数学における論理 (2)――同値な命題，特に否定命題の同値変形

5.1 命題論理における同値な命題

命題論理の範囲では，大前提として，命題の同値性は真理表を書けば証明できる．しかし，次に挙げるような基本的な同値性をもとにして，「同値変形」によって証明する方法も重要である．

(1) $\overline{\overline{p}} \equiv p$.（**二重否定の除去**）
(2) $p \wedge p \equiv p$,
　$p \vee p \equiv p$.（**冪等律**）
(3) $p \wedge q \equiv q \wedge p$,
　$p \vee q \equiv q \vee p$.（**交換律**）
(4) $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$,
　$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ （**結合律**）
(5) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$,
　$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.（**分配律**）
(6) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$,
　$p \vee (p \wedge q) \equiv p$.（**吸収律**）
(7) $p \to q \equiv \overline{p} \vee q$.
(8) $\overline{p \wedge q} \equiv \overline{p} \vee \overline{q}$,
　$\overline{p \vee q} \equiv \overline{p} \wedge \overline{q}$.（**de Morgan の法則**）

さらに，恒真命題と恒偽命題と呼ばれる 2 つの命題を導入する．**恒真命題**とは常に真である命題のことで，これをわれわれは T で表す．**恒偽命題**とは常に偽である命題で，F で表す．すると次が成り立つ．

(9) $p \wedge T \equiv p$,
　$p \vee T \equiv T$.
(10) $p \wedge F \equiv F$,
　$p \vee F \equiv p$.
(11) $p \vee \overline{p} \equiv T$.（**排中律**）
(12) $p \wedge \overline{p} \equiv F$.（**矛盾律**）

(9)〜(12) は単なる言葉遊びのように見えるかもしれないが，実際に命題の同値変形をしてみると役に立つ．

この授業では，「$p \to q$ が常に真である」ということを $p \Rightarrow q$ と書く（$q \Leftarrow p$ と書いてもよい）．これは，$p \to q \equiv T$ であることとも言い換えられる．

命題 p と q が同値であることは，「$p \to q$ と $q \to p$ がいずれも常に真である」ことと言い換えることができる（真理表を書いてみればわかる）．すなわち $p \equiv q$ とは，$p \Rightarrow q$ と $q \Rightarrow p$ の両方が成り立つことと同じである．そこで $p \equiv q$ のことを $p \Leftrightarrow q$ とも書く．

5.2 述語論理における同値な命題

述語論理に関して覚えておくべき命題の同値は次のとおり．

(13) $\forall x \in A\,(p(x)) \wedge \forall x \in A\,(q(x)) \equiv \forall x \in A\,(p(x) \wedge q(x))$,
　$\exists x \in A\,(p(x)) \vee \exists x \in A\,(q(x)) \equiv \exists x \in A\,(p(x) \vee q(x))$.
(14) $\overline{\forall x \in A\,(p(x))} \equiv \exists x \in A\,(\overline{p(x)})$,
　$\overline{\exists x \in A\,(p(x))} \equiv \forall x \in A\,(\overline{p(x)})$. （**de Morgan の法則**）

演習問題

5.1 p, q, r を命題とする．次が成り立つことを，真理表を書く方法と同値変形による方法の両方で証明せよ．

(1) $p \to q \equiv \overline{q} \to \overline{p}$. ［「含意命題 $p \to q$ とその対偶は同値」ということ.］

(2) $\overline{p \to q} \equiv p \wedge \overline{q}$. ［この両辺の否定をとって得られる $p \to q \equiv \overline{p \wedge \overline{q}}$ は，背理法の原理である.］

(3) $p \vee q \equiv \overline{p} \to q$.

(4) $p \wedge (p \to q) \Rightarrow q$.

(5) $(p \to q) \wedge (q \to r) \Rightarrow p \to r$.

(6) $(p \to q) \to p \equiv p$.

5.2 次の命題を p とおく（問題 4.2 に出てきたのと同じもの）．その否定 $\overline{p}$ を論理記号を用いて表せ．ただし，同値変形によって否定記号 $\overline{}$ を用いない形にせよ．

$$\forall a \in \mathbb{R}\, \forall b \in \mathbb{R}\, (\forall \varepsilon \in (0, \infty)\, (a - \varepsilon < b) \to a \leq b).$$

また，$\overline{p}$ の真偽を調べることにより，p の真偽を決定せよ．

5.3 区間 $(0, 1)$ が最大元を持たないことを証明したい．

(1) 論理記号を用いて「区間 $(0, 1)$ は最大元を持つ」という命題を表せ．

(2) 論理記号を用いて「区間 $(0, 1)$ は最大元を持つ」の否定を表せ（ただし，同値変形によって否定記号を用いない形にせよ）．また，それを論理記号を用いずに通常の言葉で表せ．

(3) (2) で作った命題が真であることを証明せよ．

5.4 実数からなる集合 A が**上に有界**であるとは，「任意の $x \in A$ に対し $x \leq M$」となるような実数 M が存在することをいう．実数からなる集合 A を変項とする次の命題関数を考える．

$$A \text{ は上に有界である.} \tag{$*$}$$

(1) 論理記号を用いて $(*)$ を表せ．

(2) 論理記号を用いて $(*)$ の否定を表せ（ただし，同値変形によって否定記号を用いない形にせよ）．また，それを論理記号を用いずに通常の言葉で表せ．

(3)「自然数の集合 $\mathbb{N}$ は上に有界ではない」という命題を考える．これはどういう意味か，「上に有界」という用語を用いずに，なるべく簡単な形に述べ直せ．

5.5 命題関数 $p(x)$, $q(x)$ に対して，次はいずれも必ずしも成り立たない．反例を挙げよ．

(1) $\forall x \in A\, (p(x)) \vee \forall x \in A\, (q(x)) \equiv \forall x \in A\, (p(x) \vee q(x))$.

(2) $\exists x \in A\, (p(x)) \wedge \exists x \in A\, (q(x)) \equiv \exists x \in A\, (p(x) \wedge q(x))$.

5.6* $\alpha = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ とおくと $\alpha^{\sqrt{2}} = 2$ である（確かめよ）．そのことを用いて，「無理数の無理数乗は必ず無理数である」という主張が正しくないことを証明せよ．［ヒント：5.1 (3) の応用.］

5.7* 次で定義される数列 (a_n) が周期を持たないことを証明せよ．

$$a_n = \begin{cases} 1, & n \text{ が三角数のとき,} \\ 0, & \text{それ以外のとき.} \end{cases}$$

ただし，自然数 n が三角数であるとは，ある $m \in \mathbb{N}$ によって $n = 1 + 2 + 3 + \cdots + m$ と表されることをいう．［まず初めに，「数列 (a_n) が周期を持たない」とはどういうことか明確にせよ.］