数学の体系的記述について

1.1 基本用語

次の言葉を使いこなせるようにしよう．

定理	Theorem (Th., Thm.)
命題	Proposition (Prop.)
補題	Lemma (Lem.)
系	Corollary (Cor.)
定義	Definition (Def., Dfn.)
公理	Axiom (Ax., Axm.)

「定理」「命題」「補題」「系」はすべて「成立することが数学的に証明された事実」を指す．それらのうち最も重要なものが「定理」と呼ばれる．他の言葉には次のようなニュアンスがある．

- 命題：定理よりも重要度が低いもの
- 系：他の定理などからすぐに証明できるもの
- 補題：他の定理を証明するための補助の役割を果たすもの

どの事実を「定理」（あるいは「命題」「補題」「系」）と呼ぶかというのは文脈に依存するし，書き手の考え方にもよる．

注意 論理について特に考える場合には，「命題」という言葉は別の意味，すなわち「真偽が定まっている主張」という意味で用いられることもある（詳しくは第 4 回以降で扱う）．どちらであるかは文脈で判断する．

「定義」とは，新しく導入する数学的対象に関する意味の規定である．「公理」とは，数学の理論を構築する上での出発点となる，「証明抜きで認める」ことがらである．公理の集まりを「公理系」という．

1.2 定義を大切にしよう

専門的な数学の学習では，定義の大切さが増す．何かを理解できない状態に陥って困ったら，まずはそこに登場する対象について，

「○○の定義は何だったか」

と考えるのはよい手である．実際に，それだけで解決するケースは少なくない．きっとこれからそういう経験をたくさんすることになると思う．

1.3 公理とは何か

公理という考えはもともと，ユークリッドの『原論』（紀元前 3 世紀ごろ）にまとめられているような，古代ギリシアの数学にあった．古典的には，それらの公理は「自明の真理であって，証明する必要のないこと」と考えられていたらしい．しかしこの見方は，19 世紀になって非ユークリッド幾何学が登場したことにより，適切ではなくなってしまった．

現在の数学では，公理について，それが「明らかに正しいか」などと問うことはしない．ただの「議論の前提」である．この見方を打ち出したのは，ヒルベルトの『幾何学の基礎』(1889 年）であった．その意義の詳細にはここでは触れないが，たとえば，佐藤文広『数学ビギナーズマニュアル（第 2 版）』(日本評論社，2014 年）の第 4.3 節を参照してほしい．

ヒルベルトによる幾何学の公理系のほかにも，さまざまな公理（系）がある．例を挙げよう．

- ペアノによる自然数論の公理系（1891 年）

> (P1)「0」という記号で表される自然数が存在する．
> (P2) 各々の自然数 x に対し，その「次の数」と呼ばれる自然数 $S(x)$ が存在する．
> (P3) どんな自然数 x に対しても，$S(x) = 0$ ではない．（0 はいかなる自然数の次の数でもない．）
> (P4) 自然数 x, y に対し，$S(x) = S(y)$ ならば $x = y$．（異なる自然数は異なる次の数を持つ．）
> (P5) 自然数に関する性質 P について，0 が性質 P を満たし，かつ「x が P を満たせば $S(x)$ も P を満たす」ならば，すべての自然数は P を満たす．

  「自然数」「0」「次の数」というのがいったい何なのかということは，直接的にはどこにも書かれていない．これらの言葉は**無定義語**として現れ，それらの関係性のみが述べられている．

- 実数論の公理系（ヒルベルト，1900 年）．特に，完備性（連続性）の公理が重要である．等価な表現がいろいろあるけれども，ここでは次のものを挙げておく．

> 上に有界かつ単調増加な実数列は収束する．

  今学期の「数学の楽しみ 1D」における一つの重要な目標は，この公理を深く理解することである．

- ツェルメロとフレンケルによる集合論の公理系（ZF 公理系，1922 年）．さらに「選択公理」を加えたものを ZFC 公理系という．通常の数学は，ZFC 公理系に基づく集合論を基礎として展開される．

演習問題

$\star$ 付きの問題は，授業内では扱わない予定です．質問等は歓迎です．

1.1 この問題では，「多項式（整式）」とはすべて実数係数のものを指す（実際にはもっと一般的な状況を考えてもいいのだが，気にしなくてよい）．まず剰余の定理について思い出そう．

> **剰余の定理**　$P(x)$ を x の多項式とし，α を実数とする．そのとき，$P(x)$ を $x - \alpha$ で割った余りは $P(\alpha)$ に等しい．

これについて次の問に答えよ．

(1) 多項式の除法における「商」と「余り」の定義は何だったか？ 説明せよ．
(2) 剰余の定理を証明せよ．

1.2* ペアノによる自然数論の公理系に基づき，次の定理を示すことができる．

> **定理**　各々の自然数 x に対し，次の性質 $(\mathrm{i})_x$，$(\mathrm{ii})_x$ を満たすような，自然数を自然数に移す写像 f_x が一意的に存在する．
>
> $(\mathrm{i})_x$ $f_x(0) = x$.
> $(\mathrm{ii})_x$ $f_x(S(y)) = S(f_x(y))$.

なお，「自然数を自然数に移す写像」というのは，変数が自然数，値も自然数であるような関数のことである．

(1) 上の定理における f_x の一意性を証明せよ．ここで「一意性」というのは，「(存在するとすれば) ただ一つしかない」ことを指す．言い換えれば「そういうものが複数あると仮定すると，実は一致してしまう」ということ．
(2) 上の定理における f_x の存在を証明せよ．
(3) この定理には，どんな目的があるだろうか？

[たとえば，彌永昌吉『数の体系　上』（岩波新書，1972 年）の第 3 章を参考にせよ．]