Theta 級数の背景

高瀬幸一（宮城教育大学）

本講では theta 級数の背景として三つの主題について解説する。

第一の主題は、2 次不定方程式の解の個数、或いは、2 次形式の整数論である。この主題は歴史的にも theta 級数が発生した起源の一つと考えられ、特殊な場合には、2 次不定方程式の解の個数を表す公式を与える。一般の場合は、最終的には Sigel の公式（定理 1.4.1、定理 1.5.2）としてまとめられる。これは、いわゆる Siegel の主定理を theta 級数を用いて表現したものである。Weil は Siegel の主定理を一般の古典群の場合に一般化する過程で Weil 表現を構成したのである [24, 25]。

第二の主題は Stone-von Neumann の定理である。この定理は Weil 表現を構成する際に中心的な役割をする。本来 Stone-von Neumann の定理は量子力学の二通りの表現形式、Heisenberg 形式と Schrödinger 形式、が数学的に同等であることを保証するために証明されたと思われる。そこで量子力学的背景についても簡単に解説する。Stone-von Neumann の定理は、現在では、ベキ零 Lie 群の既約表現に関する Kirillov の orbit method の特殊例として簡単に示す事ができるが、本講では直接証明を与える事にする。

第三の主題は theta 級数の幾何学的起源、即ち、アーベル多様体の線束である。つまり、アーベル多様体の線束の global section として theta 級数をとらえる事が出来るのである。今回のサマースクールの主題は「Weil 表現入門」であって、theta 級数の表現論的側面に主眼が置かれており、theta 級数の幾何学的側面についてはあまり深入りしないが、一通りの解説を試みた。[4, 9, 10, 11, 12, 17] などが良い参考になると思います。

1　2 次不定方程式の解の個数

この節に関しては [16] が良い入門書です。保型形式のついては [3, 8] などが参考になります。二次形式については [7] が参考になります。

1.1　2 次不定方程式

整数係数の n 変数 2 次同次多項式 $F \in \mathbb{Z}[X_1, \cdots, X_n]$ と $m \in \mathbb{Z}$ に対して、不定方程式 $F(x) = m$ $(x \in \mathbb{Z}^n)$ の解の個数

$$N(F, m) = \sharp\{x \in \mathbb{Z}^n \mid F(x) = m\}$$

を考えよう。$F(x)$ は、n 次対称行列 Q を用いて

$$F(x) = x \cdot Q \cdot {}^t x \quad (x \in \mathbb{R}^n : \text{横ベクトル})$$

と書ける。ここで Q の成分は $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ に有り、対角成分は全て整数である（この様な対称行列を半整数対称行列と呼ぶ）。

Q が正定値でない場合には、解の個数 $N(F,m)$ は無限大に成り得る。例えば、

$$F(x,y)=x^2+xy-y^2=(x,y)\begin{bmatrix}1 & 1/2\\ 1/2 & -1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

とすると、$F(x,y)=1$ は無限個の整数解を持つ。即ち、$\varepsilon=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ とおくと

$$\varepsilon^n=a_n+\varepsilon b_n \quad (a_n,b_n\in\mathbb{Z})$$

とできて、$(x,y)=(a_{2n},b_{2n})$ $(n\in\mathbb{Z})$ は $F(x,y)=1$ の無限個の解を与える。この例では、$F(x,y)$ が 2 次体 $K=\mathbb{Q}(\varepsilon)$ のノルム形式であること

$$F(x,y)=N_{K/\mathbb{Q}}(x+\varepsilon y) \quad (x,y\in\mathbb{Q})$$

と、2 次体 K の整数環 $A=\{x+y\varepsilon \mid x,y\in\mathbb{Z}\}$ の単数群が $A^\times=\langle\pm1\rangle\times\langle\varepsilon\rangle$ となることに注意すればよい。このように（特に 2 変数）2 次不定方程式は、2 次体の整数論と密接な関係にあるが（[21] を見よ）、以下では、もっと解析的な手法を用いることにする。

