数学の楽しみ 1D［第 5 回・演習問題の解答例］

5.1 p, q, r を命題とする．次が成り立つことを，真理表を書く方法と同値変形による方法の両方で証明せよ．

(1) $p \to q \equiv \overline{q} \to \overline{p}$.

(2) $\overline{p \to q} \equiv p \wedge \overline{q}$.

(3) $p \vee q \equiv \overline{p} \to q$.

(4) $p \wedge (p \to q) \Rightarrow q$.

(5) $(p \to q) \wedge (q \to r) \Rightarrow p \to r$.

(6) $(p \to q) \to p \equiv p$.

［解］（同値変形については，各ステップで用いる事実を，第 5 回のプリントで用いた番号によって示す．なお交換律は断りなく自由に用いる．みなさんは番号は書かなくてよいですが，ここに示す程度に，どういう事実を使っているのか読み手に理解できるように書いてください．）

(1) まず真理表を書いて確かめる．$p \to q$ と $\overline{q} \to \overline{p}$ の真偽は常に一致しているので，これらは同値である．

p	q	$p \to q$	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\overline{q} \to \overline{p}$
1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	0	1
0	0	1	1	1	1

同値変形では次のようにすればよい．

$$p \to q \underset{(7)}{\equiv} \overline{p} \vee q \underset{(1)}{\equiv} \overline{\overline{q}} \vee \overline{p} \underset{(7)}{\equiv} \overline{q} \to \overline{p}.$$

(2) 真理表は次のとおり．$\overline{p \to q}$ と $p \wedge \overline{q}$ の真偽は常に一致している．

p	q	$p \to q$	$\overline{p \to q}$	$\overline{q}$	$p \wedge \overline{q}$
1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0
0	0	1	0	1	0

同値変形では次のとおり．

$$\overline{p \to q} \underset{(7)}{\equiv} \overline{\overline{p} \vee q} \underset{(8)}{\equiv} \overline{\overline{p}} \wedge \overline{q} \underset{(1)}{\equiv} p \wedge \overline{q}.$$

(3) 真理表は次のとおり．$p \vee q$ と $\overline{p} \to q$ の真偽は常に一致している．

p	q	$p \vee q$	$\overline{p}$	$\overline{p} \to q$
1	1	1	0	1
1	0	1	0	1
0	1	1	1	1
0	0	0	1	0

同値変形では次のとおり．右辺から始める．

$$\overline{p} \to q \underset{(7)}{\equiv} \overline{\overline{p}} \vee q \underset{(1)}{\equiv} p \vee q.$$

(4)「$p \wedge (p \to q) \Rightarrow q$」とは，$(p \wedge (p \to q)) \to q$ が常に真だということだった．真理表を書くと，実際にそうであることがわかる．

p	q	$p \to q$	$p \wedge (p \to q)$	$(p \wedge (p \to q)) \to q$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

同値変形では次のようにする．示すべきことは $(p \wedge (p \to q)) \to q \equiv T$（$T$ は恒真命題）である．

$$
\begin{aligned}
(p \wedge (p \to q)) \to q &\underset{(7)}{\equiv} \overline{p \wedge (p \to q)} \vee q \underset{(8)}{\equiv} (\overline{p} \vee \overline{p \to q}) \vee q \underset{\text{問 5.1 (2)}}{\equiv} (\overline{p} \vee (p \wedge \overline{q})) \vee q \\
&\underset{(5)}{\equiv} ((\overline{p} \vee p) \wedge (\overline{p} \vee \overline{q})) \vee q \underset{(11)}{\equiv} (T \wedge (\overline{p} \vee \overline{q})) \vee q \underset{(9)}{\equiv} (\overline{p} \vee \overline{q}) \vee q \\
&\underset{(4)}{\equiv} \overline{p} \vee (\overline{q} \vee q) \underset{(11)}{\equiv} \overline{p} \vee T \underset{(9)}{\equiv} T.
\end{aligned}
$$

