Holonomic D-modules

落合啓之 (Hiroyuki Ochiai) *

Abstract

保型形式や特殊関数論などで現れる具体的な微分方程式を扱う人に向けて, D 加群の基本的な言葉遣い, その要点, 主要な定理の使い方を解説する. したがって話の筋の簡単のため状況を限定して述べ, 知られている最も一般の場合まで含むことを目標としない.

Contents

*白馬の報告, version February 1, 2005

1 Prolog

1.1 D 加群の３側面

D 加群は次のような 3 側面を持っている.

- 環 $\mathcal{D}$ の加群としての 'D' 加群.
- 微分方程式.
- 可積分接続 (integrable connection).

それぞれ, 代数的, 解析的, 幾何的 (位相的) 見方を反映している. 第 1 の見方は, 必ずしも $\mathcal{D}$ が微分作用素環でなくとも一般の環でも成り立つことも含んでいて, それを逆用して他の環の加群 (例えば Lie 環の普遍包絡環の表現) と直接の関係をつけることができる (e.g., Beilinson-Bernstein 対応). また, 初等的な環論や代数幾何の操作, 例えば係数拡大や局所化などの操作を適用することができる. 必要となる部分は Appendix(§9) にざっと紹介した.

第 2 の見方「D 加群 = 微分方程式」はこの小文の前提となるものであり, 次の § 2 ですぐに説明する. 微分方程式に関する概念は D 加群を用いて定義されるので, この言い換えをまず押さえておく.

第３の見方は, １階の線形偏微分方程式の１形態であり, 解のモノドロミーを通じて基本群の線形表現, 位相空間上の局所系 (local system, 局所定数層 locally constant sheaf) という位相概念に結びつく．微分方程式や接続が特異点を許す場合には, constructible sheaf, perverse sheaf といった適切な概念へと昇華していく ([青本喜多]「まえがき」)．第２の見方と第３の見方は, Riemann-Hilbert 対応 (微分方程式と解の位相的情報の対応) に代表されるような対応によって, ある意味で等価であることが知られている．ただし, 第３の見方は, 解の性質のうち, 位相的な部分を抽出したものであり, 解として現れる関数の全ての性質がこの情報に含まれているあるいはこの情報から direct に読み取れるわけではないので, 特殊関数論として知りたい情報とは方向性の違いもある．

代数解析学を狭く解釈すれば, 解析的な見方で微分方程式を D 加群と見たものを代数的な手法を用いて調べ, 微分方程式系の解の解析的あるいは位相的情報を手に入れることということになろう．ただし, 歴史的にはそれとは違った方向性にも重要性がありしかも有名なので, 単一の切り口で理解しようとすると混乱するかもしれない．例えば, リー群の表現論と D 加群[1] との絡みに限定しても,「Beilinson-Bernstein 対応 (表現の局所化)」「超幾何関数論」「Springer 対応」のそれぞれで活用, 強調される部分は同一ではなく, 場面ごとに D 加群の異なった側面を利用した交流がされている．

この文章では, 研究会の主題「保型形式上の微分作用素とその応用」との関連から微分方程式としての見方がやや強調されている．研究会で話さなかったことも込めて, 丁寧に書くことにつとめた．また, 正式な survey は数多く出版されていることから, informal な感想などを多く盛り込むこととし, そのため, 日本語で書くこととした．ご容赦いただきたい．

引用を明示しない定理なども, 巻末に挙げた holonomic system 関係の参考書に数多く掲載されている．文章の趣旨から原論文は挙げていない．また, 超局所解析の関係の文献も思い切って除いた．(おそらく, この冊子の読者が目を通しそうにないので．)

2 Quick review on differential equations

2.1 線形微分方程式の D 加群による言い換え

以下, この文章の中では微分方程式と言ったら, 断らない限り線形微分方程式を指す．例えば次のようなものを考える．

Example 1 (Ibukiyama-Zagier) ３変数 (x_1, x_2, x_3) の (線形偏) 微分作用素

[1] もちろん, 両者は異なる分野であり, 異なる目標を持っている．相互の関係もあるが.

$P_1,\ P_2,\ P_3$ を

$$P_1 = (1-x_2^2)\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + (1-x_3^2)\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + 2(x_1 - x_2x_3)\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} - k(x_2\frac{\partial}{\partial x_2} + x_3\frac{\partial}{\partial x_3}) + a_1, \quad (1)$$
$$P_2 = (1-x_3^2)\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + (1-x_1^2)\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 2(x_2 - x_3x_1)\frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial x_1} - k(x_3\frac{\partial}{\partial x_3} + x_1\frac{\partial}{\partial x_1}) + a_2,$$
$$P_3 = (1-x_1^2)\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + (1-x_2^2)\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + 2(x_3 - x_1x_2)\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} - k(x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2}) + a_3.$$

とする．ここで $a_1,\ a_2,\ a_3,\ k \in \mathbf{C}$ は適当なパラメータである．Ibukiyama-Zagier [IZ] の考えていた微分方程式系は

$$P_1u = P_2u = P_3u = 0$$

である[2].

あるいは別のよく知られた例のひとつとして, Appell の超幾何関数の一つである F_1 の満たす微分方程式を Appendix(§10) に挙げた.

一般に, 一つの関数 u を未知関数とするような同次 (homogeneous, つまり右辺が 0) 線形連立微分方程式 (微分方程式系)

$$P_1u = P_2u = \cdots = P_ku = 0 \tag{2}$$

は次のような D 加群

$$\mathcal{M} = \mathcal{D}/(\mathcal{D}P_1 + \cdots + \mathcal{D}P_k) \tag{3}$$

に対応している．記号などを確認したいと思ったら, Appendix(§9) を見て下さい．以下, D 加群と言ったら連接左 D 加群のことを指す．右を使わないのは習慣であるが, それは, 微分作用素を関数に作用させる時に左から作用させる記号を使うことが普通だからである．微分方程式 (2) の**解**を, (3) で定義された D 加群 $\mathcal{M}$ を用いて表してみよう．次のような写像を考える．

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O}^{\mathrm{an}}) \ni f \mapsto f(\bar{1}) \in \mathcal{O}^{\mathrm{an}}.$$

ここで $\mathcal{O}^{\mathrm{an}}$ は正則 (holomorphic) 関数全体 (のなす層) を表す．$\bar{1}$ は $1 \in \mathcal{D}$ の $\mathcal{M}$ の中での代表元を表す．上の写像によって,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O}^{\mathrm{an}}) \cong \{u \in \mathcal{O}^{\mathrm{an}} \mid P_1u = \cdots = P_ku = 0\}$$

[2] そこでは, 解 u として多項式解だけを考えていた, が.

という線形同型が誘導される[3]. $\mathcal{O}^{\mathrm{an}}$ を別の関数の空間 $\mathcal{F}$ に置き換えても[4] 同様な同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{F}) \cong \{u \in \mathcal{F} \mid P_1 u = \cdots = P_k u = 0\}$$

が成り立つ. この事実は, [谷崎堀田] の「はじめに」や [大阿久] の第 3 章, など, ほとんどの文献に掲載されている. さらに, Hom だけでなく, ホモロジー代数的手法を用いて, 高次の Ext など[5]が定義されることが多いが, それは初学者が計算する必要があるものとも思えないので省略.

この「第 2 の見方」については, 後に, 「特性多様体の性質 (1)」「有理型に関する注意」で再論する.

2.2 代数幾何 / 代数解析

ここで, 比較のため代数幾何で対応することがらを述べ, 理解の助けとする. 代数幾何では変数 $(x_1, \ldots, x_n)$ の多項式 $f_1, \ldots, f_k$ が与えられたとき, その共通零点

$$f_1(x_1, \ldots, x_n) = \cdots = f_k(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

として (affine) 代数多様体が定義された. $\mathcal{O} = \mathbf{C}[x_1, \ldots, x_n]$ とし, それをイデアルで割ったものとして

$$\mathcal{M} := \mathcal{O}/(\mathcal{O}f_1 + \cdots + \mathcal{O}f_k)$$

と定めると, 代数多様体の点の全体は

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{M}, \mathbf{C}) \cong \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{C}^n \mid f_1(x) = \cdots = f_k(x) = 0\}$$

と表すことができる. 表にすると,

代数幾何		代数解析
$\mathcal{O}$	環 R	$\mathcal{D}$
代数多様体の定義方程式 f_i	イデアルの生成元	微分方程式 P_i
イデアル	イデアル	左イデアル
商環	環 / イデアル	左 D 加群
$\mathbf{C}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{O}^{\mathrm{an}}$(または関数環)
代数多様体の点	$\mathrm{Hom}_R(\mathcal{M}, \mathcal{F})$	微分方程式の解

「方程式 $\Rightarrow$ イデアル $\Rightarrow$ 点 (解) の全体」という流れは同じである. $\mathcal{O}$ でも $\mathcal{D}$ でも

[3]さらに, $\mathcal{M}$ に対して解の集合 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O}^{\mathrm{an}})$ を対応させる対応は適当な圏から圏への関手 (functor) と考えられる.

[4]例えば $\mathcal{F}$ として, C^∞ 関数, 超関数 (distribution や hyperfunction) などが考えられる.

[5]$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}^{\mathrm{an}})$. さらには derived functor $\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{F})$.

- 生成元と関係式の具体的な取り方に依存した表示方法と
- 生成元と関係式の取り方に依存しない表示方法

があることがわかる. 加群の言葉を使うことのなじみのなさによるわかりづらさは代数解析固有のものではなく, 代数幾何でも生じている共通の課題である. 従って, $\mathcal{O}$ の場合に, 同じ多様体を表すのに生成元や関係式の取り替えをしてもかまわなかった (時にはそれを有効に利用した) のと同様に, 微分方程式を調べるときも生成元や関係式の取り替えをすることができる (cf. § 5.5). D 加群の立場からは同じ加群の違う表示であるに過ぎないが, 微分方程式でこの取り替えをするとかなり見かけの違うものが出てくることもあり, 特殊関数論ではこの取り替えが本質的な進展を導くこともあるのでおろそかにはできない (D 加群の言葉を用いていても, theory of D-modules とはやや別方向を指向していることがあるので). ($\Rightarrow$ Pfaff 系.)

