数学の楽しみ 1D［第 4 回・演習問題の解答例］

4.1 次の命題を，論理記号 $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\overline{}$, $\forall$, $\exists$ を用いずに通常の言葉で表せ．またその真偽を述べよ．ただし $(0,1)$ は，数の対ではなく，区間を表している．

(1) $\forall x \in (0,1)\, \exists y \in (0,1)\, (x < y)$.

(2) $\exists y \in (0,1)\, \forall x \in (0,1)\, (x < y)$.

［解］（「通常の言葉で表す」仕方については，各々 3 通りずつ文例を挙げる．）

(1)(1a) 任意の $x \in (0,1)$ に対し，$x < y$ となるような $y \in (0,1)$ が存在する．

(1b) 任意の $x \in (0,1)$ に対し，ある $y \in (0,1)$ が存在して $x < y$ となる．

(1c) 任意の $x \in (0,1)$ に対し，ある $y \in (0,1)$ であって $x < y$ となるものが存在する．

この命題は真である．与えられた $x \in (0,1)$ に対し，たとえば $y = (x+1)/2$ とすれば $y \in (0,1)$ かつ $x < y$ である．

(2)(2a)「任意の $x \in (0,1)$ に対し $x < y$」となるような $y \in (0,1)$ が存在する．

(2b) ある $y \in (0,1)$ が存在して，任意の $x \in (0,1)$ に対し $x < y$ となる．

(2c) ある $y \in (0,1)$ であって，任意の $x \in (0,1)$ に対し $x < y$ となるものが存在する．

この命題は偽である．どんな $y \in (0,1)$ を取っても，たとえば $x = y$ とすれば $x < y$ は成り立たない．

コメント (1) は「$\forall x \exists y$」の順なので，x に依存して y を選べばいいのですが，(2) は「$\exists y \forall x$」の順であり，y は x に依存してはいけない（どんな x にも対応できるような y を選ばなければならない）ということを意味しています．両者の命題としての違いは絶対に押さえておきましょう．

これらは文章表現の上でも明確に区別する必要があります．今回は (1) と (2) の両方が問題になっているのでわかりやすいですが，一方だけ出てきたとしても，「もう一方」と区別した書き方が必要です．

文例の (b) は「ある……が存在して」という表現を用いたもので，(a) はそれを避けたもの，(c) は折衷案です．日本語の文としての自然さの観点からは (a) がベストだと思いますが，論理的な明確さの点では (a) はぎりぎりの微妙なところで成り立っています．(1a) と (2a) の違いは読点「,」やかぎ括弧「「」」だけであって，それらを取り払ってしまえば両者は同じ文です．もっと複雑な命題になったら，(a) 方式ではたぶんお手上げなので，(b), (c) の方式を使いましょう．

4.2 次の命題を，論理記号を用いずに通常の言葉で表せ．

$$\forall a \in \mathbb{R}\, \forall b \in \mathbb{R}\, (\forall \varepsilon \in (0,\infty)\, (a - \varepsilon < b) \rightarrow a \leq b).$$

［解］（2 通りの文例を挙げる．）

(a) a, b を任意の実数とする．そのとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対して $a - \varepsilon < b$ であるならば，$a \leq b$ が成り立つ．

(b) 任意の $a, b \in \mathbb{R}$ について，どんな $\varepsilon > 0$ に対しても $a - \varepsilon < b$ であるならば，$a \leq b$ が成り立つ．

コメント (a) のように 2 文に分けるとより明確ですが，(b) も許容範囲だと思います．

ではどんな書き方だとまずいか？ 他の意味に受け取ることもできてしまうとまずい．たとえば次はどうでしょうか．(b) から読点「,」を 1 つ除いただけです．

任意の $a, b \in \mathbb{R}$ について，どんな $\varepsilon > 0$ に対しても $a - \varepsilon < b$ であるならば $a \leq b$ が成り立つ．

