数学の楽しみ 1D［第 3 回・演習問題の解答例］

> 3.1 (1) 集合 A を $A=\{\,3m+2n \mid m,\ n\in\mathbb{Z}\,\}$ と定義する．$A=\mathbb{Z}$ であることを証明せよ．
> (2) 集合 A を $A=\left\{\,\dfrac{1}{x+1}\ \middle|\ x\in\mathbb{R},\ x>0\,\right\}$ と定義する．$A=(0,1)$ であることを証明せよ．

［解］

(1) $A\subset\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Z}\subset A$ の両方を示せばよい．

<u>$A\subset\mathbb{Z}$ の証明</u>　任意に $x\in A$ をとる．すると A の定義から，$x=3m+2n$ となる $m,n\in\mathbb{Z}$ が存在する．$3m+2n\in\mathbb{Z}$ であるから，$x\in\mathbb{Z}$．ゆえに $A\subset\mathbb{Z}$ である．

<u>$\mathbb{Z}\subset A$ の証明</u>　任意に $x\in\mathbb{Z}$ をとる．証明すべきことは $x\in A$ で，これは「$x=3m+2n$ となるような $m,n\in\mathbb{Z}$ が存在する」ということである．ところで

$$x=3x+2\cdot(-x)$$

なので，$m=x, n=-x$ とおけば $m,n\in\mathbb{Z}$ かつ $x=3m+2n$ である．よって $x\in A$ で，したがって $\mathbb{Z}\subset A$ である．

(2) $A\subset(0,1)$ と $(0,1)\subset A$ の両方を示せばよい．

<u>$A\subset(0,1)$ の証明</u>　任意に $y\in A$ をとる．すると A の定義から，$y=1/(x+1)$ となる実数 $x>0$ が存在する．$x>0$ であることから，$x+1>1$ で，ゆえに $0<1/(x+1)<1$ である．したがって $0<y<1$，すなわち $y\in(0,1)$．これで $A\subset(0,1)$ が示された．

<u>$(0,1)\subset A$ の証明</u>　任意に $y\in(0,1)$ をとる．証明すべきことは $y\in A$ で，これは「$y=1/(x+1)$ となるような $x>0$ を満たす $x\in\mathbb{R}$ が存在する」ということである．ところで $x=1/y-1$ とおくと，$x\in\mathbb{R}$，また $0<y<1$ より $x>0$，さらに $y=1/(x+1)$ である．これで $y\in A$ が示されたから，$(0,1)\subset A$ である．

コメント　集合の相等 $A=B$ が「$A\subset B$ かつ $B\subset A$」と定義されることをきちんと意識しようという問題でした．

(2) について——証明中で，集合の元を一般に表す記号として「y」を用いました．(1) でそうしたのと同じように「x」を使おうとした人もいたかもしれませんが，それは（間違いとは言えないまでも）不適切です．問題文中で集合 A を定義する際に，正の実数を一般に表す文字として x をすでに使っていて，しかもその x が A の元そのものであるわけではない（$1/(x+1)$ が A の元になっている）からです．

> 3.2 A, B, C を集合とする．次の等式を証明せよ．
> (1) $(A\setminus B)\setminus C=A\setminus(B\cup C)$.
> (2) $A\setminus(B\setminus C)=(A\setminus B)\cup(A\cap C)$.

［解］

(1) $(A\setminus B)\setminus C\subset A\setminus(B\cup C)$ と $A\setminus(B\cup C)\subset(A\setminus B)\setminus C$ の両方を示せばよい．

<u>$(A\setminus B)\setminus C\subset A\setminus(B\cup C)$ の証明</u>　任意に $x\in(A\setminus B)\setminus C$ をとる．定義によって $x\in A\setminus B$ かつ $x\notin C$，すなわち $x\in A$ かつ $x\notin B$ かつ $x\notin C$ である．ここで $x\notin B$ かつ $x\notin C$ であることから $x\notin B\cup C$ なので，$x\in A$ と合わせて $x\in A\setminus(B\cup C)$ がわかる．ゆえに $(A\setminus B)\setminus C\subset A\setminus(B\cup C)$.

<u>$A\setminus(B\cup C)\subset(A\setminus B)\setminus C$ の証明</u>　任意に $x\in A\setminus(B\cup C)$ をとる．定義によって $x\in A$ かつ $x\notin B\cup C$，すなわち $x\in A$ かつ $x\notin B$ かつ $x\notin C$ である．ここで $x\in A$ かつ $x\notin B$ であることから $x\in A\setminus B$ なので，$x\notin C$ と合わせて $x\in(A\setminus B)\setminus C$ がわかる．ゆえに $A\setminus(B\cup C)\subset(A\setminus B)\setminus C$.