一方で, $\mathcal{O}$ と $\mathcal{D}$ は同一ではない. 両者の大きな相違点は $\mathcal{D}$ の非可換性である. なお, 次節で紹介する特性多様体は, この非可換の世界にある情報を可換の世界に移して得られる不変量である.

3 characteristic variety

特性多様体の定義には

- シンボルの共通零点,
- filtration
- 超局所化 (microlocalization)

の 3 つの方法がある. それぞれ, 幾何的, 代数的, 解析的な色合いを持つ. おそらく第 1 の方法が最も理解しやすく計算に近いと思われるのでそれを紹介する. 第 2 の方法は, リー環の普遍包絡環の取り扱いとも通じ, また特性多様体の精密化である特性サイクルへの拡張も容易であり, 良く紹介されているが, 慣れていないと filtration を用いる道具立てを大げさと感じるかもしれない. ここでは Appendix(§9) で定義を与えた. 第 3 の方法は, 解の特異性の理解や擬微分作用素などの解析的な道具立てと相性が良く, 真の理解には欠かせないのだが, ここでは省略する. 後で「特性多様体の性質 (3)」で少しだけ論ずる.

3.1 微分作用素のシンボル

Example 1 を例にとって計算してみよう. 式 (1) の P_1 のシンボル (主シンボル, principal symbol) は

$$\sigma(P_1) = (1 - x_2^2)\xi_2^2 + (1 - x_3^2)\xi_3^2 + 2(x_1 - x_2x_3)\xi_2\xi_3$$

である．これでわかるように, 微分作用素のシンボルを計算するには,

- 最高階の部分だけを取り出し, 低階は捨てる．
- 方向偏微分 $\frac{\partial}{\partial x_j}$ を新たな変数 ξ_j に置き換える $(j = 1, \ldots, n)$.

これによって, 元の変数の 2 倍の変数 $(x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ を持つような多項式[6]が得られる．

一つの微分作用素から D 加群に話題を移そう．$\mathcal{M} = \mathcal{D}/\mathcal{I}$ と表されているとき, $\sigma(\mathcal{I})$ を $\mathcal{I}$ のシンボルの全体 $\{\sigma(P) \mid P \in \mathcal{I}\}$ によって生成される $\mathbf{C}[x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n]$ の[7]イデアルとする．これの共通零点

$$\begin{aligned} & \{(x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n) \mid p(x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n) = 0, \forall p \in \sigma(\mathcal{I})\} \\ = \; & \{(x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n) \mid \sigma(P)(x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n) = 0, \forall P \in \mathcal{I}\} \end{aligned}$$

は, $\mathcal{M}$ の $\mathcal{D}/\mathcal{I}$ という表示の取り方によらず $\mathcal{M}$ のみによってきまる．これを $\mathcal{M}$ の特性多様体 (characteristic variety) といい, $\mathrm{Ch}(\mathcal{M})$, $\mathrm{Char}(\mathcal{M})$ などと書く．例えば, Example 1 では, $\sigma(P_1)$, $\sigma(P_2)$, $\sigma(P_3) \in \sigma(\mathcal{I})$ なので, $\mathrm{Ch}(\mathcal{M})$ は, 集合

$$\left\{ \begin{array}{r} (x_1, x_2, x_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3) \\ \in \mathbf{C}^6 \\ \end{array} \left| \begin{array}{l} (1 - x_2^2)\xi_2^2 + (1 - x_3^2)\xi_3^2 + 2(x_1 - x_2 x_3)\xi_2\xi_3 = 0, \\ (1 - x_3^2)\xi_3^2 + (1 - x_1^2)\xi_1^2 + 2(x_2 - x_3 x_1)\xi_3\xi_1 = 0, \\ (1 - x_1^2)\xi_1^2 + (1 - x_2^2)\xi_2^2 + 2(x_3 - x_1 x_2)\xi_1\xi_2 = 0 \end{array} \right. \right\} \tag{4}$$

に含まれることがわかる．この段階では, $\mathrm{Ch}(\mathcal{M})$ が (4) と一致するかどうかはわからない．すなわち, 一般に $\mathcal{I}$ が $P_1, \ldots, P_k$ で生成された $\mathcal{D}$ の左イデアルであったとしても, $\sigma(\mathcal{D})$ のイデアル $\sigma(\mathcal{I})$ が $\sigma(P_1), \ldots, \sigma(P_k)$ で生成されているとはいえない．$\sigma(\mathcal{D}) = \mathcal{O}_{[T^*X]}$ のイデアル $\sigma(\mathcal{I})$ が $\sigma(P_1), \ldots, \sigma(P_k)$ で生成されているとき, $P_1, \ldots, P_k$ を**包合的生成系**と呼ぶ．与えられた生成系から包合的生成系を計算することは D 加群創設当初は難しかったが, その後いわゆる微分作用素環の Gröbner 基底などが整備され, [大阿久] に具体的なアルゴリズムなども含め詳しく記載されている．ただし, 実際に多変数特殊関数と関連した場合は状況はあまり複雑にならず, 次のような昔からの十分条件で十分であることも多い.

Proposition 2 *(たとえば [柏原] 命題 2.12) $P_1, \ldots, P_k \in \mathcal{D}$ は次の 2 条件を満たせば, 包合的生成系となる．*

- *シンボル $\sigma(P_1), \ldots, \sigma(P_k)$ は完全交叉．(つまり, 共通零点の余次元は k.)*

[6]正しくは, $(x_1, \ldots, x_n)$ については (考えている領域で) 正則, $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ については多項式, というべきである．こういう関数のなす層を $\mathcal{O}_{[T^*X]}$ と書いたりする．

[7]正確には $\mathcal{O}_{[T^*X]}$ のイデアル

- 交換子 $[P_i, P_j] = P_iP_j - P_jP_i$ は $P_1, \ldots, P_k$ の $\mathcal{D}$ 係数の１次結合に書けるが, そのとき, $[P_i, P_j] = \sum_l Q_{ijl}P_l$ の係数 Q_{ijl} の階数が $\mathrm{ord}(P_i) + \mathrm{ord}(P_j) - \mathrm{ord}(P_l)$ 未満に取れる.

Example 1 の場合は, P_1, P_2, P_3 が可換 (すなわち, $[P_1, P_2] = [P_2, P_3] = [P_3, P_1] = 0$) なので, 2 番目の仮定は自明に成り立っている. 1 番目の仮定が成り立つことは以下に見るように共通零点の計算をすることで確かめる.

3.2 特性多様体の性質 (1)

さて, このように定義した特性多様体の性質を順次述べよう. まず自明な性質として,

Lemma 3 特性多様体は, *closed, conic*[8] *, algebraic subvariety.*

conic であることはシンボルが $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ の同次多項式であることの反映である.

Proposition 4 *(*加法性*) D* 加群の *short exact sequence*

$$0 \to \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2 \to \mathcal{M}_3 \to 0$$

があるとき*,*

$$\mathrm{Ch}(\mathcal{M}_2) = \mathrm{Ch}(\mathcal{M}_1) \cup \mathrm{Ch}(\mathcal{M}_3).$$

§2 の「D 加群＝微分方程式」の練習として, この命題を微分方程式の言葉に翻訳してみよう. 2 つの微分方程式系

$$P_1u = \cdots = P_ku = 0 \tag{5}$$

と

$$P_1v = \cdots = P_kv = P_{k+1}v = \cdots = P_lv = 0 \tag{6}$$

を考える ($k < l$). v の方が u よりもよりたくさんの微分方程式を満たしている. 対応するイデアルは, それぞれ

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \mathcal{D}P_1 + \cdots + \mathcal{D}P_k, \\ \mathcal{J} &= \mathcal{D}P_1 + \cdots + \mathcal{D}P_l \end{aligned}$$

となり, 自然な包含関係 $\mathcal{I} \subset \mathcal{J}$ が成立している. 従って, 対応する D 加群 $\mathcal{M} := \mathcal{D}/\mathcal{I}$, $\mathcal{N} := \mathcal{D}/\mathcal{J}$ の間には

$$\mathcal{M} \to \mathcal{N}$$

[8] $(x, \xi) \in \mathrm{Ch}(\mathcal{M}) \Leftrightarrow (x, \lambda\xi) \in \mathrm{Ch}(\mathcal{M})$ for all $\lambda \in \mathbf{C}^\times$.

という全射準同型が存在する[9]．さて，特性多様体の関係に戻ろう．この状況で,

$$\mathrm{Ch}(\mathcal{N}) \subset \mathrm{Ch}(\mathcal{M})$$

が成り立つ. すなわち, 微分方程式がより多くなれば, イデアルはより大きくなって, 加群は商になって, 特性多様体はより小さくなることを意味している.

また, §3.1 では簡単のため, 未知関数が単独の場合にしか特性多様体の定義を与えなかったが, 未知関数の個数が増えた方程式系の特性多様体も (原理的には) この命題からも求めうる.

また, 定義からわかるように, 特性多様体は底空間 X について局所性を持つ. 従って, 計算の際, 適当な開被覆で切り分けて計算して良い.

4 holonomic system

4.1 特性多様体の性質 (2)

さて, 特性多様体は, $2n$ 変数の空間の中の subvariety であるから, その (既約成分の) 次元は $0, 1, \ldots, 2n$ を動きうると思われるかもしれないが, 実はそうではない.

Proposition 5 *特性多様体の各既約成分の次元はどれも $n(= \dim X =$ 空間次元$)$ 以上である.*

Definition 6 *特性多様体の次元が n である時, その D 加群は holonomic であるという*[10].

