

分数ウェイトの保型形式

伊吹山知義

以下では、通常、本では取り上げられることの少ない分数ウェイトの保型形式の定義などを述べ、テータ変換公式を詳しく説明して、半整数ウェイトの保型形式の理論への入門としたい。

1 保型因子とは何か

1.1 $SL_2(\mathbb{R})$ とその部分群

1.1.1 上半平面と $SL_2(\mathbb{R})$ の作用

次のように複素上半平面 H と特殊線型群 $SL_2(\mathbb{R})$ を定義し、 $SL_2(\mathbb{R})$ の H への作用を定める。(よく知られているように、これは H の正則自己同型写像の全体になる。)

$$\begin{aligned} H &= \{z = x + iy \in \mathbb{C}; x, y \in \mathbb{R}, y > 0\}, \\ SL_2(\mathbb{R}) &= \{g \in M_2(\mathbb{R}); \det(g) = 1\}, \\ g\tau &= \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \quad g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

1.1.2 正則関数への部分群 Γ の作用と保型因子の定義

H 上の正則関数全体のなす複素ベクトル空間 $\mathcal{H} \uparrow$ 上に群 $SL_2(\mathbb{R})$ は、 $f(\tau) \rightarrow f(g\tau)$ で右から作用するが、これをもう少し一般化する。 G を $SL_2(\mathbb{R})$ の部分群とする。 $G \times H$ 上のゼロにならない複素数値関数 $J(g, \tau)$ が、 τ に関して正則で、しかも $g \in G$ についての次の写像

$$\mathcal{H} \ni f(\tau) \rightarrow f(g\tau)J(g, \tau)^{-1} \in \mathcal{H}$$

が、群 G の $\mathcal{H}\downarrow$ への右からの作用を与えているとする。このとき、 $J(g, \tau)$ を群 G の保型因子という。言い換えると、すべての $g \in G$ について $J(g, \tau)$ が τ に関する正則関数であり、かつ

$$J(g_1 g_2, \tau) = J(g_1, g_2 \tau) J(g_2, \tau)$$

のときに J を保型因子という。とくに $J(1_2, \tau) = 1$ である。例としては、整数 k を固定して、 $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について、 $J(g, \tau) = (c\tau + d)^k$ とおけば、これは $G = SL_2(\mathbb{R})$ の保型因子である。この例では保型因子は $SL_2(\mathbb{R})$ 全体で定義されている。しかしそうでないことも多い。すなわち、保型因子は一般には個々の群 G に固有のものであって、 G を含む大きい群にまで保型因子を延長できるとは限らない。

1.1.3 複素数の複素数乗とは何か

以下、複素数のべきを考える必要があるので、老婆心ながら、主値について説明しておく。 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ とする。 $\alpha = |\alpha|e^{i\theta}$ ($\theta \in \mathbb{R}$) と書ける。よって、 $\alpha^\beta = |\alpha|^\beta e^{i\theta\beta}$ と定義すればいいのだが、この表示は θ の取り方に曖昧さがある。 $-\pi < \theta \leq \pi$ とすれば、とりかたは一意的に定まり、このようにとった θ について複素べきを上のように定めれば値が一意的に確定する。これを α^β の定義として主値をとるとする。以下では複素数の複素べきは常に主値の意であるとする。

1.1.4 Γ の実数ウェイトの保型因子と multiplier system

$J(g, \tau)$ を群 G の保型因子とする。ある実数 r について、 $|J(g, \tau)| = |c\tau + d|^r$ がすべての $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$ について成り立つとき、 $J(g, \tau)$ をウェイト r の保型因子という。このときは、固定された g に対して H 上の正則関数 $J(g, \tau)/(c\tau + d)^r$ はどこでも絶対値が 1 であるが、最大値の原理より、このような関数は定数しかあり得ない。よって、任意の $g \in G$ に対して、

$$v(g) = \frac{J(g, \tau)}{(c\tau + d)^r}$$

は τ によらない定数である。これを保型因子 $J(g, \tau)$ の multiplier という。

1.1.5 Γ の保型因子はいくつあるのか

群 G のウェイト r の保型因子が2つあったとする。これらを J_1, J_2 とし、multiplier を v_1, v_2 とすると、

$$\frac{J_1(g, \tau)}{J_2(g, \tau)} = \frac{v_1(g)}{v_2(g)}$$

である。右辺は τ によらず、また保型因子のコサイクル条件より $v_1(g)/v_2(g)$ は G の指標となる。よって、2つの保型因子は G の指標の分だけずれる。よって、 $G/[G, G]$ 分の自由度がある。ここで $[G, G]$ は、 G の交換子群である。

1.2 $SL_2(\mathbb{R})$ の被覆群

1.2.1 被覆群の定義と上半平面上の正則関数への作用

自然数 n を固定する。 $SL_2(\mathbb{R})$ の n 重被覆群 \tilde{G}_n は定義により、次のように記述される (e.g. Yoshida [9])。集合としては

$$\tilde{G}_n = \{(g, \phi(g, \tau)); \phi(g, \tau)^n = (c\tau + d)\}$$

ここで、 $\mu(g, \tau)$ は $c\tau + d$ の n 乗根のどれかという意味である。すなわち一つの g に対して、 \tilde{G}_n の元は n 個定義される。 \tilde{G}_n の元の積は、

$$(g_1, \phi(g_1, \tau))(g_2, \psi(g_2, \tau)) = (g_1 g_2, \phi(g_1, g_2 \tau) \psi(g_2, \tau))$$

と定義する。 \tilde{G}_n の第1成分への射影 $\tilde{G}_n \rightarrow SL_2(\mathbb{R})$ は位相群としての被覆写像になっている。 $SL_2(\mathbb{R})$ の基本群は \mathbb{Z} なので、不分岐 n 重被覆群は唯一つ存在し、それが \tilde{G}_n である。

1.2.2 $SL_2(\mathbb{R})$ の部分群 Γ の保型因子と被覆群の関係

前節で定義した \tilde{G}_n は $SL_2(\mathbb{R})$ を部分群としては含まない。しかし、 $\Gamma \subset SL_2(\mathbb{R})$ のウェイト $1/n$ の保型因子 $J(M, \tau)$ が存在するとする。このとき、

$$\tilde{\Gamma} = \{(M, J(M, \tau)); M \in \Gamma\}$$

とおけば、各元を \tilde{G}_n の元と思って、積を考えるとこれは \tilde{G}_n の部分群とみなせる。すなわち、射影で Γ に戻る \tilde{G}_n の部分群である。これを一

