数学における論理 (1)——命題と論理記号

4.1　命題論理

論理について考える文脈においては，何らかの主張を述べた文のうち，その真偽がはっきり定まっているようなものを**命題**という．（数学では「正しい主張のうち，定理より重要性の低いもの」という意味で「命題」という語を使うこともあるが，これらは文脈で区別する．）

命題 p, q があるとき，次のような新しい命題が得られる．

- $p \wedge q$（p かつ q．**論理積**）
- $p \vee q$（p または q．**論理和**）
- $p \to q$（p ならば q．**含意**）
- $\overline{p}$（p でない．**否定**．なお $\neg p$ や $\sim p$ という記号もポピュラーである）

これらは，命題の**真理値**（真ならば 1，偽ならば 0）を与える**真理表**によって定義される．

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \to q$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	0	1	1
0	0	0	0	1

p	$\overline{p}$
1	0
0	1

真偽が常に一致するような 2 つの命題は**同値**であるという．命題を自在に扱うためには，どのような命題が同値なのかということについての知識や，ある程度の慣れが必要である．今回から 3 回かけてそれを扱う．

4.2　述語論理

それ自身としては命題ではないけれども，**変項**（**変数**）と呼ばれる文字を含んでいて，変項に具体的な値を代入することによって命題となるような文のことを，**命題関数**または**述語**という．x を変項とする命題関数を表す記号として，$p(x)$ などを用いる．変項は複数あってもよい（ただし有限個としておく）．

命題関数 $p(x)$ があるとき，x に具体的な値を代入して得られる命題のほかに，次のような命題を考えることもできる．

- $\forall x\, p(x)$（任意の x について $p(x)$．**全称命題**）
- $\exists x\, p(x)$（$p(x)$ となる x が存在する．**存在命題**あるいは**特称命題**）

変項 x の取る値の集合 A を明示するために，たとえば $\forall x \in A(p(x))$ のように書く場合も多い．

4.3　数学における論理記号の用法についてのコメント

今回出てきた論理記号 $\wedge, \vee, \to, \overline{}, \forall, \exists$ は，数学では，命題の論理的構造を明確にするというだけでなく，普通の言葉では長くなってしまう記述を短く済ませる目的で用いられることもしばしばある（板書で顕著）．特に $\forall, \exists$ をもっと自由（いいかげんと言ってもよい）な形で使うケースが見られる．柔軟に対応すること．

さらに，記述を短く済ませる目的では，「一意的な存在」を表す $\exists!$（または $\exists 1$）という記号も用いられる．つまり $\exists! x\, p(x)$ というのは $(\exists x\, p(x)) \wedge (\forall x \forall y (p(x) \wedge p(y) \to x = y))$ という意味．

なお，答案，レポート，論文といった正式な文章の場合，地の文においては基本的に論理記号を使うべきではない．

演習問題

4.1 次の命題を，論理記号 $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\overline{}$, $\forall$, $\exists$ を用いずに通常の言葉で表せ．またその真偽を述べよ．ただし $(0,1)$ は，数の対ではなく，区間を表している．

(1) $\forall x \in (0,1)\, \exists y \in (0,1)\, (x < y)$.

(2) $\exists y \in (0,1)\, \forall x \in (0,1)\, (x < y)$.

4.2 次の命題を，論理記号を用いずに通常の言葉で表せ．

$$\forall a \in \mathbb{R}\, \forall b \in \mathbb{R}\, (\forall \varepsilon \in (0,\infty)\, (a - \varepsilon < b) \to a \leq b).$$

注意「$\forall \varepsilon \in (0,\infty)$」は「$\forall \varepsilon > 0$」と書くことも多い．柔軟に対応しましょう．

4.3 次の文は命題関数である．その内容を，用いられている用語の定義に従って，論理記号をできるだけ使って表せ．（　）の中に変項の取り得る値についての補足が与えられているが，これは大前提と考えて，あらためて書かなくてよい．

(1)（自然数 m, n について）m は n で割り切れる．

(2)（実数 x について）x は有理数である．［記号 $\mathbb{Q}$ を使わずに.］

(3)（実数 a と実数からなる集合 A について）a は A の最大元である．

(4)（関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ について）f は周期を持つ．

4.4 次の文は命題である（ちなみにすべて真である）．その内容を，用いられている用語の定義に従って，論理記号をできるだけ使って表せ．

(1) 実数の 2 乗はいつでも 0 以上である．

(2) $\mathbb{N}$ から $\mathbb{R}$ への全射は存在しない．［集合 X から Y への写像全体の集合を，ここでは $M(X,Y)$ と書こう（Y^X と書くことも多い).］

(3) $a < b$ を満たすどんな実数 a, b に対しても，有界閉区間 $[a,b]$ 上の実数値連続関数 f はある $c \in [a,b]$ で最大値をとる．［関数の連続性の定義はまだ与えていないので，それは問題にしないことにして，有界閉区間 $[a,b]$ 上の実数値連続関数全体の集合を $C([a,b])$ と書く.］

(4) $\mathbb{R}$ 上の実数値連続関数 f について，f が周期 1 を持つならば，$f(c) = f(c + 1/2)$ となるような $c \in \mathbb{R}$ が存在する．［$\mathbb{R}$ 上の実数値連続関数全体の集合を $C(\mathbb{R})$ と書く.］

4.5* 次の文の内容を論理記号を使って表すにはどうしたらいいか考えてみよ．

(1)（集合 A について）A は無限集合である．

(2) 素数は無限に存在する．