一般の場合に戻って、Q は正定値と仮定する。このとき、$F(x)\le m$ は n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の中の楕円体を表すから、その楕円体に含まれる格子点（座標が全て整数である点）の個数は有限で、特に $N(F,m)<\infty$ である。楕円体 $F(x)\le m$ に含まれる格子点の個数は、楕円体の体積に概ね比例し、体積は $m^{n/2}$ に比例するから、$N(F,m)$ は概ね

$$m^{n/2}-(m-1)^{n/2}=\frac{n}{2}\cdot m^{n/2-1}+\cdots$$

に比例するであろう。よっておおまかな評価として

$$N(F,m)=O(m^{n/2-1}) \ (\text{as } m\to\infty)$$

を得る。更に精密な結果を得るためには、Q に条件を付ける必要がある。

1.2 二次形式のテータ級数

以下、$S=2Q$ とおいて、$\det S=1$ と仮定する。即ち、整数係数対称行列 $S\in\mathrm{Sym}_n(\mathbb{Z})$ は正定値かつ対角成分は偶数で $\det S=1$ を満たす（このような S を正定値 even unimodular な対称行列と呼ぶ）。この条件を満たす S が存在するには、S のサイズ n が 8 の倍数なることが必要十分条件である（[17],p.271）。例えば $n=8$ のときには

$$S=\begin{bmatrix}2&0&-1&0&0&0&0&0\\0&2&0&-1&0&0&0&0\\-1&0&2&-1&0&0&0&0\\0&-1&-1&2&-1&0&0&0\\0&0&0&-1&2&-1&0&0\\0&0&0&0&-1&2&-1&0\\0&0&0&0&0&-1&2&-1\\0&0&0&0&0&0&-1&2\end{bmatrix}$$

がその例である。ちなみにこれは E_8 根系の Cartan 行列である。

上のような S をとり、複素上半平面 $\mathfrak{H}=\{z\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Im}\,z>0\}$ 上の関数 $\vartheta_S(z)$ を

$$\vartheta_S(z)=\sum_{x\in\mathbb{Z}^n}\exp(\pi\sqrt{-1}xS{}^t\!x\cdot z)\quad(z\in\mathfrak{H})$$

により定義する。

$$N(S,2m)=\sharp\{x\in\mathbb{Z}^n\mid xS{}^t\!x=2m\}<\infty$$

とおくと

$$\vartheta_S(z)=\sum_{m=0}^{\infty}N(S,2m)\exp(2\pi\sqrt{-1}mz)$$

である。$z=x+\sqrt{-1}y\in\mathfrak{H}$ に対して

$$\sum_{x\in\mathbb{Z}^n}|\exp(\pi\sqrt{-1}xS{}^t\!x\cdot z)|=\sum_{m=0}^{\infty}N(S,2m)\exp(-2\pi my)$$

で $N(S,2m)=O(m^{n/2-1})$ だから、$\forall\varepsilon>0$ に対して、$\mathrm{Im}\,z\geq\varepsilon$ で $\vartheta_S(z)$ は絶対一様収束し、よって $\vartheta_S(z)$ は $\mathfrak{H}$ 上の正則関数である。更に、ϑ_S は保型形式としての性質を持つ。

まず $SL_2(\mathbb{R})\ni\sigma=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ は $\mathfrak{H}\ni z$ に一次分数変換$\sigma z=\dfrac{az+b}{cz+d}$ により推移的に作用する。いつものように $J(\sigma,z)=cz+d$ とおく。$\Gamma=SL_2(\mathbb{Z})$ とおくと、ϑ_S は次の様な変換公式を満たす；

定理 1.2.1 $\vartheta_S(\gamma z)=J(\gamma,z)^{n/2}\vartheta_S(z)\quad\forall\gamma\in\Gamma.$

証明 Γ は $\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$ により生成されるから、この二元に対する変換公式を示せば十分である。$\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$ に対しては、ϑ_S の定義から $\vartheta_S(z+1)=\vartheta_S(z)$ は明か。$\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$ に対する変換公式を求めるために Poisson の和公式を用いる。即ち

$$f(x)=\exp(\pi\sqrt{-1}xS{}^t\!x\cdot z)\quad(x\in\mathbb{R}^n)$$

の Fourier 変換を

$$\widehat{f}(y)=\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\exp(2\pi\sqrt{-1}x{}^t\!y)dx$$

とおくと

$$\vartheta_S(z)=\sum_{x\in\mathbb{Z}^n}f(x)=\sum_{y\in\mathbb{Z}^n}\widehat{f}(y)$$