一般的な用語で言えば $SL_2(\mathbb{R})$ から \tilde{G}_n への中心的群拡大が Γ で split しているという言い方になる。

ちなみに、 n 重被覆群 \tilde{G}_n は

$$(g, \phi(g, \tau))f = f(g\tau)\phi(g, \tau)^{-1}$$

により、 Hol には自然に作用していることは注意しておこう。

2 保型形式とは何か

2.1 カスプの定義

第1種フックス群 $\Gamma \subset SL_2(\mathbb{R})$ について、 $\pm 1_2$ 以外の元 $\gamma \in \Gamma$ の固有値が、1のみ、または -1 のみのとき γ は放物元と言われる。このとき、 $\gamma(x) = x$ となる $\mathbb{R} \cup \infty$ の元がただひとつ定まる。このような固定点 x のことを Γ のカスプという。カスプ全体に Γ が作用するが、この作用の軌道をカスプの同値類という。たとえば、 $SL_2(\mathbb{Z})$ のカスプ全体は、 $\mathbb{Q} \cup \infty$ であり、 $SL_2(\mathbb{Z})$ と通約的 (commensurable) な群についても、同様である。簡単のために Γ を $SL_2(\mathbb{Z})$ の指数有限な部分群とすると、 Γ のカスプの同値類は次の集合と1対1である。

$$\Gamma \backslash SL_2(\mathbb{Q}) / (\mathcal{P} \cap SL_2(\mathbb{Q})).$$

ここで、 \mathcal{P} は $SL_2(\mathbb{R})$ 内の上3角行列全体のなす群とした。特に $SL_2(\mathbb{Z})$ のカスプの同値類はただ一つである。(大きさに言えば、局所体の岩沢分解等の帰結。一般の代数群では Borel の一般論あり。)

カスプの実例

$$\Gamma = \Gamma_0(4) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}); c \equiv 0 \pmod{4} \right\}$$

とするとき、カスプの代表は、たとえば $i\infty, 0, 1/2$ である。

2.2 正則保型形式の定義とフーリエ展開

一般の第1種フックス群 Γ の、ウェイト r 、multiplier system $v(M)$ の保型因子 $J(M, \tau)$ をひとつとる。もちろんここで

すべての $M \in \Gamma$ について $|v(M)| = 1$ と仮定している。

この保型因子に対応する正則保型形式を定義する。 $M \in \Gamma$ について

$$(f|_J[M])(\tau) = f(g\tau)J(M, \tau)^{-1}$$

とおく。

Definition 2.1 H 上の正則関数 f が任意の $M \in \Gamma$ について $f|_J[M] = f$ を満たし、かつ、各カस्पで正則なとき Γ に属するウェイト r 、multiplier $v(M)$ の正則保型形式という。

ここで、「各カस्पで正則」という言葉の意味をまだ説明していない。ここは少し微妙な点であり、定義はそれほど易しくはない。簡単に言えば各カस्पの局所座標で「展開」したとき正のべきだけあらわれることを要求するのだが、実数ウェイトだと、そもそもどのような展開があるのかというところから正確に説明する必要が生じる。

このためにいくつか記号を導入する。任意の複素数 r と $T \in SL_2(\mathbb{R})$ に対して

$$\mu_r(g, \tau) = (c\tau + d)^r$$

とおく。ここでべきは主値をとる。任意の S, T について、

$$\sigma(S, T) = \frac{\mu_r(S, T\tau)\mu_r(T, \tau)}{\mu_r(ST, \tau)}$$

とおく。これは $\mu_r(T, \tau)$ の保型因子からのずれの程度をあらわす。群 Γ のウェイト r の保型因子 $J(M, \tau)$ の multiplier v から、 Γ の共役 $L^{-1}\Gamma L$ のウェイト r の保型因子 $J^L(L^{-1}TL, \tau)$ 、ないしは multiplier system v^L を自然に作るには、 $T \in \Gamma$ について

$$\begin{aligned} J^L(L^{-1}TL, \tau) &= \frac{J(T, L\tau)\mu_r(L, \tau)}{\mu_r(L, L^{-1}TL\tau)}, \\ v^L(L^{-1}TL) &= \frac{v(T)\sigma(T, L)}{\sigma(L, L^{-1}TL)} \end{aligned}$$

とおけばよい。すなわち、このとき

Lemma 2.2

(1) $J^L(L^{-1}TL, \tau)$ は $L^{-1}\Gamma L$ の保型因子である。(ただし、この定義は L

の取り方によっている。)

(2) v^L はこの保型因子の *multiplier system* である。すなわち

$$J^L(L^{-1}TL, \tau) = v^L(L^{-1}TL)\mu_r(L^{-1}TL, \tau)$$

である。

(3) $L, T \in \Gamma$ ならば、

$$J^L(L^{-1}TL, \tau) = J(L^{-1}TL, \tau)$$

である。

証明：定義により

$$\begin{aligned} J^L(L^{-1}T_1T_2L, \tau) &= \frac{J(T_1T_2, L\tau)\mu_r(L, \tau)}{\mu_r(L, L^{-1}T_1T_2L\tau)} \\ &= \frac{J(T_1, T_2L\tau)J(T_2, L\tau)\mu_r(L, \tau)}{\mu_r(L, L^{-1}T_1T_2L\tau)}, \\ J^L(L^{-1}T_1L, L^{-1}T_2L\tau) &= \frac{J(T_1, T_2L\tau)\mu_r(L, L^{-1}T_2L\tau)}{\mu_r(L, L^{-1}T_1LL^{-1}T_2L\tau)}, \\ J^L(L^{-1}T_2L, \tau) &= \frac{J(T_2, L\tau)\mu_r(L, \tau)}{\mu_r(L, L^{-1}T_2L\tau)}. \end{aligned}$$

