6.1 A を自然数からなる空でない集合とする．A には最小元が存在することを証明せよ．

［証明］A を問題に述べられているような集合とすると，A は空でないのだから，ある元 $n \in A$ をとることができる．そしてもちろん $n \in \mathbb{N}$ である．そこで，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して「$A \subset \mathbb{N}$ かつ $n \in A$ ならば，A には最小元が存在する」ということを証明すれば，問題の主張の成立がわかったことになる．数学的帰納法を用いる．

まず $n = 1$ のときを考える．すなわち $1 \in A$ とする．任意の $m \in A$ は，$m \in \mathbb{N}$ であることから $1 \leq m$ を満たす．したがって，このときは 1 が A の最小元になっている．

次に，$n = 1, 2, \ldots, k$ の場合が証明されたと仮定して，$A \subset \mathbb{N}, k+1 \in A$ の場合にも A が最小元を持つことを示そう．もし $k+1$ が A の最小元になっているならばそれでよい．そうでない場合が問題だが，$k+1$ が A の最小元ではないということは $k+1$ よりも小さい自然数が A に属しているということだから，1, 2, $\ldots$, k のいずれかが A の元になっている．したがって帰納法の仮定により，A はやはり最小元を持つ．

コメント この事実は重要なので覚えておいてください．自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ の**整列性**と呼ばれる性質です．

6.2 一般に，実数からなる集合 A が $\mathbb{R}$ において**稠密**であるというのは，任意の $a \in \mathbb{R}$ および $\varepsilon > 0$ に対し，$|a - x| < \varepsilon$ となるような $x \in A$ が存在することをいう．

(1) 実数からなる集合 A が $\mathbb{R}$ において稠密であるとはどういうことか，また稠密でないとはどういうことか，それぞれ論理記号を用いて表せ．否定記号は使わないこと．

(2) $\mathbb{Z}$ が $\mathbb{R}$ において稠密でないことを証明せよ．

［解］

(1) 「A が $\mathbb{R}$ において稠密である」というのは

$$\forall a \in \mathbb{R}\, \forall \varepsilon > 0\, \exists x \in A\, (|a - x| < \varepsilon)$$

と表される．その否定，すなわち「A が $\mathbb{R}$ において稠密でない」というのは

$$\exists a \in \mathbb{R}\, \exists \varepsilon > 0\, \forall x \in A\, (|a - x| \geq \varepsilon)$$

である（$|a - x| < \varepsilon$ の否定が $|a - x| \geq \varepsilon$ であることに注意せよ）．

(2) (1) より，証明すべきことは「$a \in \mathbb{R}$ および $\varepsilon > 0$ であって，任意の $x \in \mathbb{Z}$ に対して $|a - x| \geq \varepsilon$ となるようなものが存在する」ということ．（別の言い方をすれば，「$a \in \mathbb{R}$ および $\varepsilon > 0$ を適切に選ぶことにより，任意の $x \in \mathbb{Z}$ に対して $|a - x| \geq \varepsilon$ となるようにできる」ということ．）

たとえば $a = 1/2$, $\varepsilon = 1/2$ としよう（あるいは，a は整数でなければ何でもよい．ε は a に応じて決める）．するとまず，$0, 1 \in \mathbb{Z}$ は a から $\varepsilon = 1/2$ 以上離れている（実際にはちょうど 1/2 だけ離れているが，「1/2 以上」と言っても間違いではない）．すなわち $|a - 0| \geq \varepsilon$, $|a - 1| \geq \varepsilon$．また $0 \leq a \leq 1$ だから，0 と 1 以外の $x \in \mathbb{Z}$ は，0 や 1 よりも a から離れている．すなわち $|a - x| \geq \varepsilon$ が $x = 0, 1$ 以外についても成り立つ．

コメント ほんとうに聞きたかったことは (2) ですが，ヒントとして (1) も付けました．問題の趣旨は，（もちろん稠密性の概念自体にも慣れてほしいのですが，）「否定命題を作る必要が生じて，それがすぐにわからなかったら，いったん論理記号を使って表してみよう」ということです．問題 5.3 でも同様のことをやりました．