である。$\widehat{f}(y)$ を計算するために

$$\begin{aligned}f(x)\exp(2\pi\sqrt{-1}x{}^t\!y)&=\exp\left\{\pi\sqrt{-1}(x+yS^{-1}z^{-1})S{}^t(x+yS^{-1}z^{-1})z\right\}\\&\quad\times\exp(-\pi\sqrt{-1}yS^{-1}\cdot{}^t\!yz^{-1})\end{aligned}$$

と平方完成して、正則関数の Cauchy の積分定理を用いると

$$\widehat{f}(y)=\int_{\mathbb{R}^n}\exp(\pi\sqrt{-1}xS{}^t\!x\cdot z)dx\times\exp(-\pi\sqrt{-1}yS^{-1}\cdot{}^t\!yz^{-1})$$

を得る。ここで $\mathfrak{X} = \{X \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{C}) \mid \mathrm{Re}\, X > 0\}$ 上の正則関数 $\det^{-1/2}$ を

$$\det{}^{-1/2} X = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\pi x X {}^t x) dx$$

により定義すると

1) $\forall X \in \mathfrak{X}$ に対して、$(\det{}^{-1/2} X)^2 = (\det X)^{-1}$,

2) $\forall X \in \mathfrak{X} \cap M_n(\mathbb{R})$ に対して、$\det{}^{-1/2} X = (\det X)^{-1/2}$

だから、

$$\begin{aligned}\widehat{f}(y) &= \det{}^{-1/2}(-\sqrt{-1}Sz) \times \exp(-\pi\sqrt{-1}yS^{-1} \cdot {}^t yz^{-1}) \\ &= z^{-n/2} \cdot \exp(-\pi\sqrt{-1}yS^{-1} \cdot {}^t yz^{-1})\end{aligned}$$

となる。よって

$$\vartheta_S(z) = z^{-n/2} \sum_{y \in \mathbb{Z}^n} \exp(-\pi\sqrt{-1}yS^{-1} \cdot {}^t yz^{-1}).$$

ここで y を yS とすれば、$S \in SL_n(\mathbb{Z})$ より $\vartheta_S(z) = z^{-n/2}\vartheta_S(-1/z)$ 即ち

$$\vartheta_S(-1/z) = z^{n/2}\vartheta_S(z)$$

を得る。 □

定理 1.2.1 のような性質を持つ $\mathfrak{H}$ 上の正則関数全体の構造を調べて、$\vartheta(z)$ の性質を導くのが目標である。

1.3 保型形式

正の整数 k に対して、$\mathfrak{H}$ 上の複素数値正則関数 f が

$$f(\gamma z) = J(\gamma, z)^k f(z) \ \forall \gamma \in \Gamma$$

なる変換公式を満たし、

$$f(z) = \sum_{m \geq 0} a(m) \exp(2\pi\sqrt{-1}mz) \tag{1.3.1}$$

なる無限級数展開を持つとき（これを f の Fourier 展開と呼ぶ）、f を、$\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$ に関する重さ k の正則保型形式と呼び、その全体を M_k と現す事にする。M_k は有限次元複素ベクトル空間であることが知られている。

直和 $\bigoplus_{k \geq 0} M_k$ は、関数の和と積に関して graded $\mathbb{C}$-algebra となるが、その構造が良く分かっている。即ち、

$$\bigoplus_{k \geq 0} M_k = \mathbb{C}[E_4, E_6], \quad E_4,\ E_6 \text{ は代数的に独立}$$

となる。ここで、4 以上の偶数 k に対して

$$E_k(z) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} J(\gamma, z)^{-k} \quad (z \in \mathfrak{H})$$

とおく。和は Γ の部分群$\Gamma_\infty = \{\begin{bmatrix} * & * \\ 0 & * \end{bmatrix} \in \Gamma\}$ の剰余類の上をわたり、条件 $k \geq 4$ より $\mathfrak{H}$ 上で広義一様収束する。従って、$E(z)$ は z の正則関数であり、定義から変換公式

$$E_k(\gamma z) = J(\gamma, z)^k E_k(z) \quad \forall \gamma \in \Gamma$$

が成り立つことがわかる。更に

$$E_k(z) = 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(m) \exp(2\pi\sqrt{-1}mz) \tag{1.3.2}$$