ここで下の2つをかけると上になるので (1) は証明された。定義により

$$\begin{aligned} \sigma(T, L)\mu_r(TL, \tau) &= \mu_r(T, L\tau)\mu_r(L, \tau), \\ \sigma(L, L^{-1}TL)\mu_r(TL, \tau) &= \sigma(L, L^{-1}TL)\mu_r(LL^{-1}TL, \tau) \\ &= \mu_r(L, L^{-1}TL\tau)\mu_r(L^{-1}TL, \tau). \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} v^L(L^{-1}TL)\mu_r(L^{-1}TL, \tau) &= \frac{J(T, L\tau)\mu_r(L, \tau)}{\mu_r(L, L^{-1}TL\tau)} \\ &= \frac{v(T)\sigma(T, L)}{\sigma(L, L^{-1}TL)}. \end{aligned}$$

ゆえに (2) が示された。 $L \in \Gamma$ ならば、 $J(L, \tau) = v(L)\mu_r(L, \tau)$, $J(L, L^{-1}TL\tau) = v(L)\mu_r(L, L^{-1}TL\tau)$ であるから、

$$J(TL, \tau) = J(LL^{-1}TL, \tau) = J(L, L^{-1}TL\tau)J(L^{-1}TL, \tau) = J(T, L\tau)J(L, \tau)$$

より、

$$J^L(L^{-1}TL, \tau) = \frac{J(T, L\tau)J(L, \tau)}{J(L, L^{-1}TL\tau)} = J(L^{-1}TL, \tau)$$

よって (3) も示された。

次に、任意の $L \in SL_2(\mathbb{R})$ について

$$(f|_r[L])(\tau) = f(L\tau)\mu_r(L, \tau)^{-1} = f(L\tau)(c\tau + d)^{-r}$$

と定義する。

- $T \in \Gamma$ について、 $f(T\tau) = f(\tau)J(T, \tau)$ ならば、
 $(f|_r[L])(L^{-1}TL\tau) = (f|_r[L])(\tau)J^L(L^{-1}TL, \tau)$ である。

実際、

$$\begin{aligned} f_L(L^{-1}TL\tau) &= f(TL\tau)\mu_r(L, L^{-1}TL\tau) \\ &= f(L\tau)J(T, L\tau)\mu_r(L, L^{-1}TL\tau)^{-1} \\ &= f(L\tau)J^L(L^{-1}TL, \tau)\mu_r(L, \tau) \\ &= f_L(\tau)J^L(L^{-1}TL, \tau). \end{aligned}$$

以下、 Γ のカスプ $\kappa \in \mathbb{R} \cup \infty$ を一つ固定して、 κ で正則という意味を考えよう。 $L(i\infty) = \kappa$ となる $L \in SL_2(\mathbb{R})$ をひとつ固定する。カスプのまわりで関数を考えるには関数を $i\infty$ に写して、そこで考えるのがわかりやすい。しかし L は一般に Γ の元ではないから、 $J(L, \tau)$ などは定義されていない。よって、 J のかわりに μ_r をもちいて、

$$f_\kappa = f_r|_r[L] = f(L\tau)\mu_r(L, \tau)^{-1}$$

とおく。これがカスプで自然に考えられる関数である。 Γ_κ を κ を固定する Γ の元全体のなす部分群とすると、第1種フックス群の一般論より、ある $h_0 \in \mathbb{R}$ と $\epsilon = \pm 1$ があって、

$$L^{-1}\Gamma_\kappa L = L^{-1}\Gamma L \cap \mathcal{P} = \begin{cases} \{\pm 1\} \times \left\{ \begin{pmatrix} 1 & h_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^m ; m \in \mathbb{Z} \right\}, & (\pm 1 \in \Gamma \text{ の場合}), \\ \left\{ \left(\epsilon \begin{pmatrix} 1 & h_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^m ; m \in \mathbb{Z} \right\} & (\pm 1 \notin \Gamma \text{ の場合}). \end{cases}$$

となる。あとの都合のために、

$$h = \begin{cases} h_0 & \pm 1 \in \Gamma \text{ または } \epsilon = 1 \\ 2h_0 & \pm 1 \notin \Gamma \text{ かつ、 } \epsilon = -1 \end{cases}$$

とおく。前にも述べたが

- f が Γ について保型的なら、 f_κ は $L^{-1}\Gamma L$ について保型的である。すなわち、

$$f_\kappa(L^{-1}TL\tau) = J^L(L^{-1}TL, \tau)f_\kappa(\tau).$$

よって、 f_κ はカスプの近傍の関数として $L^{-1}\Gamma_k L$ の元の作用であまりかわらない。しかし、 f_κ 自身は平行移動で不変な関数にはなっていない。これに近い関数 F をとって、 $F(\tau+n) = F(\tau)$ となる正整数 n があることをいいたい。

- $R \in \mathcal{P}$ で、かつ R の対角成分が正だとすると、任意の $L \in SL_2(\mathbb{R})$ について

$$\sigma(L^{-1}RL, L) = \sigma(L, R) = 1$$

が成立する。(証明は省略する。cf. [1])

- 前に定義した h について $U = \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおき、 $L^{-1}TL = U$ となる $T \in \Gamma$ をとるとき、次の等式が成り立つ。

$$J^L(U, \tau) = v^L(U) = v(T) \frac{\sigma(LUL^{-1}, L)}{\sigma(L, U)} = v(T) = v(LUL^{-1}).$$

- multiplier system は絶対値が 1 と仮定しているので、 $v(T) = v^L(U) = e^{2\pi i n_\kappa}$ ($0 \leq n_\kappa < 1$) とおいてよいが、このとき、

$$f_L(\tau + h) = e^{2\pi i n_\kappa} f_L(\tau)$$

である。

- $F(\tau) = e^{-2\pi i n_\kappa \tau} f_L(h\tau)$ とおけば、

$$F(\tau + 1) = F(\tau)$$

である。特に

$$F(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a(n)e^{2\pi i n \tau}$$

と展開できる。すなわち、

$$f_L(\tau) = e^{2\pi i n_\kappa \tau / h} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a(n) e^{2\pi i n \tau / h}$$

である。

以上により、最後の展開で、 $n < 0$ ならば $a(n) = 0$ ものをカusp κ で正則という。これで「すべてのカuspで正則」という意味が説明できた。ちなみに、この概念はカuspの Γ 同値類のみにより、 L の取り方にはよらない。 f がカusp κ で正則なとき、 $a(n) \neq 0$ となる最小の n を N_κ と書こう。すべてのカuspで、 $n_\kappa + N_\kappa > 0$ となる正則保型形式をカusp形式という

