数学書の読み方

2.1 数学書を読むのには時間がかかる

学術書を「読む」というのは，単に「目を通す」ということとは違う．特に，数学書の記述にはたくさんの「演習問題」が潜んでいるのであり，読者はそれらに注意しながら進んでいかなければならない．

三町勝久『微分積分講義』における，多変数関数（函数）の微分法に関する説明の一部を見てみよう．

> 2.2——微分可能函数の性質
>
> 2.2.1——微分可能性と連続性
>
> 定理 4　函数 $f(x,y)$ が点 (a,b) において微分可能なとき，$f(x,y)$ は点 (a,b) において連続である．
>
> （中略）
>
> 2.2.2——微分可能性と偏微分可能性
>
> 定理 5　函数 $f(x,y)$ が点 (a,b) において微分可能なとき，$f(x,y)$ は x に関して点 (a,b) で偏微分可能，y に関しても点 (a,b) で偏微分可能である．
>
> （中略）
>
> <u>ところで，たとえ偏微分可能であっても連続とは限らないのであるから，ましてや，微分可能とは限らないことは明らかである．また，偏微分可能であり連続であっても，微分可能とは限らない．例えば，$f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ は原点において $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$ であるが，微分可能ではない．</u>
>
> ［三町勝久『微分積分講義［改訂版］』（日本評論社，2016 年），pp. 19–20．下線は引用者による］

下線部の内容がすぐに了解できるだろうか？ 引用した文章の前の部分では「連続」，「微分可能」，「偏微分可能」の定義が述べられている．ここではそれらはすでに知っているものとする．その前提のもとで，何をすれば下線部を「読んだ」ことになるだろうか．

下線部の文章を 4 分割して，各々の部分について検討してみよう．

- 「ところで，たとえ偏微分可能であっても連続とは限らないのであるから，」
  - ここで主張されているのは「偏微分可能だが連続ではない函数が存在すること」である．読者がこの部分を「わかった」と言うためには，次の問いに答えられなければならない．

    問　偏微分可能だが連続ではない函数の例を挙げよ．
- 「ましてや，微分可能とは限らないことは明らかである．」
  - ここでは「偏微分可能だが微分可能ではない函数が存在すること」が述べられている．さらに，文章の構成から言って，著者はこれが直前の内容からわかると主張している．したがってここには次の問いが潜んでいる．

    問　偏微分可能だが連続ではない函数が存在する．そのことに基づき，偏微分可能だが微分可能ではない函数が存在することを示せ．

  （いくら著者が「明らか」と書いていても，決して飛ばしていいわけではない．）
- 「また，偏微分可能であり連続であっても，微分可能とは限らない．」
  - ここでは「偏微分可能で，連続でもあり，かつ微分可能でない函数が存在すること」が述べられている．再び，そういう例を読者は挙げなくてはならない．しかし幸い，今回は直後に具体例が示されている．

- 「例えば，$f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ は原点において $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$ であるが，微分可能ではない．」
  - この函数は，前の文に述べられた性質を持つものの例として挙げられている．よって確かめるべきことは次の 3 つ．

    問　函数 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ について次のことを示せ．

    (1) $f(x,y)$ は原点 $(0,0)$ において（x, y の両方について）偏微分可能．

    (2) $f(x,y)$ は原点 $(0,0)$ において連続．

    (3) $f(x,y)$ は原点 $(0,0)$ において微分可能でない．

    なお，(1) に関連して文中には「$f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$」という記述があるが，これは「原点 $(0,0)$ における偏微分可能性を確かめよ．偏微分係数が $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$ にならなかったら，間違いなので再度考えてください」という著者のメッセージである（たぶん）．

これらが達成できて，ようやく，書かれた内容を「読んだ」ことになる．

以上の作業には時間がかかる——1 行に何時間もかかることだってしばしばある．あせらず時間をかけて考えたり，人に聞いたりすること．もっとも，いつまでも立ち止まっていて全貌が見えないままでは仕方がないので，「ここはまだわかっていない」という記録を残した上で，先に進むのが必要な局面もある．