なる無限級数展開をもつことが示される。ここで、B_k は Bernouri 数で

$$\frac{X}{\exp X - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} X^k$$

により定義される。又、$\sigma_\ell(m) = \sum_{d|m} d^\ell$ は m の約数の ℓ 乗の和である。従って、E_k は M_k の元である。E_k を、重さ k の Eisenstein 級数と呼ぶ。

一方、$f \in M_k$ の Fourier 展開 (1.3.1) で $a(0) = 0$ となるとき、f を重さ k の尖点形式と呼ぶ。重さ k の尖点形式全体を S_k と現すと、E_k の Fourier 展開 (1.3.2) から

$$M_k = \mathbb{C}E_k \oplus S_k$$

なる直和分解を得る。ところで、$f \in M_k$ に対して、

$$f \in S_k \Longleftrightarrow |f(z)|(\operatorname{Im} z)^{k/2} : \mathfrak{H} \text{ 上で有界}$$

が示されるので、$f \in S_k$ の Fourier 展開 $f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} a(m) \exp(2\pi\sqrt{-1}mz)$ において

$$|a(m)| = O(m^{k/2}) \text{ as } m \to \infty \tag{1.3.3}$$

となる。実際、$|f(z)|(\operatorname{Im} z)^{k/2} \leq M \; \forall z \in \mathfrak{H}$ として

$$\begin{aligned} |a(m)| &= \left| \int_0^1 f(x + \sqrt{-1}y) e^{-2\pi\sqrt{-1}m(x+\sqrt{-1}y)} dx \right| \\ &\leq My^{-k/2} e^{2\pi my} \quad \text{for } 0 < \forall y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

となり、$y = 1/m$ とおけばよい。

さて、$\vartheta_S \in M_{n/2}$ $(n = 8, 16, 24, \cdots)$ だから、ϑ_S を Eisenstein 級数 E_k や尖点形式を用いて現せば、ϑ_S の Fourier 係数、即ち、二次不定方程式の解の個数 $N(S, 2m)$ に関する情報が得られるであろう。

まず、n が小さい場合から考えると、$N = 8$ のとき、$\vartheta \in M_4 = \mathbb{C}E_4$ だから、ϑ_S と E_4 の Fourier 展開の定数項を比較して $\vartheta_S = E_4$ となる。両辺の Fourier 係数を見れば、

$$N(S, 2m) = -\frac{8}{B_4}\sigma_3(m) = 240 \sum_{d|m} d^3$$

となる。$n=16$ のときも同様に$\vartheta_S \in M_8 = \mathbb{C}E_4^2 = \mathbb{C}E_8$ より $\vartheta_S = E_8$ となり

$$N(S,2m) = -\frac{16}{B_8}\sigma_7(m) = 480\sum_{d|m} d^7$$

を得る。$n=24$ のとき、ここで初めて M_k は 2 次元になる；$M_{12} = \langle E_4^3, E_6^2\rangle_{\mathbb{C}}$。そこで、尖点形式の空間との直和分解 $M_k = \mathbb{C}E_k \oplus S_k$ を考えれば S_{12} は 1 次元である。S_{12} の生成元として

$$\begin{aligned}\Delta(z) &= \frac{(2\pi)^{12}}{2^6 3^3}(E_4^3 - E_6^2) \\ &= (2\pi)^{12}\sum_{m=1}^{\infty}\tau(m)\exp(2\pi\sqrt{-1}mz)\end{aligned}$$

をとる。$\tau(m)$ は Ramanujan の τ-関数と呼ばれて、全て整数である。

ϑ_S の定数項を見て

$$\vartheta_S = E_{12} + c_S\cdot(2\pi)^{-12}\Delta \quad (c_S \in \mathbb{C})$$

よって

$$N(S,2m) = \frac{65520}{691}\sigma_{11}(m) + c_S\cdot\tau(m)$$

と書けるが、$\tau(1)=1$ に注意すると、c_S は

$$c_S = \frac{65520}{691} - N(S,2) \in \mathbb{Q}$$

から決定できる。Selberg 跡公式を用いて $\tau(m)$ の公式を計算することが出来る [15, p.85]。

一般の n に対しては、直和分解 $M_{n/2} = \mathbb{C}E_{n/2} \oplus S_{n/2}$ と ϑ_S の定数項を見て

$$\vartheta_S = E_{n/2} + f_S, \quad f_S \in S_{n/2}$$

と書ける。尖点形式 f_S の Fourier 係数の評価 (1.3.3) から $N(S,2m)$ の精密な漸近的評価

$$N(S,2m) = -\frac{n}{B_{n/2}}\sigma_{n/2-1}(m) + O(m^{n/4}) \text{ as } m \to \infty$$