2.3 次元公式についての注意

分数ウェイトであろうと、実数ウェイトであろうと、通常の Riemann Roch の定理による保型形式の次元公式の計算原理は有効である。この計算原理はおおざっぱに言って、有理型保型形式の存在を言う部分と、その存在を仮定して、その因子を調べて、適当な位数の極と零をもつ保型関数の次元に帰着する部分にわかれている。前者は実数ウェイトでは通常の整数ウェイトの議論そのままではうまくいかないのが、構成するなど別に議論する必要がある。さらにはその因子も求める必要がある。分数ウェイトならばウェイトが大きければ因子を求めるのは基本的には微分因子に帰着させれば可能だが、無理数ウェイトのときは、あるいは面倒なのかもしれない。保型関数の次元の方は、リーマン面の局所座標と上半平面の点の座標とのずれなどを考えるために、分数係数の因子を整数係数の因子に置き換えるなどの操作が（通常の整数ウェイトの場合でも）必要であった。またカuspでは、奇数ウェイトの保型形式の次元公式の計算には regular cusp と irregular cusp という2種類のカuspでの寄与の違いなどが出た。同様の事情で、計算法は当然 multiplier system によって、少し変わる。この点に注意さえすれば、少なくともウェイトの大きいところで具体的に与えられた保型因子についての保型形式の次元を求めるのはそれほど難しくはないであろう。詳しくは省略するが、実例は、たとえば [2] などを参照されたい。

3 半整数ウェイトの保型因子の詳しい実例

3.1 デデキントのエータ関数

定義：Dedekind の eta 関数と、Ramanujan の Delta 関数は $q = e^{2\pi i\tau}$ として、次のように定義される。

$$\eta(\tau) = q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n),$$

$$\Delta(\tau) = \eta(\tau)^{24}.$$

知られていること： $\Delta(\tau)$ は $SL_2(\mathbb{Z})$ のウェイト 12 のカスプ形式である。また、 $\eta(\tau)$ は $SL_2(\mathbb{Z})$ のウェイト 1/2 で multiplier 付きの保型形式である。 $\eta(\tau)$ の multiplier system は正確に記述されている。これを説明するために、少し記号を導入する。

平方剰余と関係して、ルジャンドル記号、またはヤコービ記号 $\left(\frac{a}{b}\right)$ というものが定義されているが、 b が負の時の意味がややあいまいである。この部分を正確に定めるために、平方剰余記号を次のように定義する。

互いに素な整数 $c, d \in \mathbb{Z}$ で $c \neq 0$ かつ d が奇数のものをとる。次のように 2 種類の記号を定める。

$$\left(\frac{c}{d}\right)^* = \left(\frac{c}{|d|}\right),$$

$$\left(\frac{c}{d}\right)_* = \left(\frac{c}{|d|}\right) (-1)^{(sgn(c)-1)(sgn(d)-1)/4}.$$

ここで右辺の記号 $(*/_*)$ は通常 of (分母が正の) ヤコービ記号である。また、補足的に

$$\left(\frac{0}{\pm 1}\right)^* = \left(\frac{0}{\pm 1}\right)_* = 1$$

と定義する。これらの記号は Petersson の論文によっている。ちなみに、 c と d がともに奇数ならば、相互法則より

$$\left(\frac{d}{c}\right)^* = \left(\frac{d}{|c|}\right) = \left(\frac{c}{d}\right)_* (-1)^{(c-1)(d-1)/4}.$$

となる。

さて、非常に古くから知られているエータ関数の変換公式を述べる。

任意の $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ について、次が成り立つ。

Proposition 3.1 (Mertens, Hermite, Petersson, Rademacher etc)

$$\eta(M\tau) = v(M)(c\tau + d)^{1/2}\eta(\tau),$$

where

$$v(M) = \begin{cases} \left(\frac{d}{c}\right)^* \exp\left(\frac{\pi i}{12}((a+d-bdc-3)c+bd)\right) & \text{if } c \text{ is odd} \\ \left(\frac{c}{d}\right)_* \exp\left(\frac{\pi i}{12}((a+d-bdc-3d)c+bd+3d-3)\right) \\ = \left(\frac{c}{d}\right)_* \exp\left(\frac{\pi i}{12}((a-2d-bdc)c+bd+3d-3)\right) & \text{if } c \text{ is even} \end{cases}$$

(証明は [2] の文献表の Knopp, Rademacher などの本や Petersson の論文 [6] を参照されたい。もっと古い文献については直接見たわけではないので略す。T. Asai, H. Saito 等の論文に引用があるかと思う。なお、 $\log(\eta(\tau))$ の変換公式は Dedekind 和を用いて記述されることが知られているが、これの対数をとるという形で η の変換公式を得るのは非常に面倒である。両者は一応別物と考えるほうがよいように思う。)

エータ関数から決まる保型因子を重さが $1/2$ の保型因子として採用する手もあるのだが、普通はそうはしていない。エータ関数は実際は次節で述べるテータ関数の一種であるが、テータ関数として見ると、エータ関数の定義にはやや特殊なところがある。一般論としては次節で述べるテータ関数を直接考えるほうが、いろいろ素直で取り扱いやすいということかと思う。

ちなみに、エータとテータの関係式を証明抜きで書いておく。テータ関数の記号は次節を参照されたい。

$$\begin{aligned} \eta(\tau) &= e^{\pi i \tau / 12} \sum_{p \in \mathbb{Z}} (-1)^p e^{\pi i p (3p+1) \tau} \\ &= e^{-2\pi i / 12} \theta_{1/6, 1/2}(3\tau) \end{aligned}$$

この関係式をオイラーが苦勞のすえ証明したのは有名である。証明はたとえば、[8] p. 145 を見よ。

エータ関数の ($SL_2(\mathbb{Z})$ の一般元に対する) 変換公式は、次節のテータ関数の変換公式には直接は含まれない。次節の応用として、エータ関数の変換公式 Proposition 3.1 を求めるのは良い演習問題であると思うが、ここでは省略する。

3.2 テータ関数の変換公式（一般論）

簡単のために、任意の複素数 α について $e(\alpha) = e^{2\pi i\alpha}$ と書くことにする。2次元ベクトル $m = (m', m'') \in \mathbb{Q}^2$ と $\tau \in H, z \in \mathbb{C}$ に対して、

$$\theta_m(\tau, z) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} e\left(\frac{1}{2}(p + m')^2\tau + (p + m')(z + m'')\right)$$

