている.］

(2) 無理数 α に対し，次の手続きによって x_n，k_n を定めてゆく．

(i) まず，$\alpha = [\alpha] + 1/x_1$ とおいて（$[\alpha]$ は α の整数部分)，$k_1 = [x_1]$ と定める．整数部分の定義から $0 < 1/x_1 < 1$ で，ゆえに $x_1 > 1$．したがってまた $k_1 \in \mathbb{N}$.

(ii) 次に，$x_1 = k_1 + 1/x_2$ とおいて $k_2 = [x_2]$ と定める．上と同様に $x_2 > 1$，$k_2 \in \mathbb{N}$.

(iii) これを繰り返す．すなわち，$x_{n-1} > 1$ と $k_{n-1} = [x_{n-1}]$ に対し，$x_{n-1} = k_{n-1} + 1/x_n$ とおいて $k_n = [x_n]$ と定める．やはり $x_n > 1$，$k_n \in \mathbb{N}$ である．

すると各 n に対し

$$\alpha = [\alpha] + \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{k_2 + \cfrac{1}{k_3 + \cfrac{1}{\ddots \, \cfrac{\vdots}{k_{n-1} + \cfrac{1}{x_n}}}}}}$$

となる．これを α の**連分数展開**という．連分数展開を応用して，(1) の $(*)$ を証明せよ．
［上記の式から最後の「$1/x_n$」を取り除いて得られる有理数を既約分数として p_n/q_n と表すとき，$|\alpha - p_n/q_n| \leq 1/q_n^2$ かつ自然数列 (q_n) が狭義単調増加であることを示す．とりたてて新しい知識が必要なわけではないが，かなり工夫が必要になる．たとえば高木貞治『初等整数論講義』（共立出版）の第 2 章 §20 に証明が載っているので参照せよ.］