さらに深く「理解する」には

上に述べたことが一応できたとしよう．次に考えてみるべきなのは，たとえば次のようなことである．

- 論理の流れ（定義と定理，あるいは定理どうしのつながり）はどうなっているか．
- 定義，または定理の仮定が当てはまる（あるいは当てはまらない）状況にはどんな例があるか．
- 定理の仮定は適切か．過剰ではないか．
- 証明の鍵になっているアイディアは何か．

こういったことを自分の言葉にすることで，読んだ内容は「自分の理解」になっていく．テキストの内容を，考えたことを付け加えながら，改めて自分のためのノートにまとめるとよい．あるいは，セミナー（輪講）を開いて，お互いの理解を説明し合うのもいい考えだ．

まずどんな本を読むか

特に好みがなければ，指定された教科書をきちんと読むということでよいと思う．他の本を知りたい人のための参考として，古くから定評あるテキストを挙げておく．一部古くないのもある．

- 微積分
  - 高木貞治『解析概論』（岩波書店，1938 年，『定本　解析概論』2010 年）
  - 小平邦彦『解析入門』（岩波書店，1991 年，軽装版（I, II）2003 年）
  - 杉浦光夫『解析入門 I, II』（東京大学出版会，1980 年，1985 年）
  - 松坂和夫『解析入門 1〜6』（岩波書店，1997 年，1998 年）
- 線形代数
  - 佐武一郎『線型代数学』（裳華房，1974 年，新装版 2015 年）
  - 齋藤正彦『線型代数入門』（東京大学出版会，1966 年）
  - 永田雅宜ほか『理系のための線型代数の基礎』（紀伊國屋書店，1986 年）
  - 斎藤毅『線形代数の世界』（東京大学出版会，2007 年）

その他の分野については直接聞いてください．

2.2　最低限押さえておきたい言い回し

「任意の○○に対して」

「どんな○○に対しても」ということ．

例　任意の実数 x に対して $x^2 \geq 0$ が成り立つ．

「勝手に選んだ○○に対して」（または「勝手な○○に対して」）というのも同じ意味である．

「ある○○が存在して……が成り立つ」

これはよい文とは言えない．改善例：「……を満たす○○が存在する」，「ある○○について……が成り立つ」．しかし，たとえば英語での表現が念頭にあるせいで，うっかり見出しのように書いてしまうこともある．（もっと積極的な利点からこういう書き方を選ぶ著者もいるかもしれない．）

例　任意の複素数 a, b に対し，ある複素数 x が存在して $x^2 + ax + b = 0$ が成り立つ．

(For any complex numbers a and b, there exists a complex number x such that $x^2 + ax + b = 0$.)

なお，ここで出てきた「such that」の用法は普通はあまり見ないが，数学では頻出である．「s.t.」とも省略される．

「一意的」

何かが「ただ一つしかない」「唯一である」ということ．英語では “unique” なので，口頭では「ユニーク」と言うこともよくある．

例　任意の正の実数 x に対し，$e^y = x$ を満たす実数 y が 一意的に 存在する．この y を $\log x$ と書く．

次の言い回しは「最低限」ではないかもしれないが，演習問題に関連して挙げておく．

「……と仮定してよい」「……と仮定して証明すれば十分である」

証明の初めに現れることが多い．次の 2 つのケースがある．

- ……という仮定が成り立たない場合には定理の結論が成立することは明らかなので，……が成り立つ場合だけを考える．
- ……という仮定を追加した特別な場合を証明しておけば，それを用いて一般の場合の証明もすぐにできる．（この場合，「……と仮定して一般性を失わない」という言い回しも用いられる．）

例　定理（ロルの定理）有界閉区間 $[a, b]$ 上の連続関数 f について，f は (a, b) 上微分可能であり，また $f(a) = f(b)$ であると仮定する．そのとき $f'(c) = 0$ を満たす $c \in (a, b)$ が存在する．

証明　f は定数関数でないと仮定してよい．最大最小値の存在定理により，f は $[a, b]$ 上で最大値および最小値を持つ．最大値が $f(a)$ と異なると仮定して一般性を失わない．（以下略）