とおき、これを characteristic m に対応するテータ関数という。この変換法則を説明する。 $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ について、記号 $M \circ m$ を

$$M \circ m = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} m + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} cd \\ ab \end{pmatrix}$$

で定義する。

Proposition 3.2 (古典的なテータ変換公式)

$$\theta_{M \circ m}\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \frac{z}{c\tau + d}\right) = \kappa(M) e(\phi_m(M)) (c\tau + d)^{1/2} e\left(\frac{cz^2}{2(c\tau + d)}\right) \theta_m(\tau, z).$$

ここで、 $(c\tau + d)^{1/2}$ は主値であり、

$$\phi_m(M) = -(bdm'^2 + acm''^2 - 2bcm'm'' - ab(dm' - cm''))/2,$$

また、 $\kappa(M)$ は τ にも m にもよらない定数で、 $\kappa(M)^8 = 1$ である。

このあたりの定義や流儀には、昔からいろいろなものがあり、記号も混乱している。私は Igusa [4] が一番すっきりとわかりやすいと思うので、その記号に従っている。Siegel 保型形式の場合を含む上の形の一般公式の証明は Igusa [4] を参照されたい。(ただし Igusa I と II では多少記号が違うので注意。)

3.3 テータ関数の変換公式（ガウスの和と平方剰余）

以下、 $\kappa(M)$ をすべての $M \in SL_2(\mathbb{Z})$ について具体的に書き下すことを考える。これは $SL_2(\mathbb{Z})$ の生成元についてのみ公式を書くよりは、遙かに手間がかかり、深い結果であることには注意されたい。

計算は2段階にわかれる。最初に指数和（2次形式のガウスの和）の表示として得られ、次にそれを算術を使って書きかえることにより、平方剰余記号による表示を得る。

Proposition 3.3 $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ に対して、 $c \neq 0$ ならば、

$$\begin{aligned} \kappa(M) &= \frac{1}{2}|c|^{-1/2} e^{-\frac{\pi i}{4} \text{sgn}(c)} e\left(\frac{abcd}{4} + \frac{acd^2}{8}\right) \sum_{x \bmod 2c} e\left(\frac{a}{2c}x^2 + \frac{a(b+d)}{2}x\right) \\ &= e\left(\frac{abcd}{4} + \frac{acd^2}{8}\right) \sum_{x \bmod 2c} e\left(\frac{a(1+bc+cd)}{2c}x^2\right) \end{aligned}$$

である。

これは次のように書きかえられる。

Theorem 3.4 各 $M \in SL_2(\mathbb{Z})$ について $\kappa(M)$ は次のように与えられる。

$$\kappa(M) = \begin{cases} e\left(\frac{abcd}{4} + \frac{acd^2}{8} - \frac{c}{8}\right) \left(\frac{a}{|c|}\right) & c \text{ が奇数の場合} \\ \left(\frac{c}{d}\right)_* e\left(\frac{1}{8}(d-1)\right) = \left(\frac{2c}{d}\right)_* \epsilon_d^{-1} & c \text{ が偶数の場合.} \end{cases}$$

ここで $d \equiv 1 \pmod{4}$ または $d \equiv 3 \pmod{4}$ に応じて、 $\epsilon_d = 1$ または i とおいた。

実はすべての $M \in SL_2(\mathbb{Z})$ に対するこのような形での詳しい $\kappa(M)$ の公式は書物でも論文でも見たことがない。もちろん新結果と言うのは、おおげさであろうが、印刷された証明は見たことがないので、最後の節に証明のアウトラインを述べておく。(なお、 M がテータ群と呼ばれる $SL_2(\mathbb{Z})$ の部分群に属するときには類似の公式がよくでている。この場合は θ_{00} がその群に対する保型形式になっているので、より意義があると著者が考えるせいであろうと思う。)

本サマースクールのテーマにかかわる、以上の重要な応用として、

$$\theta(\tau) = \theta_{00}(2\tau) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} e(p^2\tau)$$

の $\Gamma_0(4)$ に関する変換公式があげられる。すなわち、

Proposition 3.5 任意の $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(4)$ に対して、

$$\theta\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = \epsilon_d^{-1} \left(\frac{c}{d}\right)_* (c\tau + d)^{1/2} \theta(\tau).$$

となる。

証明は、 $\begin{pmatrix} a & 2b \\ 2^{-1}c & d \end{pmatrix}$ について、前の定理を適用すれば直ちに得られる。ふつうは半整数ウェイト $k - 1/2$ の保型因子としては、 $\Gamma_0(4)$ の部分群に対して、

$$j(M, \tau) = (\theta(M\tau)/\theta(\tau))^{2k-1}$$

を採用するのが一般的である。この場合の保型形式を論じるのが、このサマースクールの課題であった。

4 テータ変換公式の証明のアウトライン

4.1 θ_{00} にすべて帰着すること

テータ関数 $\theta_m(\tau, z)$ は、ほぼ $m \bmod 1$ のみによって決まる。実際、 $n = {}^t(n', n'') \in \mathbb{Z}^2$ ($n_i \in \mathbb{Z}$) ならば、

$$\theta_{m+n}(\tau, z) = e(m' n'') \theta_m(\tau, z)$$

が定義から計算することによりすぐわかる、符号を除けば $\theta_m(\tau, z)$ は、 $m \bmod 1$ にしかよらないし、 $\theta_m(\tau, z)$ の適当にべき乗をとれば $m \bmod 1$ のみによっている。characteristic $m \in \mathbb{Q}$ と $0 = {}^t(0, 0)$ の関係は、定義の指数部分を展開することにより、次の式で与えられる。

$$\theta_m(\tau, z) = e\left(\frac{1}{2}m'^2\tau + m'(\tau + m'')\right) \theta_0(\tau, z + m'\tau + m'').$$

これより、 $\theta_0(\tau, z)$ の変換公式から、 $\theta_m(\tau, z)$ の変換公式が得られることになる。特に $m = 0$ に対しては $\phi_m(M) = 0$ ($M \in SL_2(\mathbb{Z})$) であるから、公式はやや単純になる。

4.2 $\theta_{00}(\tau, z)$ の変換公式

$\tau \in H$, $a, z \in \mathbb{C}$ について、 $e(x) = e^{2\pi i x}$ として、次の公式が成り立つ。(証明は Poisson formula の簡単な応用)