(5) 真理表は次のとおり．$((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$ は常に真である．

p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$(p \to q) \wedge (q \to r)$	$p \to r$	$((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

同値変形では次のようにする．示すべきことは $((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r) \equiv T$ である．

$$
\begin{aligned}
((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r) &\underset{(7)}{\equiv} \overline{(p \to q) \wedge (q \to r)} \vee (p \to r) \underset{(8)}{\equiv} (\overline{p \to q} \vee \overline{q \to r}) \vee (\overline{p} \vee r) \\
&\underset{\text{問 5.1 (2)}}{\equiv} ((p \wedge \overline{q}) \vee (q \wedge \overline{r})) \vee (\overline{p} \vee r) \\
&\underset{(3)}{\equiv} ((p \wedge \overline{q}) \vee \overline{p}) \vee ((q \wedge \overline{r}) \vee r) \\
&\underset{(4)}{\equiv} ((p \vee \overline{p}) \wedge (\overline{q} \vee \overline{p})) \vee ((q \vee r) \wedge (\overline{r} \vee r)) \\
&\underset{(11)}{\equiv} (T \wedge (\overline{q} \vee \overline{p})) \vee ((q \vee r) \wedge T) \\
&\underset{(9)}{\equiv} (\overline{q} \vee \overline{p}) \vee (q \vee r) \underset{(4)}{\equiv} (\overline{q} \vee q) \vee (\overline{p} \vee r) \underset{(11)}{\equiv} T \vee (\overline{p} \vee r) \underset{(9)}{\equiv} T.
\end{aligned}
$$

(6) 真理表は次のとおり．$(p \to q) \to p$ と p の真偽は常に一致しているので，これらは同値．

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \to p$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	1	0
0	0	1	0

同値変形では次のようにする．

$$
(p \to q) \to p \underset{(7)}{\equiv} \overline{p \to q} \vee p \underset{\text{問 5.1 (2)}}{\equiv} (p \wedge \overline{q}) \vee p \underset{(5)}{\equiv} (p \vee p) \wedge (\overline{q} \vee p) \underset{(2)}{\equiv} p \wedge (\overline{q} \vee p) \underset{(6)}{\equiv} p.
$$

コメント 真理表を書く方法と同値変形による方法のそれぞれにメリットとデメリットがあることを，実際に手を動かすことで感じてもらいたいと思います．なお，(6) には，直観的な理解が少々難しいものを選んでみました．
ちなみに，(4) は「モードゥス・ポーネンス」，(5) は「仮言三段論法」と呼ばれます．

5.2 次の命題を p とおく（問題 4.2 に出てきたのと同じもの）．その否定 $\overline{p}$ を論理記号を用いて表せ．ただし，同値変形によって否定記号 $\overline{}$ を用いない形にせよ．

$$\forall a \in \mathbb{R}\, \forall b \in \mathbb{R}\, (\forall \varepsilon \in (0,\infty)\, (a-\varepsilon < b) \to a \leq b).$$

また，$\overline{p}$ の真偽を調べることにより，p の真偽を決定せよ．

［解］否定 $\overline{p}$ を作る．まず全体に否定記号を付けると

$$\overline{\forall a \in \mathbb{R}\, \forall b \in \mathbb{R}\, (\forall \varepsilon \in (0,\infty)\, (a-\varepsilon < b) \to a \leq b)}.$$

この否定記号を外側から外してゆく．「$\forall a \in \mathbb{R}$」と「$\forall b \in \mathbb{R}$」にかかった部分を同値変形によって外すと

$$\exists a \in \mathbb{R}\, \exists b \in \mathbb{R}\, (\overline{\forall \varepsilon \in (0,\infty)\, (a-\varepsilon < b) \to a \leq b})$$