雰囲気を見るために, 代数的集合 (4) を計算してみよう. これは, (通常の可換な) 多項式環の中で連立方程式を解くことに過ぎないが計算の手間を見せるために途中経過を少し丁寧に記述してみる. まず, $x_1 = 1$ の時. このとき, 簡

[9]解の間に存在する自然な包含関係

$$\{v \mid P_1 v = \cdots = P_l v = 0\} \to \{u \mid P_1 u = \cdots P_k u = 0\}$$

は D 加群の言葉では

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{N}, \mathcal{F}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{F})$$

と書ける. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\cdot, \mathcal{F})$ が covariant ではなく contravariant であることが写像の向きを逆転させる理由であり, 一瞬戸惑う原因の一つである.

[10]なお $\mathcal{M} = 0$ のときも holonomic であるという. このときは, 特性多様体は空であるが.

単に因数分解できて,

$$\begin{aligned}
&x_2 = x_3 = 1,\\
&x_2 = x_3 = -1,\\
&\xi_2 = \xi_3 = 0,\\
&x_2 = 1, \xi_3 = \xi_1 = 0,\\
&x_2 = -1, \xi_3 = \xi_1 = 0,\\
&x_3 = 1, \xi_2 = \xi_1 = 0,\\
&x_3 = -1, \xi_2 = \xi_1 = 0
\end{aligned}$$

となる. $x_1 = -1$ の時. このときも同様に,

$$\begin{aligned}
&x_2 = 1, x_3 = -1,\\
&x_2 = -1, x_3 = 1,\\
&\xi_2 = \xi_3 = 0,\\
&x_2 = 1, \xi_3 = \xi_1 = 0,\\
&x_2 = -1, \xi_3 = \xi_1 = 0,\\
&x_3 = 1, \xi_2 = \xi_1 = 0,\\
&x_3 = -1, \xi_2 = \xi_1 = 0
\end{aligned}$$

となる. 従って, $(x_1^2-1)(x_2^2-1)(x_3^2-1) = 0$ のときは, 集合 (4) は,

$$\begin{aligned}
&(x_1, x_2, x_3) = (1,1,1), (1,-1,-1), (-1,1,-1), (-1,-1,1),\\
&(x_1, \xi_2, \xi_3) = (1,0,0), (-1,0,0),\\
&(x_2, \xi_3, \xi_1) = (1,0,0), (-1,0,0),\\
&(x_3, \xi_1, \xi_2) = (1,0,0), (-1,0,0)
\end{aligned}$$

となる. ここまでどの既約成分も 3 次元である. 一方 $(x_1^2-1)(x_2^2-1)(x_3^2-1) \neq 0$ のときは, 2 次方程式を解いて,

$$\xi_2 = \frac{x_1 - x_2x_3 + d_{23}}{x_2^2 - 1}\xi_3, \xi_3 = \frac{x_2 - x_3x_1 + d_{31}}{x_3^2-1}\xi_1, \tag{7}$$

$$\left(\xi_1 = \frac{x_3 - x_1x_2 + d_{12}}{x_1^2-1}\xi_2\right)$$

などとなっている. ここで

$$\Delta := x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2x_3 - 1$$

とおき, $d_{23}^2 = d_{31}^2 = d_{12}^2 = \Delta$ である. 従って, (x_1, x_2, x_3) を一つ固定した時, nonzero な (ξ_1, ξ_2, ξ_3) は, スカラー倍を除いて高々 4 通り (d_{23} と d_{31} の符号) の可能性しかなく, しかもそのようなものが存在するためには

$$\frac{(x_1 - x_2x_3 + d_{23})}{(x_2^2-1)} \times \frac{(x_2 - x_3x_1 + d_{31})}{(x_3^2-1)} \times \frac{(x_3 - x_1x_2 + d_{12})}{(x_1^2-1)} = 1 \tag{8}$$

でなくてはならない. これは $(x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{C}^3$ の中の非自明な代数的 (Zariski) 閉部分集合を定めるので次元は2以下である. 従って, 以上を満たす $(x_1,x_2,x_3,\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ の次元は3以下となり, $\mathcal{M}$ が holonomic であることが分かった.

さらに計算を進めて, 式 (8) に含まれる根号を取り除く計算[11]をすると, 結果は $\Delta=0$ となることがわかる. holonomic であることの証明, すなわち, 考えている代数的部分集合の次元の上からの評価だけであれば, 大きな計算は不要であるが, 特性多様体の具体的な記述をする場合には多項式環の中のある程度の計算は避けられない場合もあり, 両者の間には差異がある.

4.2　補足：Lagrangian subvariety

実は, 一般的な定理として, 特性多様体は次元の下からの評価だけではなく, involutive な部分多様体[12] という幾何学的に特徴的な図形であることが知られている. 特に, 次元が底空間の次元と同じである involutive 部分多様体は Lagrangian 部分多様体と呼ばれる. 以上の用語をまとめると, holonomic D 加群の特性多様体の既約成分は Lagrangian 部分多様体となっている. Lagrangian 部分多様体の典型的な例は, X の (局所) 閉部分多様体 Y の余法束 (conormal bundle) である. 定義を簡単に補足しておく. $X=\mathbf{C}^n$ の点 $x\in X$ における接空間 (tangent space) を $(TX)_x$ と書く. 部分多様体 $Y\subset X$ の各点 y に対して, y における Y の接空間を $(TY)_y$ と書く. $(TY)_y$ は $(TX)_y$ の部分 (線形) 空間である. $(TX)_x$ の双対 (線形) 空間を $(T^*X)_x$ と書く. $(T^*X)_y$ の元で, 部分空間 $(TY)_y$ 上で消えるものを conormal vector といい, その全体を

$$(T^*_YX)_y:=\{\xi\in(T^*X)_y\mid\xi(v)=0,\forall v\in(TY)_y\}$$

とする. 余法束 T^*_YX は $(T^*_YX)_y$ を集めてきたものである. T^*_YX の次元は Y の次元に関わらず, 常に $n(=\dim X)$ である. 一連の定義を今の例で説明してみよう.

$$\{x_1=1,\xi_2=\xi_3=0\}=\{(1,x_2,x_3,\xi_1,0,0)\}$$

は $Y=\{x_1=1\}$ の余法束である. あるいは, $Y=\{\Delta=0\}$ の余法束は

$$\{(x_1,x_2,x_3,t(x_1-x_2x_3),t(x_2-x_3x_1),t(x_3-x_1x_2))\mid t\in\mathbf{C},\Delta(x_1,x_2,x_3)=0\}$$

である[13]. 実際, 式 (7) から $\Delta=0$ のとき, $\xi_2(x_2^2-1)=(x_1-x_2x_3)\xi_3$ となり, 添字の入れ替え $1\leftrightarrow 3$ により, 上の関係式が導かれる. 以上まとめると, 代数的集合 (4) は,

[11] ただし, この計算には数式処理の援用が有効である.

[12] symplectic 幾何の用語. $(x_1,\dots,x_n,\xi_1,\dots,\xi_n)$ 空間に自然な symplectic 多様体の構造が入ることが議論の出発点.

[13] ここでは $Y=\{\Delta=0\}$ の特異点 $(1,1,1),(1,-1,-1),(-1,1,-1),(-1,-1,1)$ での記述は正確に取り扱っていない

- 平面 $x_i = \pm 1$ の余法束 (8 つ).
- 点 $(x_1, x_2, x_3) = (\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ with $x_1 x_2 x_3 = 1$ の余法束 (4 つ).
- 曲面 $d = 0$ の余法束 (1 つ).
- 全空間 $\mathbf{C}^3$ の余法束 (1 つ) = 零切断 $T_X^* X$.

の合併集合 (union) であることがわかった. 従って, $\mathrm{Ch}(\mathcal{M})$ の特性多様体は, これらの余法束の合併である.

特性多様体が involutive や Lagrangian という事実は, 知らなくても正しく計算すれば自動的に出てくることであるし, holonomic の定義などには次元の評価しか必要ないので不可欠ではないのだが, 慣れてくると計算の簡略化にも使える情報であるので紹介しておいた.

4.3 holonomic D 加群の性質

holonomic ならば, 解の有限次元性が従う. より一般に holonomic D 加群 $\mathcal{M}$ に対して, 高次まで込めた解の複体 $\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O}^{\mathrm{an}})$ は perverse sheaf となることが知られている。従って、各次元の cohomology は constructible sheaf であり, 特に, 0 次をみると $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O}^{\mathrm{an}})$ は constructible sheaf である。従って, 各点の近傍での次元は有限である. 超幾何関数のような特殊関数を考える際, 微分方程式を使った特徴付けを念頭に置くのであれば, 解が無限次元あっては統制不能であり, 有限次元性は素朴な必要条件となろう. このように holonomic の定義のひとつの動機としては, 解の有限次元性が挙げられる. ただし, 解の有限次元性から必ずしも holonomic は導かれない (通常は cohomology でいうと 0 次の正則解しか見えないため.) ということを注意しておく.

5 integrable connection

5.1 接続

D 加群の「第 3 の見方」を紹介する. $\Theta = \Theta_X$ を X 上の正則ベクトル場の全体 (の成す層) とする. 座標を使えば, $\Theta = \mathcal{O}\frac{\partial}{\partial x_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}\frac{\partial}{\partial x_n}$ と書ける. $\mathcal{O} \oplus \Theta$ は一階以下の微分作用素の全体である.

D 加群 $\mathcal{M}$ が与えられたとする. このとき $\mathcal{D}$ の作用を Θ に制限することで, $v \in \Theta$ に対して, $\nabla_v : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ を $\nabla_v(m) = vm$ と定める $(m \in \mathcal{M})$ と, ∇ は次の 3 性質を満たす.

(a) $\nabla_{fv}(m) = f\nabla_v(m)$.

(b) $\nabla_v(fm) = v(f)m + f\nabla_v(m)$.