これは次の意味で受け取られる可能性がないでしょうか．

$\forall a \in \mathbb{R}\, \forall b \in \mathbb{R}\, \forall \varepsilon \in (0,\infty)\, (a - \varepsilon < b \rightarrow a \leq b)$

誤読の可能性をすべて潰すのは困難ですが，できるだけ無くしたほうがいいし，そこで必要となるのは，知識に裏付けられた「どのように受け取られる可能性があるか？」という想像力です．

4.3 次の文は命題関数である．その内容を，用いられている用語の定義に従って，論理記号をできるだけ使って表せ．（　）の中に変項の取り得る値についての補足が与えられているが，これは大前提と考えて，あらためて書かなくてよい．

(1)（自然数 m, n について）m は n で割り切れる．

(2)（実数 x について）x は有理数である．［記号 $\mathbb{Q}$ を使わずに．］

(3)（実数 a と実数からなる集合 A について）a は A の最大元である．

(4)（関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ について）f は周期を持つ．

［解］

(1) $\exists q \in \mathbb{N}\,(m = nq)$.

(2) $\exists m \in \mathbb{Z}\,\exists n \in \mathbb{N}\,(x = m/n)$.

(3) $(a \in A) \wedge (\forall x \in A\,(x \le a))$.

(4) $\exists T > 0\,\forall x \in \mathbb{R}\,(f(x+T) = f(x))$.

コメント 数学の世界には，一見するとそう見えなくても，たくさんの全称命題や存在命題があります．たとえば (1) の解答例が言っていることは，「m は n で割り切れる」ということも存在命題（正確には，m と n の値を定めるごとに存在命題を与えるような命題関数）だということです．必要なら新しく変項を導入して，内容をうまく表現しましょう．なお，新しく導入した変項は，最終的には $\forall$ や $\exists$ で束縛する必要があります．

4.4 次の文は命題である（ちなみにすべて真である）．その内容を，用いられている用語の定義に従って，論理記号をできるだけ使って表せ．

(1) 実数の 2 乗はいつでも 0 以上である．

(2) $\mathbb{N}$ から $\mathbb{R}$ への全射は存在しない．［集合 X から Y への写像全体の集合を，ここでは $M(X, Y)$ と書こう（Y^X と書くことも多い）．］

(3) $a < b$ を満たすどんな実数 a, b に対しても，有界閉区間 $[a, b]$ 上の実数値連続関数 f はある $c \in [a, b]$ で最大値をとる．［関数の連続性の定義はまだ与えていないので，それは問題にしないことにして，有界閉区間 $[a, b]$ 上の実数値連続関数全体の集合を $C([a, b])$ と書く．］

(4) $\mathbb{R}$ 上の実数値連続関数 f について，f が周期 1 を持つならば，$f(c) = f(c + 1/2)$ となるような $c \in \mathbb{R}$ が存在する．［$\mathbb{R}$ 上の実数値連続関数全体の集合を $C(\mathbb{R})$ と書く．］

［解］

(1) $\forall x \in \mathbb{R}\,(x^2 \ge 0)$.

(2) $\overline{\exists f \in M(\mathbb{N}, \mathbb{R})\,(\forall y \in \mathbb{R}\,\exists x \in \mathbb{N}\,(f(x) = y))}$.

(3) $\forall a \in \mathbb{R}\,\forall b \in \mathbb{R}\,((a < b) \to \forall f \in C([a, b])\,\exists c \in [a, b]\,\forall x \in [a, b]\,(f(x) \le f(c)))$.

(4) $\forall f \in C(\mathbb{R})\,(\forall x \in \mathbb{R}\,(f(x+1) = f(x)) \to \exists c \in \mathbb{R}\,(f(c) = f(c + 1/2)))$.

コメント 基本的には問題 4.3 と同じです．今度は命題関数ではなく命題ですから，すべての変項が $\forall$ や $\exists$ によって束縛されなければならないことに注意してください．