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e\left(\frac{1}{2}(n+a)^2\tau + z(n+a)\right) = (-i\tau)^{1/2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e\left(-\frac{1}{2}(z-n)^2\tau^{-1} + na\right).$$

これより、

$$\theta_{00}\left(-\frac{1}{\tau}, \frac{z}{\tau}\right) = (\tau/i)^{1/2} e\left(\frac{z^2}{2\tau}\right) \theta_{00}(\tau, z).$$

また $U = \begin{pmatrix} 1 & \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とすると、 $U \circ 0 = (0, 1/2)$. これを分母を省略して 01 と書くと

$$\theta_{01}(\tau + 1, z) = \theta_{00}(\tau, z)$$

である。これらが $SL_2(\mathbb{Z})$ の 2 つの生成元

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の作用であることを考えると、以上より、up to constant では、変換公式が求まったことになる。しかし、 $\kappa(M)$ を求めるにはこれだけでは不十分である。

4.3 $\kappa(M)$ の計算のアウトライン

テータ変換公式における $\kappa(M)$ は、 $\theta_{00}(\tau)$ の変換公式を求めることにより計算できる。前節の、 $\tau \rightarrow -\tau^{-1}$ における変換公式その他を用いるのであるが、この計算はかなり複雑である。

4.3.1 ガウスの和への帰着

以下の計算には、たとえば Siegel [7] が大いに参考になった。まず、

$$M0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} cd \\ ab \end{pmatrix}$$

である。 $M \in SL_2(\mathbb{Z})$ について、 $\theta_{M \cdot 0}(M\tau)/\theta(\tau)$ の公式を求めよう。

$c = 0$ ならば、やさしい。実際、 $a = d = \pm 1$ になるから、

$$\theta_{M \cdot 0}(M\tau) = \theta_{M \cdot 0}(\tau + d^{-1}b) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} e\left(\frac{1}{2}p^2(\tau + d^{-1}b) + p\left(\frac{ab}{2}\right)\right).$$

しかし、 $d^{-1}bp^2/2 \equiv abp/2 \pmod{1}$ より、上式は $\theta_0(\tau)$ と一致する。特に、 $d = 1$ または $d = -1$ に応じて、 $\sqrt{c\tau + d} = \sqrt{d} = 1$ または i であるか

ら、 $c = 0$ ならば、 $d = 1$ または $d = -1$ に応じて $\kappa(M) = 1$ または i^{-1} である。

よって、以下では $c \neq 0$ と仮定する。まず、 $c \neq 0$ のとき、

$$\left(\frac{c\tau + d}{ci}\right)^{1/2} = |c|^{-1/2} e\left(-\frac{\pi i}{4} \operatorname{sgn}(c)\right) (c\tau + d)^{1/2}.$$

である。 M を簡単な作用の積に分解するために

$$z_2 = \tau + \frac{d}{c}, \quad z_1 = -\frac{1}{z_2}$$

とおくと、

$$M\tau = \frac{a}{c} + \frac{z_1}{c^2}.$$

よって

$$\theta_{M,0}\left(\frac{a}{c} + \frac{z_1}{c^2}\right) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} e\left(\frac{1}{2}\left(p + \frac{cd}{2}\right)^2 \left(\frac{a}{c} + \frac{z_1}{c^2}\right) + \left(p + \frac{cd}{2}\right) \frac{ab}{2}\right)$$

を考えるが、ここで $p = p_1 + 2cp_0$ とおく。 $(p_0$ は任意の整数を動き、 p_1 は法 $2c$ の代表を渉る。) すると、

$$\frac{a}{2c} \left(p_1 + 2cp_0 + \frac{cd}{2}\right)^2 \equiv \frac{a}{2c} \left(p_1 + \frac{cd}{2}\right)^2 \pmod{1}$$

であるから、

$$\theta_{M,0}(M\tau) = \sum_{p_1 \bmod 2c} e\left(\frac{a}{2c} \left(p_1 + \frac{cd}{2}\right)^2\right) \sum_{p_0 \in \mathbb{Z}} e\left(\frac{1}{2}\left(p_0 + \frac{p_1}{2c} + \frac{d}{4}\right)^2 (4z_1) + \left(p_0 + \frac{p_1}{2c} + \frac{d}{4}\right) abc\right).$$

テータの変換公式より、 p_0 の和の部分は

$$\begin{aligned} & \left(\frac{4z_1}{i}\right)^{-1/2} \sum_{p_0 \in \mathbb{Z}} e\left(-\frac{1}{2}(abc - p_0)^2 (4z_1)^{-1} + p_0 \left(\frac{p_1}{2c} + \frac{d}{4}\right)\right) \\ &= \left(\frac{z_2}{4i}\right)^{1/2} \sum_{p_0 \in \mathbb{Z}} e\left(\frac{p_0^2}{8} z_2 + (p_0 + abc) \left(\frac{p_1}{2c} + \frac{d}{4}\right)\right). \end{aligned}$$

ここで p_1 の和にかかわる部分を再度まとめると

$$\sum_{p_1 \bmod 2c} e\left(\frac{a}{2c} \left(p_1 + \frac{cd}{2}\right)^2 + \frac{(p_0 + abc)p_1}{2c}\right)$$

である。ここで (p_0 を固定して) p_1 を $p_1 + c$ に置き換えてもよい。

$$\begin{aligned} & \frac{a}{2c} \left(p_1 + c + \frac{cd}{2} \right)^2 + \frac{(p_1 + c)(p_0 + abc)}{2c} \\ \equiv & \frac{a}{2c} \left(p_1 + \frac{cd}{2} \right)^2 + \frac{p_1(p_0 + abc)}{2c} + \frac{ca(1 + d + b)}{2} + \frac{p_0}{2} \pmod{1}. \end{aligned}$$

ac が奇数ならば、 $ad - bc = 1$ より、 b, d の一方が偶数で一方が奇数である。よって $1 + d + b \equiv 0 \pmod{2}$ 。よっていつでも $ac(1 + b + d) \equiv 0 \pmod{2}$ 。ゆえに置き換える前と $e(p_0/2)$ だけずれるので、 $p_0 \equiv 0 \pmod{2}$ 以外の部分は消えてしまう。ゆえに $p_0 = 2p_2$ とおいて書きかえると

$$\theta_{M,0}(M\tau) = \left(\frac{c\tau + d}{4ci} \right)^{1/2} \sum_{p_1 \pmod{2c}} \sum_{p_2 \in \mathbb{Z}} e\left(\frac{1}{2} p_2^2 \tau \right) e(f(p_1, p_2)).$$