6.3 実数からなる集合 A に対し，$M \in \mathbb{R}$ が A の**上界**であるとは，任意の $x \in A$ に対して $x \leq M$ であることをいう．A が上界を持つとき，A は**上に有界**であるという（これは問題 5.4 でやった）．同様に，$L \in \mathbb{R}$ が A の**下界**（かかい）であるとは任意の $x \in A$ に対して $x \geq L$ であることをいい，A が下界を持つとき，A は**下に有界**であるという．A が上に有界かつ下に有界であるとき，単に A は**有界**であるという．

さて，次の集合を考える．

$$B = \left\{ \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}.$$

(1) B の上界になっているような実数全体の集合が $[1, \infty)$ に等しいことを証明せよ．

(2) B の下界になっているような実数全体の集合が $(-\infty, 0]$ に等しいことを証明せよ．

［解］解答の前に，まず次のことを確認しておく．

- $M \in \mathbb{R}$ が A の上界であるとは，$\forall x \in A\,(x \leq M)$ ということ．
- $L \in \mathbb{R}$ が A の下界であるとは，$\forall x \in A\,(x \geq L)$ ということ．

(1) 示すべきことは，任意の $a \in [1, \infty)$ が B の上界であること，またそれ以外の $a \in \mathbb{R}$ が B の上界でないことの両方である．

$\underline{a \in [1, \infty) \text{ が } B \text{ の上界であること}}$．$a \in [1, \infty)$ とする．つまり $a \geq 1$．任意に $x \in B$ をとると，これはある $n \in \mathbb{N}$ によって $x = 1/n$ と表される．$n \geq 1$ より $x \leq 1 \leq a$ だから，a は B の上界である．

$\underline{a \in \mathbb{R} \setminus [1, \infty) \text{ が } B \text{ の上界でないこと}}$．$a \in \mathbb{R} \setminus [1, \infty) = (-\infty, 1)$ とする．つまり $a < 1$．示すべきことは，$x > a$ を満たす $x \in B$ の存在である（必要なら論理記号を用いて確認せよ）．ところで $a < 1$ だったから，$1 = 1/1 \in B$ はそのような x になっている．ゆえに a は B の上界ではない．

(2) (1) と同様に，$a \in (-\infty, 0]$ が B の下界であることと，それ以外の $a \in \mathbb{R}$ が B の下界でないことを示す．

$\underline{a \in (-\infty, 0] \text{ が } B \text{ の下界であること}}$．$a \in (-\infty, 0]$ とする．つまり $a \leq 0$．任意に $x \in B$ をとると，これはある $n \in \mathbb{N}$ によって $x = 1/n$ と表される．$n > 0$ より $x > 0 \geq a$ だから，a は B の下界である．

$\underline{a \in \mathbb{R} \setminus (-\infty, 0] \text{ が } B \text{ の下界でないこと}}$．$a \in \mathbb{R} \setminus (-\infty, 0] = (0, \infty)$ とする．つまり $a > 0$．示すべきことは，$x < a$ を満たす $x \in B$ の存在である．ところで $a > 0$ だから特に $a \neq 0$，ゆえに $1/a$ が（実数として）定義され，Archimedes の原理から $1/a < n$ を満たす $n \in \mathbb{N}$ が存在する．$1/a < n$ の両辺はともに正だから，逆数をとって $a > 1/n$．ここで $1/n \in B$ だから，実際に $x < a$ となる $x \in B$ が存在することがわかった．ゆえに a は B の下界ではない．

コメント Archimedes の原理を用いる問題でした．上界，下界という概念は，実数の完備性を学ぶときに再び登場します．

ところで，別の方法もあるので紹介しておきます．たとえば (1) を考えることにして，説明のために B の上界全体の集合を B_u とおきます（上界＝ upper bound なので u を右下に付けてみました）．やるべきことは $[1, \infty) = B_u$ の証明で，そのために上では $[1, \infty) \subset B_u$ と $\mathbb{R} \setminus [1, \infty) \subset \mathbb{R} \setminus B_u$ をそれぞれ確認しました．しかしどちらかと言えば，後者の代わりに $B_u \subset [1, \infty)$，つまり任意の上界が $[1, \infty)$ に属することを示すほうが直接的です．そして，(1) では実際に，こちらのほうが簡単に話が済みます．(2) については，同様のことを考えても証明はほとんど上でやったのと変わりませんが．