(c) $\nabla_{[v_1,v_2]}(m) = \nabla_{v_1}(\nabla_{v_2}(m)) - \nabla_{v_2}(\nabla_{v_1}(m))$.

ここで $v(f)$ は関数 $f \in \mathcal{O}$ の $v \in \Theta$ による微分である. 逆に, $\mathbf{C}$-線形写像 $\nabla : \Theta \otimes \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ が上の３性質を満たすとき, $\mathcal{M}$ には ∇ と compatible な D 加群の構造が一意的に入る ([谷崎堀田] p18, [関口] 第４章第１節, [柏原] §1.3).

さて, 正則ベクトル束 E に対して, その局所正則切断の成す層 $\mathcal{O}(E)$ を考えると, $\mathcal{O}(E)$ は有限 ($=$ rank$E$) の階数を持つ局所自由な $\mathcal{O}$ 加群となる. この対応で「正則ベクトル束」と「有限の階数を持つ局所自由な $\mathcal{O}$ 加群」を同一視することができる. さらに付加構造を考えよう. 下の (i) を満たすような D 加群 $\mathcal{M}$ が与えられたとき, 今の同一視で正則ベクトル束 E と $\mathcal{M} = \mathcal{O}(E)$ のように対応させると, 上で定義した ∇ に課された上記３性質のうち最初の２性質 (a)(b) は ∇ がベクトル束 E の接続 (connection) であることを意味し, 最後の性質 (c) はその接続が可積分 (integrable), あるいは接続に付随した曲率が 0 (flat, 平坦) であることを意味する. 以上の対応付けで次の概念が同値になる (see, e.g. [清水]).

(i) $\mathcal{O}$ 加群として局所自由で有限の階数を持つような D 加群.

(ii) integrable connection を持つ (正則) ベクトル束.

(ii)$'$ flat connection を持つ (正則) ベクトル束.

さらに, 次のような概念も同値になる.

(iii) 局所系 (local system)($=$局所定数層で stalk が有限次元線形空間なもの).

(iv) 基本群の表現.

(v) Pfaff 系.

ここで, (ii) $\Rightarrow$ (iii) の対応は, 可積分接続を持つベクトル束に対して, その水平切断の全体を考えると, 局所系をなす (Frobenius) ことで与えられる. (iii) $\Leftrightarrow$ (iv) の対応は, 一般に, 位相空間 X 上の階数 r の局所系と, 基本群 $\pi_1(X, x_0)$ の $\mathbf{C}^r$ 上の表現 $\pi_1(X, x_0) \to GL(r, \mathbf{C})$ とが１対１に対応することから従う.

Pfaff 系に関しては次の節にまとめる.

5.2 Pfaff 系

まず, 接続の言い換えを行う. Ω^1 を１次の正則微分形式の全体 (の成す層) とする. Θ の双対であり, 座標を使えば, $\Omega^1 = \mathcal{O}dx_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}dx_n$ と書ける. 従って, 接続 $\nabla : \Theta \otimes \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ を $\nabla : \mathcal{M} \to \Omega^1 \otimes \mathcal{M}$ で言い換えることができる. 条件は $\nabla(fm) = df \otimes m + f\nabla(m)$ などとなる. ここで $m_1, \ldots, m_r \in \mathcal{M}$ を $\mathcal{O}$ 加群としての基底となるように選ぶと, $\nabla(m_k) \in \Omega^1 \otimes \mathcal{M}$ なので,

$\nabla(m_k) = -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r (A_i)_{jk} dx_i \otimes m_j$ と書ける. ここで $(A_i)_{jk} \in \mathcal{O}$. このとき, $\sum_{j=1}^r u_j m_j \in \mathcal{M}$ が水平切断であるための条件 $\nabla(\sum_{j=1}^r u_j m_j) = 0$ は, r 個の未知関数 $u_1, \dots, u_r$ に関する線形微分方程式

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^r (A_i)_{jk} u_k, \quad (i = 1, \dots, n), (j = 1, \dots, r).$$

で書き表せる. 行列を使って一階の連立微分方程式系で書けば,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{u} = A_i \mathbf{u}, \quad (i = 1, \dots, n)$$

となる. ここで, 列ベクトル $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_r \end{pmatrix}$ の記号を使った. $A_1, \dots, A_n$ は関数を成分とした r 次正方行列である. ここで, $\Gamma = A_1 dx_1 + \cdots + A_n dx_n$ とおくと, Γ は r 次正方行列を係数とする 1 次の微分形式となる. これを用いると上の方程式は

$$d\mathbf{u} = \Gamma \mathbf{u}$$

と書ける. これを **Pfaff 系**という. この微分方程式が可積分であるための条件は, 曲率 0 条件

$$d\Gamma = \Gamma \wedge \Gamma$$

と書かれる. 成分で表せば,

$$\frac{\partial A_k}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_k} = [A_j, A_k], \quad (j, k = 1, \dots, r)$$

となる. この条件が成立する時, 勝手に与えられた初期値 $\mathbf{u}(x_1^o, \dots, x_n^o) \in \mathbf{C}^r$ を初期点 $(x_1^o, \dots, x_n^o) \in X$ で持つような解 $\mathbf{u}(x_1, \dots, x_n)$ が局所的には一意的に存在する (Frobenius). したがって, 各点の近くで解は r 次元のベクトル空間をなす. この基底を解の基本系と呼ぶ. 任意の解は解の基本系の 1 次結合となり, したがって, X 内の道に沿って解析接続できる. これが局所系を定め, 関数としては多価正則解を与える. なお, いまは A_i が X 上で正則である状況で考えているが, 後述のように A_i が有理型であるように必ずしも正則でない場合は, X として A_i が正則であるような開部分集合を取らなければならない. したがって, 微分方程式 (Pfaff 系) が定義されている領域の形状がたとえば $\mathbf{C}^n$ のように簡単だったとしても, A_i が正則である領域はそこからいくつかの超曲面を引き去った領域のように複雑な基本群を持ちうる. このことが現象を面白くかつ複雑にしている.

Pfaff 系に対応する D 加群は

$$\mathcal{D}^{\oplus r} / \sum_{i=1}^n \mathcal{D}^{\oplus r} (\frac{\partial}{\partial x_i} I_r - A_i)$$

で与えられる．ここで I_r は r 次単位行列である．また, $\mathcal{D}^{\oplus r}$ は r 次の行ベクトルの全体とみなしている．この D 加群の特性多様体は零切断だけであり, 階数は r となる．これは holonomic D 加群の解が局所的に有限次元であることの最も簡単な場合である．

5.3 特性多様体の性質 (3)

特性多様体 $\mathrm{Ch}\mathcal{M}$ に関連した幾何学的不変量をいくつか定義しておこう．まず, 開集合 $X \subset \mathbf{C}^n$ に対して, 余接束 $T^*X \cong X \times \mathbf{C}^n$ の零切断を

$$T_X^*X := \{(x_1 \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n) \in T^*X \mid \xi_1 = \dots = \xi_n = 0\}$$

と書く．さらに, 微分方程式論以外ではあまり使われない記号だが,

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{T^*}X &:= T^*X \setminus T_X^*X \\ &= \{(x_1 \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n) \in T^*X \mid (\xi_1, \dots, \xi_n) \neq (0, \dots, 0)\} \end{aligned}$$

と定める．また, 余接束の底空間への射影 $\pi : T^*X \to X$ は

$$(x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n)$$

で与えられる．以上の記号のもとで,

Definition 7

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\mathrm{Ch}}(\mathcal{M}) &:= \mathrm{Ch}(\mathcal{M}) \setminus T_X^*X = \mathrm{Ch}(\mathcal{M}) \cap \overset{\circ}{T^*}X \subset \overset{\circ}{T^*}X : \mathrm{closed}, \\ \mathrm{Supp}(\mathcal{M}) &:= \pi(\mathrm{Ch}(\mathcal{M})) \subset X : \mathrm{closed}, \\ \mathrm{Sing}(\mathcal{M}) &:= \pi(\overset{\circ}{\mathrm{Ch}}(\mathcal{M})) \subset X : \mathrm{closed}, \\ \mathrm{Reg}(\mathcal{M}) &:= X \setminus \mathrm{Sing}(\mathcal{M}) \subset X : \mathrm{open}. \end{aligned}$$

これらの幾何学的不変量の意味を特性多様体の第 3 の見方の例として簡単に述べる．特性多様体 $\mathrm{Ch}\mathcal{M}$ は, 本来, 微分方程式の解の特異性を評価する幾何的な量としての意味を持っている．詳しいことは用意なしに容易に紹介し得ないので最も典型的な場合を見よう．

Theorem 8 連接 D 加群 $\mathcal{M}$ について, 次は同値.

(vi) $\mathrm{Ch}(\mathcal{M}) \subset T_X^*X$.

(vi)′ $\overset{\circ}{\mathrm{Ch}}(\mathcal{M}) = \emptyset$.

(vi)″ $\mathrm{Sing}(\mathcal{M}) = \emptyset$.

(vi)‴ $\mathrm{Reg}(\mathcal{M}) = X$.

(vii) $\mathcal{M}$ は, $\mathcal{O}$ 加群として coherent. つまり $\mathcal{O}$ 加群として局所的に有限生成.

(i) $\mathcal{O}$-locally free of finite rank, つまり, 局所的に $\mathcal{M} \cong \mathcal{O}^{\oplus r}$ as $\mathcal{O}$ modules.

(viii) (解析的な category では) 局所的に $\mathcal{M} \cong \mathcal{O}^{\oplus r}$ as $\mathcal{D}$ modules.