となる．さらに問 5.1 (2) の結果を用いるとこれは

$$\exists a \in \mathbb{R}\, \exists b \in \mathbb{R}\, (\forall \varepsilon \in (0,\infty)\, (a-\varepsilon < b) \land \overline{a \leq b})$$

と同値で，$\overline{a \leq b}$ とは $a > b$ ということだから

$$\exists a \in \mathbb{R}\, \exists b \in \mathbb{R}\, (\forall \varepsilon \in (0,\infty)\, (a-\varepsilon < b) \land a > b).$$

この命題 $\overline{p}$ は偽である．すなわち，「任意の $\varepsilon \in (0,\infty)$ に対し $a-\varepsilon < b$」かつ「$a > b$」であるような $a, b \in \mathbb{R}$ は存在しない．なぜなら，仮に $a, b \in \mathbb{R}$ が $a > b$ を満たしたとすれば，$\varepsilon = (a-b)/2$ とおけば $\varepsilon \in (0,\infty)$ かつ $a - \varepsilon \geq b$ だからである．ゆえに p は真である．

コメント「否定を考える」という操作を，与えられた命題の真偽について理解を深めるためのひとつの方法として捉えてみたのがこの問題です．今回の命題については，上の方法のほかに，「$\forall \varepsilon \in (0,\infty)\, (a-\varepsilon < b) \to a \leq b$ の対偶を考える」（問 5.1 (1) 参照）というのも考えられます．そちらのほうが直接的かもしれません．

5.3 区間 $(0,1)$ が最大元を持たないことを証明したい．

(1) 論理記号を用いて「区間 $(0,1)$ は最大元を持つ」という命題を表せ．

(2) 論理記号を用いて「区間 $(0,1)$ は最大元を持つ」の否定を表せ（ただし，同値変形によって否定記号を用いない形にせよ）．また，それを論理記号を用いずに通常の言葉で表せ．

(3) (2) で作った命題が真であることを証明せよ．

［解］

(1)「$a \in (0,1)$ が最大元である」ということは $\forall x \in (0,1)\, (a \geq x)$ と表される．「$(0,1)$ は最大元を持つ」とは，「$(0,1)$ には最大元が存在する」ということなので，

$$\exists a \in (0,1)\, \forall x \in (0,1)\, (a \geq x).$$

(2) 全体に否定記号を付けると

$$\overline{\exists a \in (0,1)\, \forall x \in (0,1)\, (a \geq x)}$$

となる．この否定記号の「$\exists a \in (0,1)$」と「$\forall x \in (0,1)$」にかかった部分を同値変形によって外すと

$$\forall a \in (0,1)\, \exists x \in (0,1)\, (\overline{a \geq x})$$

で，$\overline{a \geq x}$ とは $a < x$ ということだから

$$\forall a \in (0,1)\, \exists x \in (0,1)\, (a < x).$$

これを通常の言葉で表すと，たとえば「任意の $a \in (0,1)$ に対し，$a < x$ であるような $x \in (0,1)$ が存在する」となる．

(3) 任意に $a \in (0,1)$ をとる．これに対し $x = (a+1)/2$ とおけば，$x \in (0,1)$ かつ $a < x$ となる．ゆえに (2) の命題は真である．

コメント この問題を通じて学んでほしいのは，通常の言葉を用いて表された命題に対し否定命題を作る際の基本的な方法です．（直接的に否定命題が作れてしまうならそれでかまいませんが，そうでなければ）与えられた命題をいったん論理記号を用いて表し，論理記号の世界で否定命題を作り，それを通常の言葉に翻訳するのがいいでしょう．（慣れてきたら，以上を頭の中で済ませることも可能になると思います．）