を得る。このようにして $N(S,2m)$ の大きさに関する定性的な性質を示すことが出来るのであるが、解の個数 $N(S,2m)$ そのものに関して、もっと定量的な結果は得られないだろうか。その一つの解答として、次の Siegel の公式がある。

1.4 Siegel の公式

正定値な対称行列 $S \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ に対して

$$E(S) = \{\gamma \in GL_n(\mathbb{Z}) \mid \gamma S {}^t\gamma = S\}$$

を S の単数群と呼ぶ。一方、正定値 even unimodular な $S \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{Z})$ 全体の集合に $\gamma \in GL_n(\mathbb{Z})$ を $S^\gamma = {}^t\gamma S\gamma$ により作用させたとき、その $GL_n(\mathbb{Z})$-軌道の個数は有限であることが知られているので、その代表系を $\{S_1,\cdots,S_h\}$ とする。$\{S_1,\cdots,S_h\}$ は実質的に相異なる n 変数 2 次不定方程式の全体を与え、$|E(S_j)|^{-1}N(S_j,2m)$ は、2 次不定方程式 $xS_j{}^tx = 2m$ の実質的に相異なる解の個数を与える。ここで次の Sigel の公式が成り立つ；

定理 1.4.1 (Siegel) $\displaystyle\sum_{j=1}^{h}|E(S_j)|^{-1}\vartheta_{S_j}(z)=\left(\sum_{J=1}^{h}|E(S_j)|^{-1}\right)\cdot E_{n/2}(z).$

更に、

$$\sum_{j=1}^{h}|E(S_j)|^{-1}=2^{1-n}\cdot\frac{B_{n/2}}{(n/2)!}\prod_{i=1}^{n/2-1}B_{2i}$$

が成り立つ (Siegel-Minkowski の公式)。よって、上の定理で両辺の Fourier 係数を見れば

$$\sum_{j=1}^{h}|E(S_j)|^{-1}N(S_j,2m)=-\sigma_r(m)\cdot\frac{4^r}{r!}\prod_{i=1}^{r}B_{2i}\quad(r=\frac{n}{2}-1)$$

となる。

1.5 高次元の場合

even unimodular な整数係数対称行列 $S\in\mathrm{Sym}_n(\mathbb{Z})$ に対して今まで述べてきた話しを高次元の場合に拡張しよう。

まず、m 次 Siegel 上半空間を

$$\mathfrak{H}_m=\{z\in\mathrm{Sym}_m(\mathbb{C})\mid\mathrm{Im}\,z>0\}$$

と定義する。

$$Sp(m,\mathbb{R})=\{\sigma\in GL_{2m}(\mathbb{R})\mid\sigma J_m{}^t\sigma=J_m\},\quad J_m=\begin{bmatrix}0&1_m\\-1_m&0\end{bmatrix}$$

として $\Gamma=Sp(m,\mathbb{Z})=Sp(m,\mathbb{R})\cap GL_{2m}(\mathbb{Z})$ とおく。$\sigma\in Sp(m,\mathbb{R})$ の成分を $m\times m$ 行列 4 個のブロックに分けて $\gamma=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ と書くと、$z\in\mathfrak{H}_m$ に対して $J(\sigma,z)=cz+d\in GL_m(\mathbb{C})$ である。更に、$Sp(m,\mathbb{R})$ は $\mathfrak{H}_m$ に $\sigma z=(az+b)(cz+d)^{-1}$ により推移的に作用する。

$z\in\mathfrak{H}_m$ に対して無限級数

$$\vartheta_S^{(m)}(z)=\sum_{X\in M_{m,n}(\mathbb{Z})}\exp\pi\sqrt{-1}\mathrm{tr}(XS{}^tX\cdot z)$$