証明を簡単に述べる. まず, (vi) ⇔ (vi)′⇔ (vi)″⇔ (vi)‴ ⇐ (vii) ⇐ (i) ⇐ (viii) はすぐにわかる. (vii) ⇒ (i) ⇒ (viii) は自明ではないので証明を要するが難しくはない (少し tricky かもしれないが). 条件 (i) は, 前節で挙げたように, ベクトル束の言葉を使って書き換えられるのであった. つまり, D 加群が可積分接続と見なせることの必要十分条件が, 幾何学的に「特性多様体が零切断に含まれる」であたえることができた. ここまでは代数的なカテゴリーで考えても解析的カテゴリーで考えても同じように成立する. (i) ⇒ (viii) はやはり微分方程式を解くことにあたるので, 係数 $\mathcal{O}$ が代数的であっても解析的な関数[14] の利用が避けられない. なお, この場合, たとえ超関数まで広げて解を考えて解は必ず解析的となり[15], 初期値を決めれば解の存在と一意性が成り立つ. この意味で, 解は特異性を持たない. 特性多様体が零切断に含まれない場合は, 解は特異性を持ちうるが, いわば, 特性多様体の ξ の方向にのみ解は特異性を持ちうる. (つまり, 特性多様体に属さない ξ の方向には解は(超局所的に) 解析的である.) これが特性多様体の第 3 の見方であり, 上の同値な言い換えではすべての方向に解析的という一番極端な場合の言い換えになっている.

5.3.1 holonomic case

一般の D 加群の場合は, $\mathrm{Sing}(\mathcal{M}) = \emptyset$ とは限らないのであるが, 定義から直ちに次のことがわかる.

Lemma 9 *holonomic D* 加群 $\mathcal{M}$ に対して*,* $\mathrm{Sing}(\mathcal{M})$ の X の中での余次元は 1 以上である*.* 特に*,* $\mathrm{Reg}(\mathcal{M})$ は X の *(Zariski)open dense subset* である*.* このとき*,* $\mathcal{M}$ を $U = \mathrm{Reg}(\mathcal{M})$ 上で考えたもの $\mathcal{M}|_U$ は定理 *8* などにある *(i)* から *(viii)* の同値な条件を *(U* 上で*)* 満たす*.*

従って, holonomic なら open dense subset 上では「有限の階数を持つような局所自由 $\mathcal{O}$ 加群」となる. したがって, 解を考えれば, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O}^{\mathrm{an}})$ は $\mathrm{Reg}(\mathcal{M}) \subset X$ 上で局所系をなす[16] . この局所系の階数 (= 局所系の stalk(有限次元線形空間) の線形空間としての次元) を $\mathcal{M}$ の「rank」という.

[14] $xy' = \lambda y$ という多項式係数の微分方程式でも, 解は $y = x^{\lambda}$ という解析関数 ($\lambda \notin \mathbf{Z}$).

[15] hyperfunction に対しては佐藤の基本定理と呼ばれる事実. 歴史的側面も込めた解説は木村達雄の著作に多い. 例えば [木村].

[16] 記号 Hom について. この文章ではここまで層とその大域切断を意識的に区別せずに使ってきている. たいていの場合それで不都合が生じないのだが, ここでは結果として層を考えたいので, 準同型の層 (つまり各点の近くで解を考えたものの寄せ集め) と見てください.

5.4 rank

階数についてまとめておく.

Proposition 10 *holonomic* D *加群* $\mathcal{M}$ *に対して次は同値な量を与える.*

- 一般の点 *(generic point)* における $\mathcal{O}$ 加群としての階数.
- 一般の点における *(*正則*)* 解の次元.
- 特性サイクル *(characteristic cycle*[17]*)* における零切断 T_X^*X の重複度.
- *Pfaff* 系 *(*に書き直したとき*)* の階数

この量を $\mathcal{M}$ の**階数**という.

命題 2 にあるような包合的生成系がとれるときはシンボルイデアルが完全交叉なので階数はその微分作用素の階数の積で与えられる. Appell のときは, いろいろな意味で一番やさしい F_1 がこの意味では一番面倒で, 他の F_2, F_3, F_4 の場合は完全交叉である. see Appendix(§10).

5.5 生成系の取り替えの例

ある D 加群の表すのに生成系の取り方を変えても, その本質は変わらない. 例えば, 単独方程式と Pfaff 系との書き換えも生成系の取り替えに過ぎない. ここでいくつかの技術が知られている.

holonomic であれば, generic point で $\mathcal{O}$ 加群として有限生成であることはあらかじめわかっているので, 適当に低階からの微分を並べたもので高階の微分が書き表せるはずである. 階数の見当がついていれば, 必要な個数がわかるから, 生成系の見当もつけやすい. 例えば, Example 1 では, 階数が 8 となるので, 8 つの生成元を取ればよいことになる. 実際, u を x_1, x_2, x_3 のそれぞれの変数で 1 回以下微分したものは全部で $2^3 = 8$ 個あるので, これが生成系としてふさわしいように思える. この推察は正しい. さらに接続 (connection) の見かけの形をきれいにして, 考えている $\mathrm{Reg}(\mathcal{M})$ の外でも対数的接続に書けるように調節するには, $\frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3}$ に, 式 Δ をかけるとよいことがわかる. これは経験である. この場合の行列はサイズが大きいので例を挙げるのはやめ, かわりに Appell F_1 の場合の例を Appendix(§10) に挙げた.

[17] 特性多様体 $\mathrm{Ch}(\mathcal{M})$ を重複度込みに拡張した概念. see, e.g., [柏原]

6 meromorphic connection

上の例で見るように, 接続 Γ (の成分に現れる関数) は $\mathrm{Reg}(\mathcal{M})$ 上では正則であるが, $\mathrm{Sing}(\mathcal{M})$ では sigularity を持ちうるので, 厳密な意味での接続ではない. 接続の定義では, Γ は定義域 X の各点で正則である必要があった. しかし, その概念を拡張して, Γ の各成分が X 上有理型関数となっているとき, 対応する接続を有理型接続という. つまり Γ が $\mathrm{Sing}(\mathcal{M})$ で極を持つ場合, 有理型接続 (meromorphic connection) という. また, 高々１位の極しか持たない場合, 対数的接続 (logarithmic connection) という. このとき, 係数の留数行列は $\mathrm{Sing}(\mathcal{M})$ の各既約成分上一定である. これは解の局所的な展開の初項を与えるのに有用である. 特に, その行列の固有値として, 解の exponent が得られる. 局所モノドロミー (多価性) もこれでわかる.

Pfaff 系に書く時に, log singularity の形に書くことができることがある. これはいつもできるとは限らない. global な条件である. また, それを発見する方法は発見的な方法である. 最も安直には, 階数分の適当な微分を並べて作る. see, Appendix(§10) の最後のコメント.

6.1 有理型に関する注意

具体的な微分作用素の式を与えられたときに

- どこを定義域とすることが自然か
- その定義域の上のどういう D 加群を対応させるのが自然か

ということは, 自分で判断しなければならないが, 実はそれほど自明なことでない. というのも, D 加群としては違うものも何となく自然と同一視していることがあるので. 後者の問題は最小の延長 (minimal extension) の理論が整備されてわかっている ([谷崎堀田] ３章後半). 前者は２変数以上で特有の現象である. この問題はあまり正面切って取り扱われていないように感ずる. 例えば, $\mathbf{C}^2$ の compact 化といっても P^2 や $P^1 \times P^1$ などあり, 方程式に応じてどこが自然な存在域なのかは, 今のところ例ごとに適当にやっているように見える.

7 regular singular

１変数 (= 常微分方程式) の場合, 自明でない微分方程式の特異集合 $\mathrm{Sing}(\mathcal{M})$ は点であり, 特異点と呼ばれる. 特異点が確定特異 (regular singular, Fuchs 型) であることの定義は, 特異点の周りでの解が高々多項式増大性という性質でなされる. 常微分方程式の場合, これは微分方程式の係数関数に関する性質 (極の位数) で言い換えることができ, 方程式から容易に検証可能な条件と

なった ([清水] の冒頭). 多変数 (偏微分方程式) の場合は, 解で定式化せず, いきなり方程式側で定義する. 定義の流儀もまた３通りある.

- 曲線テスト,
- filtration,
- 超局所化.

それぞれ, 代数的, 幾何的, 解析的な見方である. 第１の定義は, [谷崎堀田] 第３章第６節などで採用されている. curve からの写像による引き戻しで１変数に帰着して判定するものであり, 理論的に何か証明するときには有用である. ただし, この定義を用いて具体的な微分方程式が regular であることを証明するのはおよそ不可能であろう. ここでは省略する. 第２の定義をここでは述べる. 第３の定義は擬微分作用素を使う方法で, [関口] 第４章第５節ではこの方法をとっている. また, 非正則性をはかる irregularity support とでもいうべき, $IR(\mathcal{M}, V)$ という $\overset{\circ}{T^*}X$ の conic, involutive, closed algebraic subset を定義することもできる (これが空であるとき regular). ここではやはり省略する.

7.1 確定特異の定義

Definition 11 *([清水], [柏原])* $\mathcal{M}$ を *holonomic* D 加群とする. $\Lambda = \mathrm{Ch}(\mathcal{M})$ と略記する. 性質

$$u \in F_m(\mathcal{M}), P \in F_{m'}(\mathcal{D}), \sigma(P)|_\Lambda = 0 \Rightarrow Pu \in F_{m+m'-1}(\mathcal{M})$$

がすべての $m, m' \geq 0$ について成り立つような連接 *filtration* $F_m(\mathcal{M})$ が存在するとき, $\mathcal{M}$ は *regular (holonomic)* である, という.

正確に述べていないが, regular かどうかは, local な性質であり, 上のような filtration も local に存在するかどうかを要請している.

Example 12 対数的接続は regular.

7.2 解の性質

regular holonomic D 加群の解の性質として次の定理が有名である.