なお，(2) で得られた否定命題は，実は問 4.1 (1) と同じものでした．

5.4 実数からなる集合 A が**上に有界**であるとは，「任意の $x \in A$ に対し $x \leq M$」となるような実数 M が存在することをいう．実数からなる集合 A を変項とする次の命題関数を考える．

$$A \text{ は上に有界である．} \qquad (*)$$

(1) 論理記号を用いて $(*)$ を表せ．

(2) 論理記号を用いて $(*)$ の否定を表せ（ただし，同値変形によって否定記号を用いない形にせよ）．また，それを論理記号を用いずに通常の言葉で表せ．

(3)「自然数の集合 $\mathbb{N}$ は上に有界ではない」という命題を考える．これはどういう意味か，「上に有界」という用語を用いずに，なるべく簡単な形に述べ直せ．

［解］

(1)「任意の $x \in A$ に対し $x \leq M$」というのは $\forall x \in A\,(x \leq M)$ と表される．「A が上に有界である」というのは，そのような $M \in \mathbb{R}$ が存在するということだから，

$$\exists M \in \mathbb{R}\, \forall x \in A\,(x \leq M).$$

(2) 全体に否定記号を付けると

$$\overline{\exists M \in \mathbb{R}\, \forall x \in A\,(x \leq M)}.$$

これを同値変形すると

$$\forall M \in \mathbb{R}\, \exists x \in A\,(\overline{x \leq M}).$$

$\overline{x \leq M}$ とは $x > M$ ということなので

$$\forall M \in \mathbb{R}\, \exists x \in A\,(x > M).$$

通常の言葉で表すと，たとえば「任意の $M \in \mathbb{R}$ に対して，$x > M$ となる $x \in A$ が存在する」となる．

(3) (2) によれば，自然数の集合 $\mathbb{N}$ が有界でないというのは「任意の $M \in \mathbb{R}$ に対して，$n > M$ となる自然数 n が存在する」ということ（自然数なので x ではなく n という文字を用いたが，意味は同じ）．これでよいが，さらになるべく文字を使わないようにするならば「どんな実数に対しても，それより大きい自然数が存在する」と言ってもよい．

コメント ちなみに (3) の命題は真です．これは **Archimedes の原理**と呼ばれていて，他のさまざまな定理を証明する上での基礎として用いられる事実のひとつです．

5.5 命題関数 $p(x)$, $q(x)$ に対して，次はいずれも必ずしも成り立たない．反例を挙げよ．

(1) $\forall x \in A\,(p(x)) \vee \forall x \in A\,(q(x)) \equiv \forall x \in A\,(p(x) \vee q(x))$.

(2) $\exists x \in A\,(p(x)) \wedge \exists x \in A\,(q(x)) \equiv \exists x \in A\,(p(x) \wedge q(x))$.

［解］

(1) A を自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ とし，$p(x)$ を「x は奇数である」，$q(x)$ を「x は偶数である」という命題関数とする．すると右辺は「任意の自然数 x について，x は奇数であるかまたは x は偶数である」とな

る．これは真である．一方，左辺は「任意の自然数 x について x は奇数であるか，または任意の自然数 x について x は偶数である」となる．これは偽である．

(2) (1) と同じ例を用いる．すると左辺は「x が奇数であるような自然数 x が存在するか，または x が偶数であるような自然数が存在する」となる．これは真である．一方，右辺は「『x が奇数で，かつ x が偶数である』ような自然数 x が存在する」となる．これは偽である．

コメント プリントの (13) と比較してください．これについては，覚えるというよりも，その都度意味を考えて，正しい操作かどうかを判断するのがいいと思います（「使うたびに意味を考えたほうがいい」というのは他についても同じだけれど，これについては特にそうだ，ということです）．

なお，(1) と (2) で同じ例を使ったのは理由のあることです．(1) の左辺で $p(x)$, $q(x)$ を $\overline{p(x)}$, $\overline{q(x)}$ で置き換えてから否定すると (2) の左辺になり，また，(1) の右辺で $p(x)$, $q(x)$ を $\overline{p(x)}$, $\overline{q(x)}$ で置き換えてから否定すると (2) の右辺になります．