バリエーションとして，「……を証明すれば十分である」というのもある．「定理の主張のうち……という部分を証明すれば，それを用いて残りの証明もすぐにできる」ということ．

他にもいろいろある．佐藤文広『数学ビギナーズマニュアル』の第 2 章を見るとよい．

演習問題

2.1 次に挙げるのは，永田雅宜ほか『理系のための線型代数の基礎』の，代数学の基本定理について説明した節である（一部改変した）．補題 6.10.1 の主張および証明を理解する上で，あなたが確認しなければならない，または証明しなければならないことは何か．「問い」の形にして，思いつく限り列挙せよ．

> 6.10 研究——代数学の基本定理
>
> 準備のために，次のことを証明しよう．
>
> 補題 6.10.1　平面上，原点を中心とする円 O の周および内部をあわせたものを C とする．C で定義された実数値連続函数 $f(x)$ は，最大値および最小値を持つ．
>
> 証明　最大値について証明すれば十分である．最大値がなかったと仮定して矛盾を導こう．最大値がないというのには，二つの場合がある．
>
> (1) いくらでも大きい値がある．すなわち，どんな数 N をとっても，$f(x) > N$ となるような $x \in C$ がある．
>
> (2) 次のような実数 α が存在する：$f(x) = \alpha$ となるような $x \in C$ はないが，$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \in C$ が存在して，$f(x_n) < \alpha$ であるが，$f(x_n)$ が n とともに α に近づく．
>
> 各自然数 n に対して，C 内の点 p_n を，(1) の場合は $f(p_n) > n$ であるように，(2) の場合には $\alpha - (1/n) < f(p_n) < \alpha$ であるように選び，点の列 $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ を得る．
>
> x 軸に平行な直線 $y = n/2$ ($n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$) および y 軸に平行な直線 $x = n/2$ ($n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$) によって，平面を一辺の長さ 1/2 の正方形に分ける．C はそれら正方形のうちの有限個で覆われるから，それら正方形のうちに，$\{p_n \mid n = 1, 2, \ldots\}$ のうち，無限個が入っているものがある．その一つを S_1 とする．次に，S_1 を 4 等分して，一辺の長さが 1/4 の正方形に分ける．すると，その中に $\{p_n \mid n = 1, 2, \ldots\}$ のうち，無限個を含むものがある．その一つを S_2 とする．以下同様に，正方形の列 $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ が得られて，(a) S_i の一辺の長さは 2^{-i}，(b) S_{i+1} は S_i を 4 等分して得られる，(c) どの S_i も $\{p_n \mid n = 1, 2, \ldots\}$ の中の点を無限個含む．
>
> 次に，点 q_i ($i = 1, 2, \ldots$) を，$\{p_n \mid n = 1, 2, \ldots\}$ の中から，次のように選ぶ．
>
> まず，q_1 は S_1 に入っている p_n の一つ．また q_{i-1} まで定まったとき，$q_{i-1} = p_m$ となる番号 m を考え，q_i は S_i に入っているような p_n のうち，$n > m$ であるようなものの一つとする．すると，点列 $q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$ は C 内の点列であるが，任意の i, j ($i < j$) に対し，q_i と q_j は S_i に入っているから，この 2 点の距離は $\sqrt{2}/2^{-i}$ 以下である．したがって，C 内のある点に収束する．この点を q としてみると，f が連続函数であるから，$f(q) = \lim_{n\to\infty} f(q_n)$.
>
> (1) の場合，右辺の極限は存在しないから矛盾．(2) の場合，右辺は α で，α が函数 f の値ではなかったことに反する．■
>
> 定理 6.10.2　複素数係数の n 次方程式 $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$ ($n \geq 1$, $a_i \in \mathbb{C}$, $a_0 \neq 0$) には，複素数の範囲で解がある．
>
> （以下略）
>
> ［永田雅宜ほか『理系のための線型代数の基礎』（紀伊國屋書店，1986 年），pp. 200–202 を改変］