Lemma 13 *([柏原] 命題 5.5) holonomic* D 加群 $\mathcal{M}$ が *regular* であるための必要十分条件は, すべての $x \in X$ に対して, 自然な写像 $\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_x) \to \mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \hat{\mathcal{O}}_x)$ が同型であること. ただしここで $\mathcal{O}_x$ は x の周りでの収束ベキ級数環, $\hat{\mathcal{O}}_x$ は x の周りでの形式ベキ級数環.

これにより, regular holonomic D 加群の形式ベキ級数解は常に収束することがわかる. ただ, 逆に, この条件を用いて regular であることを示すのは事実上不可能である.

解を考えるとき, 通常であれば, 特異点のないところで考えるように思えるが, 特殊関数論で, ベキ級数展開を与える点は, ほとんどの場合, 特異点を中心とする展開である. 特異点の周りの方が方程式から読み取れる解の情報 (特に局所的な情報) が多いということが一つの理由である. 下に述べる exponent もその一つである. 一方で, monodromy は, その定義から大域的な量であり, 基本群などとも関係した難しいデータである. Gauss の超幾何などの限られた方程式を除いては未だにわかっていることは少ない.

幾何	特殊関数論
特異点を除いた場所での解を考える	特異点での解を考える

8 exponents

最後に exponent の説明をして終わりにする. exponent は特異点の近くにおける解の漸近挙動を表す量である.

8.1 常微分方程式 (Frobenius の方法)

常微分方程式でまず見てみよう. 例えば, Gauss の超幾何微分方程式は

$$P = x(1-x)\frac{d^2}{dx^2} + (\gamma - (\alpha+\beta+1)x)\frac{d}{dx} - \alpha\beta$$

とおくと $Pu = 0$ と書ける. シンボルは $\sigma(P) = x(1-x)\xi^2$ なので, 特異点集合 $\mathrm{Sing}(\mathcal{D}/\mathcal{D}P) = \{0,1\} \subset \mathbf{C}$ となる[18]. 特異点 $x=0$ の周りで

$$u = x^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 x^\lambda + c_1 x^{\lambda+1} + c_2 x^{\lambda+2} + \cdots \tag{9}$$

の形に解が展開できていると仮定する (あるいは, そう展開できている解のみを考える). $c_n \in \mathbf{C}$, $\lambda \in \mathbf{C}$ とし, 展開に無駄がない ($c_0 \neq 0$) と仮定してよい. この級数の収束性に関してはおおらかに考え, 形式的に考える[19]. λ は整数とは限らないので, 考えている特異点 $x=0$ の周りで, 正則あるいは有理型とは限らない解を考えていることに注意しておく (すなわち, D 加群的にするには $\mathcal{O}^{\mathrm{an}}$ では足りないためいささか工夫が必要). 前置きが長くてすいません,

[18]本当は $\mathbf{C}$ を compact 化した P^1 で考えるのがよい. このとき $\mathrm{Sing}(\mathcal{M}) = \{0,1,\infty\} \subset P^1$. 今は $x=0$ の周りの局所的な考察をしているので, 無限遠の取り扱いには触れない.

[19]実は regularity から形式級数解は収束することがわかる

早速計算しましょう．上の展開 (9) を微分方程式 $Pu = 0$ に代入して, x のベキ指数の小さい順に整理すると, 今は $x^{\lambda-1}$ が最低次であり, その係数は

$$\lambda(\lambda-1)c_0 + \gamma\lambda c_0 \tag{10}$$

となる．したがって, 上のベキ級数が ($c_0 \neq 0$ であるような) 解を持つための必要条件として, $\lambda = 0, 1-\gamma$ であることが得られる．さらに高次の係数を順次比較して c_n の間の線形漸化式を立てたり, その漸化式がいつ (パラメータ α, β, γ の非整数条件) 解けるかなどの議論もあるが省略 (たとえば [斉藤]).

多変数へ行く前にちょっと計算しやすくするためのよくある工夫を紹介しておく．$\theta = x\frac{d}{dx}$ を Euler operator とする．特異点 $x = 0$ における形式解の展開の各項 $x^{\lambda+n}$ が θ の固有関数になっている $\theta(x^\mu) = \mu x^\mu$ ことが効く．P を x 倍した xP を θ を使って書くと,

$$xP = \theta(\theta-1) + \gamma\theta + x \times (x, \theta \text{ で書ける})$$

と表せる．これによって決定方程式

$$\lambda(\lambda+\gamma-1) = 0$$

および, 特性根 (exponent)

$$\lambda = 0, 1-\gamma$$

を読み取ることがやさしい．なお, $\gamma \notin \mathbf{Z}$ の場合は exponent 0, $1-\gamma$ に対応した展開 (9) を持つような解がそれぞれ 1 次元ずつ存在する．従って, exponents だけから直ちに, 特異点の近くでの局所的な解の基底 (の多価性) がわかり, local monodromy などもわかる．一方で, $\gamma \in \mathbf{Z}$ の時は事情は複雑になり[20], exponent だけから直ちに局所的な解の基底が書けるとはいえない．exponents が整数差の場合の複雑さは 1 変数から多変数になっても事情は同じで, §8.2.1 などでも exponent ですべてがわかるわけではない．ここが複雑なところでもあり面白いところでもある．

8.2 偏微分方程式

空間次元 $\dim X \geq 2$ の場合に上の議論はどうなるだろうか．まず, holonomic D 加群 $\mathcal{M}$ に対して $\mathrm{Sing}(\mathcal{M})$ の余次元は 1 以上である．余次元が 2 以上の成分に対してはその generic point において, 特異集合以外で多価正則な解は特異点まで一価正則に延びる (単連結性と Hartogs) ので, 考えるべき問題がない．従って以下, $\mathrm{Sing}(\mathcal{M})$ の余次元 1 の成分の generic point の近くで考える．局所的な考察なので, 座標変換によってその点を原点とし, 原点の周りで $\mathrm{Sing}(\mathcal{M}) = \{x_1 = 0\}$ であるとしてよい．基本的戦略は常微分方程式の場合と同じである．以下, 単独の未知関数 u に対応した regular holonomic D 加群 $\mathcal{M} = \mathcal{D}/\mathcal{I}$ を考える．例で説明しよう．

[20]必ずしも (9) のような級数で書けるとは限らず $\log x$ が必要だったりする．決して大切でないわけではないがここでは述べない．適切な文献 [斉藤] などを参照．

8.2.1 Appell's F_1

Appendix(§10) の微分方程式 $P_1u = P_2u = P_3u = 0$ を考える．対応する D 加群は $\mathcal{M} = \mathcal{D}/(\mathcal{D}P_1 + \mathcal{D}P_2 + \mathcal{D}P_3)$ である．Sing($\mathcal{M}$) の既約成分の一つ $Y = \{x = 0\} \subset X = \mathbf{C}^2$ を考え, その generic [21] point $(0, y) \in Y$ で exponent を計算する．解の展開は

$$u = x^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} c_n(y)x^n = c_0(y)x^\lambda + c_1(y)x^{\lambda+1} + \cdots$$

と仮定する．これを $P_1u = 0$ に代入すると... という計算をする．実際は

$$xP_1 = \theta(\theta + \theta' + \gamma - 1) + x \times (x, y, \theta, \tfrac{\partial}{\partial y} \text{ で書ける})$$

となる[22] から,

$$\lambda(\lambda + \theta' + \gamma - 1)c_0(y) = 0$$

が得られる．同様に

$$xP_3 = -\theta(\theta' + \beta') + x \times (\ldots)$$

より

$$\lambda(\theta' + \beta')c_0(y) = 0,$$

$$P_2 = y(1-y)\frac{\partial^2}{\partial y^2} + (1-y)\frac{\partial}{\partial y}\theta + (\gamma - (\alpha + \beta' + 1)y)\frac{\partial}{\partial y} - \beta'\theta - \alpha\beta',$$

より

$$\left(y(1-y)\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \lambda(1-y)\frac{\partial}{\partial y} + (\gamma - (\alpha + \beta' + 1)y)\frac{\partial}{\partial y} - \beta'\lambda - \alpha\beta'\right)c_0(y) = 0 \tag{11}$$

が導かれる．常微分方程式の場合と同様に, これらは, 仮定のような展開を持つような解が存在するための 必要条件 である．この条件を整理すると,

(i) $\lambda = 0$ のとき．$c_0(y)$ は y に関する 2 階の常微分方程式 (Gauss の超幾何微分方程式) が導かれているので, 2 次元の解を (Y の generic point で) 持つ．従って, exponent $\lambda = 0$ に対応する解は 2 次元であると推察される．

[21] generic 条件は $y \neq 0, 1$ となるがそのことはあまり意識しない．実際, exponents は y の関数とならず, 定数である．

[22] ここで $\theta = x\frac{\partial}{\partial x}$ は $x = 0$ に対応した Euler operator で本質的．$\theta' = y\frac{\partial}{\partial y}$ は記号の簡略のために使ったもので $x = 0$ の周りでの解析に於いては非本質的．

(ii) $\lambda \neq 0$ のとき．初めの２条件から $(\lambda - \beta' + \gamma - 1)c_0(y) = 0$ を得る．$c_0(y) \neq 0$ であるから，$\lambda = \beta' + 1 - \gamma$ が導かれる．さらに $(\theta' + \beta')c_0(y) = 0$ より $c_0(y)$ は $y^{-\beta'}$ の定数倍であることがわかる[23]．従って，exponent $\lambda = \beta' + 1 - \gamma$ に対応する解は１次元であると推察される．