(2) $A\setminus(B\setminus C)\subset(A\setminus B)\cup(A\cap C)$ と $(A\setminus B)\cup(A\cap C)\subset A\setminus(B\setminus C)$ の両方を示せばよい．

<u>$A\setminus(B\setminus C)\subset(A\setminus B)\cup(A\cap C)$ の証明</u>　任意に $x\in A\setminus(B\setminus C)$ をとる．定義によって $x\in A$ かつ $x\notin B\setminus C$ である．すなわち，$x\in A$ であり，かつ「$x\in B$ かつ $x\notin C$」ではない．「『$x\in B$ かつ $x\notin C$』ではない」というのは「$x\notin B$ または $x\in C$」ということなので，整理すると，$x\in A$ かつ

「$x \notin B$ または $x \in C$」が成り立つ．$x \notin B$ のときは「$x \in A$ かつ $x \notin B$」が成り立ち，$x \in C$ のときは「$x \in A$ かつ $x \in C$」が成り立つので，いずれにしても「$x \in A$ かつ $x \notin B$」または「$x \in A$ かつ $x \in C$」が成り立つ．つまり $x \in (A \setminus B) \cup (A \cap C)$ である．ゆえに $A \setminus (B \setminus C) \subset (A \setminus B) \cup (A \cap C)$．

$(A \setminus B) \cup (A \cap C) \subset A \setminus (B \setminus C)$ の証明　任意に $x \in (A \setminus B) \cup (A \cap C)$ をとる．定義によって $x \in A \setminus B$ または $x \in A \cap C$，すなわち「$x \in A$ かつ $x \notin B$」または「$x \in A$ かつ $x \in C$」である．いずれにしても $x \in A$ であり，また「$x \notin B$ または $x \in C$」が成り立っている．「$x \notin B$ または $x \in C$」であることから「『$x \in B$ かつ $x \notin C$』ではない」ので，$x \notin B \setminus C$．$x \in A$ と合わせて，$x \in A \setminus (B \setminus C)$ である．ゆえに $(A \setminus B) \cup (A \cap C) \subset A \setminus (B \setminus C)$．

コメント 問題の主張は十分に直観をはたらかせれば明らかかもしれませんが，丁寧に証明を書くとやっかいですね．でも「書こうと思えば丁寧に書ける」ことは大切です．トレーニングしましょう．

証明中に出てきたような論理的操作については，みなさんは「ゆっくりと落ち着いて考えればわかる」程度に慣れているのではないかと期待しているのですが，細かく見ると，たとえば「命題に関する de Morgan の法則」のようなちょっと非自明な事実を使っています．こういったことについては，念のため次回の授業でまとめます．

なお，上では「両方向の包含関係を証明する」という基本に忠実なやり方をしましたが，たとえば (1) を，次のような同値変形によって証明することもできます．それでもかまいません．

$$\begin{aligned}
x \in (A \setminus B) \setminus C \quad &\Longleftrightarrow \quad x \in A \setminus B \text{ かつ } x \notin C \\
&\Longleftrightarrow \quad (x \in A \text{ かつ } x \notin B) \text{ かつ } x \notin C \\
&\Longleftrightarrow \quad x \in A \text{ かつ } (x \notin B \text{ かつ } x \notin C) \\
&\Longleftrightarrow \quad x \in A \text{ かつ } ((x \in B \text{ または } x \in C) \text{ でない}) \\
&\Longleftrightarrow \quad x \in A \text{ かつ } x \notin B \cup C \\
&\Longleftrightarrow \quad x \in A \setminus (B \cup C).
\end{aligned}$$

(2) についても同様にできます．

さらに，補集合を利用した証明も考えられます．補集合をとるために，まず，A, B, C のすべてを部分集合として含むような全体集合 X を前もって決めておきます（A, B, C のすべてを含むならどんなものでもよい）．すると，たとえば差集合 $A \setminus B$ は $A \cap B^c$ と表すこともでき，これを用いて集合を次のように変形していくことができます．

$$(A \setminus B) \setminus C = (A \cap B^c) \cap C^c = A \cap (B^c \cap C^c) = A \cap (B \cup C)^c = A \setminus (B \cup C).$$

(2) についても同様です．

3.3 写像 $f\colon \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \frac{2x}{x-1}$$