を考えると、これは $\mathfrak{H}_m$ 上で広義一様収束して $\mathfrak{H}_m$ 上の正則関数を与える。$X\in M_{m,n}(\mathbb{Z})$ に対して $T=\frac{1}{2}XS{}^tX\in\mathrm{Sym}_m(\mathbb{Q})$ とおくと、T は半正定値で対角成分は全て整数、他の成分は $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ に含まれる（このような行列を半整数対称行列と呼ぶ)。$\vartheta_S^{(m)}(z)$ の各項をまとめると

$$\vartheta_S^{(m)}(z)=\sum_{T\geq 0}N(S,2T)\exp 2\pi\sqrt{-1}\mathrm{tr}(Tz)$$

となる。ここで、$\displaystyle\sum_{T\geq 0}$ は半正定値半整数対称行列 $T\in\mathrm{Sym}_m(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$ 上の和で

$$N(S,2T)=\sharp\{X\in M_{m,n}(\mathbb{Z})\mid XS{}^tX=2T\}$$

である。即ち、$\vartheta_S^{(m)}(z)$ の係数が分かれば、行列の二次不定方程式 $XS{}^tX=2T$ $(X\in M_{m,n}(\mathbb{Z}))$ の解の個数について情報が得られることになる。定理 1.2.1 の証明と同様の議論を用いて、$\vartheta_S^{(m)}(z)$ が次のような変換公式を満たすことが示される；

定理 1.5.1 $\vartheta_S^{(m)}(\gamma z) = \det J(\gamma, z)^{n/2} \vartheta_S^{(m)}(z) \quad \forall \gamma \in \Gamma.$

さて、Eisenstein 級数を次のように定義する；$m+1$ より大きい偶数 k に対して

$$E_k^{(m)}(z) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} \det J(\gamma, z)^{-k} \quad (z \in \mathfrak{H}_m)$$

とおくと、$E_k^{(m)}(z)$ は $\mathfrak{H}_m$ 上で広義一様収束して $\mathfrak{H}_m$ 上の正則関数を与える。$E_k^{(m)}(z)$ の定義から、変換公式

$$E_k^{(m)}(\gamma z) = \det J(\gamma, z)^k E_k^{(m)}(z) \quad \forall \gamma \in \Gamma$$

が成り立つ事が分かり、Fourier 展開

$$E_k^{(m)}(z) = \sum_{T \geq 0} a_k(T) \exp 2\pi\sqrt{-1}\mathrm{tr}(Tz)$$

を持つ事が分かる。ここで、$\sum_{T \geq 0}$ は半正定値半整数対称行列 $T \in \mathrm{Sym}_m(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$ 上の和である。

大切なのは、次の Siegel の公式である；**1.4** の記号を用いて

定理 1.5.2 $n > 2m+2$ のとき

$$\sum_{j=1}^{h} |E(S_j)|^{-1} \vartheta_{S_j}^{(m)} = \left(\sum_{j=1}^{h} |E(S_j)|^{-1} \right) \cdot E_{n/2}^{(m)}.$$

両辺の Fourier 係数を見れば、全ての半正定値半整数対称行列 $T \in \mathrm{Sym}_m(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$ に対して

$$\sum_{j=1}^{h} |E(S_j)|^{-1} N(S_j, 2T) = \left(\sum_{j=1}^{h} |E(S_j)|^{-1} \right) \cdot a_k(T)$$

となる。従って $a_k(T)$ の具体的な公式が欲しいのだが、T が正定値の場合には、次のような式が成り立つ；

$$\begin{aligned} a_k(T) &= (2\pi\sqrt{-1})^{km} \cdot 2^{-m(m+1)/2} \pi^{-m(m-1)/4} \prod_{j=1}^{m} \Gamma\left(k - \frac{j-1}{2}\right)^{-1} \\ &\times (\det T)^{k-(m+1)/2} \lim_{q \to \infty} (2q)^{m(m+1)/2 - 2km} A(T, 2q). \end{aligned}$$

ここで正整数 q に対して

$$A(T, q) = \sharp\{X \in M_{m,2k}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \mid X S_{2k} {}^t X = 2T \pmod{q}\}, \quad S_{2k} = \begin{bmatrix} 0 & 1_k \\ 1_k & 0 \end{bmatrix}$$