ただし、ここで

$$f(p_1, p_2) = \frac{a}{2c} \left(p_1 + \frac{cd}{2} \right)^2 + (2p_2 + abc) \left(\frac{p_1}{2c} + \frac{d}{4} \right) + \frac{d}{2c} p_2^2$$

とおいた。ここで、ガウスの和の部分から p_2 を消したい。このために、次のようにする。 p_2 を固定して、 p_1 を $p_1 - dp_2$ に置き換えても、和は変わらないのでいつでも $bd(1 - a - c) \equiv 0 \pmod{2}$ になることに着目すれば

$$f(p_1 - dp_2, p_2) \equiv \frac{a}{2c} p_1^2 + \frac{a(b+d)}{2} p_1 + \frac{abcd}{4} + \frac{acd^2}{8}$$

であるが、さらに、いささか人工的であるが、ガウスの和を見やすくするために

$$\frac{a(b+d)}{2} p_1^2 \equiv \frac{a(b+d)}{2} p_1 \pmod{1}$$

に注意して右辺で置き換えれば結局 $c \neq 0$ に対して、

$$\theta_{M,0}(M\tau) = \kappa(M)(c\tau + d)^{1/2} \theta(\tau)$$

ただし

$$\begin{aligned} \kappa(M) &= \frac{1}{2} |c|^{-1/2} e^{-\frac{\pi i}{4} \text{sgn}(c)} e\left(\frac{abcd}{4} + \frac{acd^2}{8} \right) \sum_{x \pmod{2c}} e\left(\frac{a}{2c} x^2 + \frac{a(b+d)}{2} x \right) \\ &= \frac{1}{2} |c|^{-1/2} e^{-\frac{\pi i}{4} \text{sgn}(c)} e\left(\frac{abcd}{4} + \frac{acd^2}{8} \right) \sum_{x \pmod{2c}} e\left(\frac{a(1 + bc + cd)}{2c} x^2 \right) \end{aligned}$$

が得られた。

あとでより詳しく計算するが、ガウスの和の公式などから、 $\kappa(M)$ が絶対値 1 であり、さらには 1 の 8 乗根であることがわかる。

特別な場合にはもっと簡単な表示が存在する。たとえば $cd \equiv 0 \pmod{2}$ のときは、上記の最初の式で、 x を $x - cd/2$ に置き換えて計算すれば

$$\kappa(M) = \frac{1}{2}|c|^{-1/2}e\left(-\frac{\pi i}{4}\operatorname{sgn}(c)\right) \sum_{x \pmod{2c}} e\left(\frac{a}{2c}x^2 + \frac{ab}{2}x\right).$$

を得る。ここで $abx/2 \equiv abx^2/2 \pmod{1}$ を利用して書きなおせば

$$\begin{aligned} \kappa(M) &= \frac{1}{2}|c|^{-1/2}e\left(-\frac{\pi i}{4}\operatorname{sgn}(c)\right) \sum_{x \pmod{2c}} e\left(\frac{a(1+bc)}{2c}x^2\right) \\ &= \frac{1}{2}|c|^{-1/2}e\left(-\frac{\pi i}{4}\operatorname{sgn}(c)\right) \sum_{x \pmod{2c}} e\left(\frac{a^2d}{2c}x^2\right). \end{aligned}$$

ここで、 $(a, c) = 1$ であるが、 c が偶数ならば、 a は奇数であり、 c が奇数ならば、 $cd \equiv 0 \pmod{2}$ の仮定より d は偶数であり、 x は \pmod{c} を 2 重に動くと思ってよい。いずれにしても、 x を ax に変えても和は変わらず、結局

$$\begin{aligned} \kappa(M) &= \frac{1}{2}|c|^{-1/2}e\left(-\frac{\pi i}{4}\operatorname{sgn}(c)\right) \sum_{x \pmod{2c}} e\left(\frac{d}{2c}x^2\right) \\ &= |c|^{-1/2}e\left(-\frac{\pi i}{4}\operatorname{sgn}(c)\right) \sum_{x \pmod{c}} e\left(\frac{d}{2c}x^2\right) \end{aligned}$$

となる。

4.3.2 平方剰余記号での表示

以下、 $M \in SL_2(\mathbb{Z})$ は一般として、 $\kappa(M)$ をもっと簡単に具体的に書くことを考えよう。途中、ガウスの和の計算が必要になるが、標準的なことであるから詳しい説明は省略する。(通常の高ウスの和をもとに、中国の剰余定理で分解すれば一般の場合が得られる。) 簡単のために

$$\kappa'(M) = \sum_{x \pmod{2c}} e\left(\frac{a}{2c}x^2 + \frac{a(b+d)x^2}{2}\right)$$

とおく。

1. c が奇数の場合 :

c が奇数と仮定する。このとき、 a が偶数ならば、

$$\begin{aligned}\kappa'(M) &= \sum_{x \bmod 2c} e\left(\frac{a/2}{c}x^2\right) \\ &= 2 \sum_{x \bmod c} e\left(\frac{a/2}{c}x^2\right) \\ &= 2 \left(\frac{2a \operatorname{sgn}(c)}{|c|}\right) |c| \epsilon_{|c|}.\end{aligned}$$

となる。同様に a が奇数ならば、 $b+d$ も奇数であり

$$\begin{aligned}\kappa'(M) &= \sum_{x \bmod 2c} e\left(\frac{a(1+c)}{2c}x^2\right) \\ &= 2 \sum_{x \bmod c} e\left(\frac{a(1+c)/2}{c}x^2\right) \\ &= 2 \left(\frac{2a \operatorname{sgn}(c)}{|c|}\right) |c|^{1/2} \epsilon_{|c|}.\end{aligned}$$

また、場合わけして計算すれば、任意の（負かもしれない）奇数 c について

$$e\left(-\frac{\operatorname{sgn}(c)}{8}\right) \left(\frac{2 \operatorname{sgn}(c)}{|c|}\right) \epsilon_{|c|} = e\left(-\frac{c}{8}\right)$$