実際，Appendix(§10) で Pfaff 系 Γ に書いたときの，因子 (divisor) $x = 0$ に対応した留数行列は A_0 であるが，その固有値を見ると，0 が重複度２，$\beta' + 1 - \gamma$ が重複度１であることがわかり，上の観察と合致している．一般に，$\{x_1 = 0\}$ の近くで接続を

$$\Gamma = B_1 \frac{dx_1}{x_1} + A_2 dx_2 + \cdots + A_n dx_n.$$

と書いたとき，留数行列を $B_1^o = \mathrm{Res}_{x_1=0}(\Gamma)$ とおくと，$\{x_1 = 0\}$ の周りの解は，局所的に $x_1^{B_1^o} = \exp(B_1^o \log x_1) = B_1|_{x_1=0}$ の多価性を示す．ただし，重複固有値があったり，固有値に整数差のものがあったりしたときは，常微分方程式のときと同様の修正が必要である．さらに，単独未知関数の微分方程式系を Pfaff 系に書き直す方法はいろいろあり，そのことによって exponent に整数差のずれが生ずることがあるので単独未知関数の場合は Pfaff 系ではなくもとの微分方程式から上の操作で exponent を定義することが正式である．（多くの場合，対応する Pfaff 系からも情報は読み取れるが．）このあたりの事情はあまり整備されているとはいえず，書かれたものもないようである．いろいろ教えていただいた吉田正章氏に感謝する．

8.2.2 Ibukiyama-Zagier

Example 1 の特異因子 $x_1 = 1$ の周りでの exponent の計算をする．すなわち，解の形として

$$u = (x_1 - 1)^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x_2, x_3) x_1^n$$

を仮定する．

$$\begin{aligned}
(1 - x_1)P_2 &= 2\theta(\theta - 1 - (x_2 - x_3)\frac{\partial}{\partial x_3}) + (1 - x_1) \times \cdots, && (12)\\
(1 - x_1)P_3 &= 2\theta(\theta - 1 - (x_3 - x_2)\frac{\partial}{\partial x_2}) + (1 - x_1) \times \cdots, && (13)\\
P_1 &= \text{省略} && (14)
\end{aligned}$$

となる．ここで $\theta = (x_1 - 1)\frac{\partial}{\partial x_1}$．これより，

[23] なお，式 (11) から $c_0(y)$ に関する新たな条件が出てくることが心配になるだろうが，$\lambda = \beta' + 1 - \gamma$ の場合は実は (11) の左辺の超幾何微分作用素は $\theta' + \beta'$ で右から割り切れる (i.e., $Q \times (\theta' + \beta')$ と表せる) ことが計算で確かめられ，新たな制約はここからは生じない．

(i) $\lambda \neq 0$ の場合. このとき, 上の2つの式から

$$(x_2 - x_3)(\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3})c_0(x_2, x_3) = 0$$

が従うから, $c_0(x_2, x_3) = c_0(x_2 - x_3)$ と1変数関数 $c_0(t)$ で書けることがわかる. さらに, 式(13)より,

$$(\lambda + 1)c_0(t) + tc_0'(t) = 0$$

がわかり, $c_0(t)$ は $t^{1-\lambda}$ の定数倍となることがわかる. そして, P_1 の式から, λ は2次方程式

$$\lambda^2 - (k+1)\lambda + (k - a_1) = 0$$

を満たすことがわかる. k, a_1 の適当な条件の下で λ は2つの零でない値を取ることがわかる. 2つのexponentに対応する解は1次元であると推察される.

(ii) $\lambda = 0$ のとき. このexponentに対応するleading term $c_0(y)$ の考察は省略しよう.

8.3 余次元の高い交わり

Appell の F_1 の級数表示(15)などを見ると, $x = y = 0$ の近くでの級数展開

$$u = x^\lambda y^\nu \sum_{m,n=0}^{\infty} c_{m,n} x^m y^n$$

を仮定して同じ議論をすることで, 多変数exponentを考えられないかと思われるだろう. 実際, 考えている点で特異集合 $\mathrm{Sing}(\mathcal{M})$ がnormal crossingの場合は, 余次元の高い交わり点 $x_1 = \cdots = x_r = 0$ などで, 解の展開を

$$u = x_1^{\lambda_1} \cdots x_r^{\lambda_r} \sum_{m_1,\ldots,m_r=0}^{\infty} c_{m_1,\ldots,m_r}(x_{r+1}, \ldots, x_n) x_1^{m_1} \cdots x_r^{m_r}$$

の形に仮定して, multi-exponents $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ を求めることもできる([関口] 第4章第5節). たとえばHelgason予想の解決の場合はnormal crossingになるような対称空間のcompact化(Oshimaコンパクト化)があったためこの議論が使われている. ただし, 特殊関数で実際に現れる状況では, 特異点の配置がそのままで(i.e., 特異点解消せずに) normal crossingであることはむしろ少なく, 特異集合の配置は特別(non-generic)であることが多い[24]. 例えば,

[24]標語：一般であることはまれ.

F_1 の微分方程式の特異集合を原点の付近で見ると, 3本の特異因子 $x = 0$, $y = 0$, $x = y$ が交わっているため normal crossing ではない. したがって, 級数解 (15) は, exponent が定義されたところで exponent に対応した解ではなく, この場合は‘たまたま’そのような解が見つかっている. なお, この場合の特異点解消 (広中) の有効性について考えてみたくなるが, 特異点解消をしてしまうと局所から大域に問題が還元されてしまうため問題はより難しくなり, 特異点解消をすることは助けにはならない.

9 Appendix

9.1 微分作用素環 $\mathcal{D}$

$\mathcal{O}$ で複素多様体 X 上の (正則な) 関数のなす環の層を表す. といってもいいのだが, X としては $\mathbf{C}^n$ またはその (Zariski) 開集合を考えていれば良いので, $\mathcal{O} = \mathbf{C}[x_1, \ldots, x_n]$ あるいはその局所化 $\mathbf{C}[x_1, \ldots, x_n, f_1^{-1}, \ldots]$ を考えればよい. X 上の (線形) 微分作用素とは algebra として $\mathcal{O}$ と $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ で生成されるもの, すなわち,

$$\sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}}^{\text{有限和}} a_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}(x) \frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

の形のもの ($a_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}(x) \in \mathcal{O}$) である. $\mathcal{D}$ で, X 上の微分作用素のなす環 (の層) を表す.

9.2 ‘D’ 加群

Prolog の第1の見方「環 $\mathcal{D}$ の加群」による D 加群の定義を与えておこう.

$\mathcal{D}$ を環とする. 実際は, 1 を持ち, 結合法則を満たすような $\mathbf{C}$-algebra とする. 積の可換性は要求しない. このとき, このとき, $\mathcal{D}$ 自身は, 自然に左 D 加群とみなせるし, 左イデアルや左 D 加群という概念, 左 D 加群の間の準同型といった概念が自然に定義できる. D 加群 $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ に対して, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ で, $\mathcal{D}$-準同型 $\mathcal{M} \to \mathcal{N}$ の全体を表す. 階数 r の[25] 自由 D 加群を $\mathcal{D}^{\oplus k}$ と書こう. 有限個の元 $P_1, \ldots, P_k \in \mathcal{D}$ から作られる ($\mathcal{D}$ の) 左イデアルは $\mathcal{D}P_1 + \cdots + \mathcal{D}P_k$ と書かれる. 定義は $\{Q_1 P_1 + \cdots + Q_k P_k \mid Q_1, \ldots, Q_k \in \mathcal{D}\}$ である. これは (左 D 加群の間の) 準同型

$$\varphi : \mathcal{D}^{\oplus k} \ni (Q_1, \ldots, Q_k) \mapsto Q_1 P_1 + \cdots + Q_k P_k \in \mathcal{D}$$

[25] 一般の非可換環に対しては自由加群の階数の概念は well-defined かどうかわからないが, 微分作用素環の場合は大丈夫である.

の像とも言える．一つの未知関数を持つような微分方程式系 (2) を表すような D 加群 $\mathcal{M}$ (3) は, coker(φ) と表すこともできる．より一般に, 未知関数の個数が ℓ 個で, 方程式の本数が k 本の連立 (線形) 微分方程式には, 準同型

$$\varphi : \mathcal{D}^{\oplus k} \to \mathcal{D}^{\oplus \ell}$$

の cokernel が対応する D 加群である．すなわち,「有限表示を持つ」D 加群が対応する．

具体的な微分方程式に興味がある場合には, 微分方程式を D 加群に翻訳する方向だけを理解していれば十分であるので, ここで止めてもかまわないのであるが, 一応, 逆方向の対応についても述べておこう．一般に, 微分作用素環 (の層) はいくつかの有限性条件 (例えば Noether 性) を持つ[26]．このことから, 例えば, D 加群が局所有限生成であることと, 連接 (coherent) であることは同値である．また, 連接 D 加群は局所的には長さ n の自由分解を持つ．従って, (局所) 有限生成な D 加群は, 有限の階数の自由 D 加群の間の準同型

$$\varphi : \mathcal{D}^{\oplus k} \to \mathcal{D}^{\oplus \ell}$$

の cokernel として (局所的に) 表せる．つまり, 抽象的に定義された一般の D 加群も生成元を取って表せば微分方程式系を表していることになる．おそらく, 具体的計算をする場合にその事実を使うことはないであろうが.

9.3 特性多様体の定義

filtration による特性多様体の定義を簡単に眺めておく．m 階以下の微分作用素の全体を $F_m(\mathcal{D})$ とおく．m が増加すると $F_m(\mathcal{D})$ は増えていくが, $Gr^F_m(\mathcal{D}) = F_m(\mathcal{D})/F_{m-1}(\mathcal{D})$ とおき, $Gr^F(\mathcal{D}) = \oplus_{m=0}^{\infty} Gr^F_m(\mathcal{D})$ とすると, $Gr^F(\mathcal{D})$ は可換環となり, $\mathcal{O}_{[T^*X]}$ と標準的に同型となる.