によって定義する．この f は単射であるか否か，また全射であるか否か判定せよ．

［解］f は単射である．そして全射ではない．

単射性の証明　$x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ とし，$f(x_1) = f(x_2)$ であると仮定する．そのとき

$$\frac{2x_1}{x_1 - 1} = \frac{2x_2}{x_2 - 1}$$

だから，$2x_1(x_2 - 1) = 2x_2(x_1 - 1)$．整理して $-2x_1 = -2x_2$，すなわち $x_1 = x_2$ を得る．

全射でないことの説明

$$f(x) = 2 + \frac{2}{x-1}$$

と書き換える．すると任意の $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ に対し，右辺第 2 項は $2/(x-1) \neq 0$ だから，$f(x) = 2$ とはならないことがわかる．ゆえに 2 は値域に属さない．

コメント 全射でないことを説明するにあたっては，値域に属さない 2 という数の「見つけ方」に触れることは必須ではありません．ですから，たとえば次のようにしてもかまいません．

「2 は値域に属さない．このことを背理法で証明する．仮に $f(x) = 2$ となる $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ が存在したとすると，$2x/(x-1) = 2$ より $2x = 2(x-1)$，ゆえに $0 = -2$．これは矛盾である.」

もっとも，他にメリット（説明が明らかに簡単になるなど）がないかぎり，「見つけ方のわかる」説明のほうが親切とは言えます．

3.4 (1) 写像 $f\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ を

$$f(m,n) = 2^{m-1}(2n-1)$$

によって定義する．これが全単射であることを証明せよ．

(2) 全射であるが単射でない写像 $f\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ の例を一つ挙げよ．また，単射であるが全射でない写像 $f\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ の例を一つ挙げよ．

［解］

(1) <u>全射性の証明</u>　任意に $l \in \mathbb{N}$ をとる．これが f の値域 $R(f)$ に属することを示そう．l の素因数分解を

$$l = 2^{q_1}\cdot 3^{q_2}\cdot 5^{q_3}\cdot\cdots\cdot p_k^{q_k}\cdot\cdots\cdot p_N^{q_N}$$

とする（p_k は k 番目の素数)．ここで初めの 2^{q_1} を除いた $3^{q_2}\cdot 5^{q_3}\cdot\cdots\cdot p_k^{q_k}\cdot\cdots\cdot p_N^{q_N}$ は 1 以上の奇数なので，これを $2n-1$ と表す．また $m = q_1 + 1$ とおく．すると $m,\, n \in \mathbb{N}$ で，$f(m,n) = l$ である．ゆえに $l \in R(f)$.

<u>単射性の証明</u>　$(m_1,n_1),\,(m_2,n_2) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ について，$f(m_1,n_1) = f(m_2,n_2)$ であると仮定する．すると

$$2^{m_1-1}(2n_1-1) = 2^{m_2-1}(2n_2-1) \qquad (*)$$

である．この等しい両辺の値を l とおくと，$2n_1-1$，$2n_2-1$ をそれぞれ素因数分解することにより，l の 2 通りの素因数分解が得られる．ところで $2n_1-1$，$2n_2-1$ はいずれも奇数だから，これらから新たに素因数 2 は現れない．よって素因数分解の一意性により $m_1 - 1 = m_2 - 1$，すなわち $m_1 = m_2$．したがって再び $(*)$ から $2n_1 - 1 = 2n_2 - 1$，すなわち $n_1 = n_2$ が得られる．以上より $(m_1,n_1) = (m_2,n_2)$.

(2)（授業中の発表で出た例）

$f(m,n) = mn$ とおくと，これは全射であるが単射でない．全射なのは，任意の $l \in \mathbb{N}$ に対し $f(l,1) = l$ だからである．単射でないのは，たとえば $f(1,2) = f(2,1) = 2$ であることからわかる．

$f(m,n) = 2^m 3^n$ とおくと，これは単射であるが全射でない．単射であることは素因数分解の一意性による．全射でないのは，たとえば，5 を $2^m 3^n$ という形に表すことはできないからである．

コメント (2) について――「例を挙げよ」と言われたら，こんなふうに理由も添えて答えてください．上に書いた程度の簡潔な説明でも，要点を押さえてさえいれば十分です．なお，第 2 の写像が全射でないことを説明するのに「5 を $2^m 3^n$ とは表せないから」としましたが，「1 を $2^m 3^n$ とは表せないから」でもいいですね．0 は $\mathbb{N}$ に属さないと約束しているので．

ちなみに，「l」は小文字のエルです．数字の「1」とは違うので注意深く見分けてください．手書きのときは ℓ としたほうがいいと思います（活字でも ℓ としたほうがいいと言う人もいます）.