が容易にわかるから、よって、 c が奇数ならば、

$$\begin{aligned}\kappa(M) &= e^{-\frac{\pi i}{4} \operatorname{sgn}(c)} e\left(\frac{abcd}{4} + \frac{acd^2}{8}\right) \left(\frac{2a \operatorname{sgn}(c)}{|c|}\right) \epsilon_{|c|} \\ &= e\left(\frac{abcd}{4} + \frac{acd^2}{8} - \frac{c}{8}\right) \left(\frac{a}{|c|}\right)\end{aligned}$$

となる。ちなみに、 $ad - bc = 1$ であるから、 $\left(\frac{a}{|c|}\right) = \left(\frac{d}{|c|}\right)$ である。

2. c が偶数の場合 :

c を偶数とすると、 a は奇数である。前に述べたように、 $cd \equiv 0 \pmod{2}$ のときは、 $\kappa(M)$ の、より単純な公式があった。すなわち、

$$\kappa'(M) = \sum_{x \bmod 2c} e\left(\frac{d}{2c}x^2\right)$$

とおくと、

$$\kappa(M) = \frac{1}{2}|c|^{-1/2} e\left(-\frac{1}{8}\text{sgn}(c)\right) \kappa'(M)$$

であった。 $c = 2^s c_0$ ($s \geq 1$, c_0 は奇数) とする。 $2^{s+1}x_0 + c_0y_0 = 1$ として、 $x_1 = xx_0$, $x_2 = xy_0$ とおくと、 $x = 2^{s+1}x_1 + c_0x_2$ であり、代入して計算すると、

$$\begin{aligned} \kappa'(M) &= \sum_{x_1 \bmod c_0} e\left(\frac{2^{s+1}d}{c_0}x^2\right) \sum_{x_1 \bmod 2^{s+1}} e\left(\frac{dc_0}{2^{s+1}}x^2\right) \\ &= |c_0|^{1/2} \epsilon_{|c_0|} \left(\frac{2^{s+1}d \text{sgn}(c_0)}{|c_0|}\right) 2^{(s+2)/2} e\left(\frac{dc_0}{8}\right) \\ &\quad \times \begin{cases} 1 & s \text{ が偶数の場合} \\ (-1)^{(d^2c_0^2-1)/8} & s \text{ が奇数の場合} \end{cases} \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned} \kappa(M) &= e^{-\frac{\pi i}{4}\text{sgn}(c)} e\left(\frac{c_0d}{8}\right) \left(\frac{d \text{sgn}(c_0)}{|c_0|}\right) \epsilon_{|c_0|} \times \begin{cases} \left(\frac{2}{|c_0|}\right) & s \text{ が偶数} \\ \left(\frac{2}{|c_0|}\right) \left(\frac{2}{|d|}\right) & s \text{ が奇数} \end{cases} \\ &= \left(\frac{d}{|c_0|}\right) e\left(\frac{c_0(d-1)}{8}\right) \times \begin{cases} 1 & s \text{ が偶数} \\ \left(\frac{2}{|d|}\right) & s \text{ が奇数} \end{cases} \end{aligned}$$

となる。もう少し簡単に表すために、平方剰余の相互法則を適用しよう。前に述べた Petersson の平方剰余記号を用いると、定義により d が奇数のとき、

$$\left(\frac{c}{d}\right)_* = \left(\frac{c}{|d|}\right) (-1)^{(\text{sgn}(c)-1)(\text{sgn}(d)-1)/4}$$

であり、 c_0, d が共に奇数のとき、平方剰余の相互法則

$$\left(\frac{|d|}{|c_0|}\right) \left(\frac{|c_0|}{|d|}\right) = (-1)^{(|c_0|-1)(|d|-1)/4}$$

をもちいると、場合わけして計算すれば

$$\left(\frac{d}{|c_0|}\right) \left(\frac{2}{|d|}\right) = \left(\frac{2c_0}{d}\right)_* (-1)^{(c_0-1)(d-1)/4}$$

となることもわかる。

よって、もっと簡単に

$$\begin{aligned}\kappa(M) &= \left(\frac{c}{d}\right)_* e\left(\frac{1}{8}c_0(d-1) - \frac{1}{8}(c_0-1)(d-1)\right) \\ &= \left(\frac{c}{d}\right)_* e\left(\frac{1}{8}(d-1)\right) \\ &= \left(\frac{2c}{d}\right)_* e\left(\frac{1}{16}(d^2-1) + \frac{1}{8}(d-1)\right) \\ &= \left(\frac{2c}{d}\right)_* \epsilon_d^{-1}.\end{aligned}$$

以上をまとめると、定理 3.4 を得る。

5 あとがき

文献は必要最小限しかつげなかった。より詳しい文献表は、[1], [2] を参照されたい。なお、今回のトークの内容を含む、より詳しい解説（およびその他のいろいろな内容）は [3] に執筆中である。

参考文献

- [1] R. A. Rankin, *Modular forms and functions*, Cambridge Univ. Press, 1977.
- [2] T. Ibukiyama, *Modular forms of rational weights and modular varieties*, to appear in *Abhand. Math. Semi. Univ. Hamburg* **70** (2000).
- [3] 伊吹山知義、保型形式特論（準備中）、共立出版予定（2003 年頃？）
- [4] J. Igusa, *On the graded ring of theta constants I, II*, *Amer. J. Math.* 86(1964), 219–245; *ibid.* 88(1966), 221–236.
- [5] J. Igusa, *Theta functions*, Springer Verlag 1972.
- [6] H. Petersson, *Über die arithmetischen Eigenschaften eines Systems multiplikativer Modulfunktionen von Primzahlstufe*, *Acta Math.*, 95(1956), 57–110.

- [7] C. L. Siegel, Indefinite quadratische Formen und Funktionen theorie I, Math. Ann. 124, (1951).
- [8] 梅村悟、楕円関数論（楕円曲線の解析学）、東京大学出版会、2000年7月
- [9] H. Yoshida, Remarks on metaplectic representations of $SL(2)$, J. Math. Soc. Japan, Vol. 44 No. 3 (1992), 351–373.

〒560-0043

大阪府豊中市待兼山町1-1-6

大阪大学大学院理学研究科数学教室

伊吹山知義

ibukiyam@math.wani.osaka-u.ac.jp