さて, $\mathcal{M}$ を連接 D 加群とし, $u_1, \ldots, u_l \in \mathcal{M}$ をその生成元とする．つまり $\mathcal{M} = \sum_{\nu=1}^{l} \mathcal{D} u_\nu$．このとき, $F_m(\mathcal{M}) = \sum_{\nu=1}^{l} F_m(\mathcal{D}) u_\nu$ とおくと, これは $\mathcal{M}$ に**連接 filtration** を定める．$\mathcal{D}$ と同様に, $Gr^F_m(\mathcal{M}) = F_m(\mathcal{M})/F_{m-1}(\mathcal{M})$ とおき, $Gr^F(\mathcal{M}) = \oplus_{m=0}^{\infty} Gr^F_m(\mathcal{M})$ とすると, $Gr^F(\mathcal{M})$ は自然な $Gr^F(\mathcal{D})$ 加群の構造を持つ．このときの $Gr^F(\mathcal{M})$ の support(台) を Ch($\mathcal{M}$) と定義すると, これは $\mathcal{M}$ の生成元の取り方によらない.

10 Appendix: Appell's F_1

Appell の超幾何級数

$$F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{m+n} (\beta)_m (\beta')_n}{(\gamma)_{m+n} m! n!} x^m y^n \tag{15}$$

[26] [Schapira] に詳しい．[柏原], [大山]p12, etc.

の[27] 満たす微分方程式[28]は

$$
\begin{aligned}
P_1 &= x(1-x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + y(1-x)\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + (\gamma - (\alpha+\beta+1)x)\frac{\partial}{\partial x} - \beta y\frac{\partial}{\partial y} - \alpha\beta, \\
P_2 &= y(1-y)\frac{\partial^2}{\partial y^2} + x(1-y)\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + (\gamma - (\alpha+\beta'+1)y)\frac{\partial}{\partial y} - \beta' x\frac{\partial}{\partial x} - \alpha\beta', \\
P_3 &= (x-y)\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} - \beta'\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y}.
\end{aligned}
$$

とおいたとき,

$$P_1 u = P_2 u = P_3 u = 0$$

である. これは rank $= 3$ であり完全交叉でない. この生成系でシンボルを計算すると,

$$
\begin{aligned}
&\{(x,y,\xi,\eta) \in \mathbf{C}^4 \mid \sigma(P_1) = \sigma(P_2) = \sigma(P_3) = 0\} \\
&= \left\{ (x,y,\xi,\eta) \in \mathbf{C}^4 \;\middle|\; \begin{array}{l} x(1-x)\xi^2 + y(1-x)\xi\eta = 0, \\ y(1-y)\eta^2 + x(1-y)\xi\eta = 0, \\ (x-y)\xi\eta = 0 \end{array} \right\}
\end{aligned}
$$

となる. 右辺の共通零点を計算すると,

$$
\begin{array}{l}
\xi = 0, \eta = 0 \\
\xi = 0, y = 0 \\
\xi = 0, y = 1 \\
\eta = 0, x = 0 \\
\eta = 0, x = 1 \\
x = y = 1 \\
x = y = 0 \\
x = y, \xi = -\eta
\end{array}
$$

２点 $(0,0)$, $(1,1)$ の余法束, ５つの直線 $x = 0, 1$, $y = 0, 1$, $x = y$ の余法束, ならびに零切断からなる.

さて, P_1, P_3 からは $\partial^2/\partial x\partial y$ を消去できる. 例えば, $P_1' = (x-y)P_1 - x(1-x)P_3$ とする.

[27] この表示は使わないので記号は説明しないが, たとえば $(\alpha)_n = \Gamma(\alpha+n)/\Gamma(\alpha)$. Appell の超幾何級数 F_1, F_2, F_3, F_4 の具体的な級数表示を手近に見ようと思ったら, たとえば [青本喜多], [原岡] を見よ.

[28] see, e.g., [原岡] §2.1

$$
\begin{aligned}
P_1' &= x(1-x)(x-y)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (\gamma(x-y) - (\alpha+\beta+1)x^2 \\
&\qquad +(\alpha+\beta-\beta'+1)xy + \beta' y)\frac{\partial}{\partial x} - \beta y(1-y)\frac{\partial}{\partial y} - \alpha\beta(x-y), \\
P_2' &= y(1-y)(y-x)\frac{\partial^2}{\partial y^2} + (\gamma(y-x) - (\alpha+\beta'+1)y^2 \\
&\qquad +(\alpha+\beta'-\beta+1)xy + \beta x)\frac{\partial}{\partial y} - \beta' x(1-x)\frac{\partial}{\partial x} - \alpha\beta'(y-x), \\
P_3 &= (x-y)\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \beta'\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y}.
\end{aligned}
$$

open dense subset 上では, P_1, P_2, P_3 と P_1', P_2', P_3 は同じ微分方程式を定める (イデアルの生成系の取り替え). さらに, P_1', P_2', P_3 は2階微分のそれぞれをシンボルとするから, $\mathcal{M}$ が1階までの微分, すなわち $u, \partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$ の3つで生成され, 階数が3 (以下) であることが見やすい. 一方で, そのシンボルの共通零点は

$$
\begin{aligned}
&\{(x,y,\xi,\eta) \in \mathbf{C}^4 \mid \sigma(P_1') = \sigma(P_2') = \sigma(P_3) = 0\} \\
&= \left\{ (x,y,\xi,\eta) \in \mathbf{C}^4 \;\middle|\; \begin{array}{l} x(1-x)(x-y)\xi^2 = 0, \\ y(1-y)(y-x)\eta^2 = 0, \\ (x-y)\xi\eta = 0 \end{array} \right\}
\end{aligned}
$$

となる. 右辺は $x = y$ という余次元1の超平面を含むため, 特性多様体の余次元が3であることを示せない. 実際に, (少なくともあるパラメータでは) この D 加群は holonomic でない.

Pfaff 系への書き直し [原岡][29]. Pfaff 系の生成系を

$$
\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \\ x\frac{\partial}{\partial x}u \\ y\frac{\partial}{\partial y}u \end{pmatrix}
$$

と選べば, (Gerard, Levelt)

$$
\Gamma = A_0\frac{dx}{x} + A_1\frac{d(1-x)}{1-x} + B_0\frac{dy}{y} + B_1\frac{d(1-y)}{1-y} + C\frac{d(x-y)}{x-y}
$$

と書ける. ここで行列を具体的に書くと,

$$
A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\gamma+\beta' & 0 \\ 0 & -\beta' & 0 \end{pmatrix}, B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\beta \\ 0 & 0 & 1-\gamma+\beta \end{pmatrix},
$$

[29] 非同次座標 (x,y) から同次座標 (x_1,x_2,x_3) へ移るとより対称性の高い記述も得られる [G].

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\alpha\beta & \gamma-\alpha-\beta-1 & -\beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta' & \beta \\ 0 & \beta' & -\beta \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\alpha\beta' & -\beta' & \gamma-\alpha-\beta'-1 \end{pmatrix}.$$

ここで顕著なのは, 係数の行列が定数行列であること. 大域的に対数的接続の形に書けている. このことの理由はあまり明らかにされていない. 実際, F_2, F_3 に関する類似の結果は [G] にあるが, F_4 に対する結果は知られておらず, 巧妙な 2 重被覆を考えると同じように定数行列を分子とするような対数的接続で書けることが [加藤] によって知られている.

References

[柏原] 柏原正樹「代数解析学概論」岩波講座, 現代数学の展開, 2000.

[谷崎堀田] 谷崎俊之, 堀田良之「D 加群と代数群」シュプリンガー東京, 1995.

[概説] D 加群概説 (I), (II), 京都大学数理解析研究所講究録 **667**, **668** (1988).

[大山] 大山陽介, D 加群入門 I, [概説], **667**, 1–98.

[清水] 清水勇二, D 加群入門 II, [概説], **667**, 99–204.

[関口] 関口次郎, 微分方程式の表現論への応用, 上智大学数学講究録 **27** (1988).

[木村] 木村達雄, 佐藤幹夫の数学, 岩波講座, 現代数学の基礎 **34** (2000) 1–44.

[Borel] Borel, Algebraic D-modules, Academic Press, 1987.

[Björk] Björk, Analytic D-modules and applications, Kluwer, 1993.

[堀田-Madras] R. Hotta, Introduction to D-modules, Madras Lecture Note, 1987. 現在では入手困難かもしれない. 一部は [谷崎堀田] に取り入れられている.

[C] S. C. Coutinho, A primer of algebraic D-modules, London Math. Soc. Student Texts **33**, 1995.

[Schapira] P. Schapira, Microdifferential Systems in the Complex Domain, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften **269**, Springer-Verlag, 1985.

[堀田-十話] 堀田良之, 加群十話 — 代数学入門 —, 朝倉書店, すうがくぶっくす **3**, 1988. 最後の節に, 微分方程式と D 加群の関係が上と同じ筋で書かれている. また, 常微分方程式の場合のみであるが, 確定特異点の意味 (冪級数解の収束), index theorem などが簡単にまとめられている.

[堀田-b] 堀田良之, 代数入門, 裳華房, 1985. b-関数の存在に関する章が独特.

[大阿久] 大阿久俊則, D 加群と計算数学, 朝倉書店, すうがくの風景 **5**, 2002. 今回この原稿を書くために初めて読んだ.

[青本喜多] 青本和彦, 喜多通武「超幾何関数論」シュプリンガー東京, 1994.

[原岡] 超幾何関数, 朝倉書店, すうがくの風景 **7**, 2002.

[IZ] T. Ibukiyama and D. Zagier, see the article by T. Ibukiyama in this volume.

[斉藤] 斉藤利弥「常微分方程式論」朝倉書店, 1979.

[G] V. A. Golubeva, Appell-Kempé de Fériet hypergeometric functions of two variables, Sibirsk. Mat. Zh. **20** (1979), 997–1014, 1165, Siberian Math. J. **20** (1979), 705–717.

[加藤] Mitsuo Kato, A Pfaffian system of Appell's F_4, Bulletin of College of Education, University of the Ryukyus, **33** (1988), 331–334.

E-mail: ochiai@math.nagoya-u.ac.jp
Department of Mathematics, Nagoya University,
Chikusa, Nagoya 464-8602, Japan.