である。中国剰余定理を用いれば、

$$\begin{aligned} a_k(T) &= \text{簡単な因子} \times (\det T)^{k-(m+1)/2} \cdot \prod_p \alpha_k(T; p), \\ \alpha_k(T; p) &= \lim_{n \to \infty} p^{m(m+1)/2 - 2km} A(T, p^n) \end{aligned}$$

となる。$\alpha_k(T; p)$ は、p^n を法とした解の $M_{m,2k}(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ における密度（の極限）である。$\alpha_k(T; p)$ を local density と呼ぶ。$\prod_p$ は全ての素数 p 上の積である。最近、桂田英典氏（室蘭工大）により、$a_k(T)$ の explicit formula が得られた ([5])。

2 量子力学と Stone-von Neumann の定理

2.1 量子力学

直線上の質点の量子力学を思いだそう。物理量 A を相空間 $\mathbb{R}^2$ 上の関数として書く。ここで、$(p,q)\in\mathbb{R}^2$ は、p が質点の運動量、q が質点の直線上の位置を表すとする。さて、物理量 A が値 α をとる定常状態を量子力学的に調べるには、まず (p,q) の関数 A で p を微分作用素 $P=\dfrac{h}{2\pi\sqrt{-1}}\dfrac{d}{dq}$ で置き換え、q を作用素 $Q=$ "q 倍" で置き換えて出来る作用素を $\widehat{A}$ とする。ここで $h=6.63\times10^{-34}\,J\cdot s$ は Planck 定数である。そこで固有値問題

$$\widehat{A}\varphi=\alpha\varphi,\ \varphi\in C^{\infty}(\mathbb{R})\ \text{s.t.}\ \int_{\mathbb{R}}|\varphi(q)|^2dq=1 \tag{2.1.1}$$

の解を φ とする。このとき別の物理量 B が状態 φ に対して期待される観測量は

$$\int_{\mathbb{R}}(\widehat{B}\varphi)(q)\overline{\varphi(q)}dq$$

に等しい、というのが量子力学の標準的な解釈である。

例として、原点を支点とした一次元の調和振動子を考えよう。質点の質量を m、バネ定数を k とすると、調和振動子の全エネルギーは

$$H=\frac{1}{2m}p^2+\frac{k}{2}q^2$$

だから、対応する作用素 $\widehat{H}$ は

$$\widehat{H}=-\frac{\hbar}{2m}\frac{d^2}{dq^2}+\frac{k}{2}q^2$$

である。但し、$\hbar=\dfrac{h}{2\pi}$ である。全エネルギーが E である定常状態を知るために、固有値問題 $\widehat{H}\varphi=E\varphi$ を解こう。

$$q=bx,\ \varphi(q)=f(x),\ b=\left(\frac{\hbar^2}{mk}\right)^{1/4}$$

として f の微分方程式に直すと

$$-\frac{d^2f}{dx^2}+x^2f=\lambda f,\quad \lambda=\frac{2}{\hbar}\sqrt{\frac{m}{k}}\cdot E$$

となる。$f(x)=u(x)\exp(-x^2/2)$ として u の微分方程式を求めると

$$\frac{d^2u}{dx^2}-2x\frac{du}{dx}+(\lambda-1)\cdot u=0$$

となる。$u=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ として微分方程式に代入すると

$$c_{n+2}=\frac{2n+1-\lambda}{(n+1)(n+2)}c_n,\ \forall n\geq0$$

となる。よって

$$u = c_0 u_0 + c_1 u_1,\ u_i = \sum_{s=0}^{\infty} a_{2s+i} x^{2s+i}$$

$$a_0 = a_1 = 1,\ a_{n+2} = \frac{2n+1-\lambda}{(n+1)(n+2)} a_n,\ \forall n \geq 0$$

となる。ここで u_0 または u_1 が無限級数になると $f(x) = u(x)\exp(-x^2/2)$ は $\mathbb{R}$ 上で二乗可積分でなくなるので、

$$\lambda = 2n+1 \text{ for } n = 0, 1, 2, \cdots$$

でなくてはならない。このとき $u(x)$ は Hermite 多項式の定数倍である；

$$u(x) = c \cdot H_n(x),\ H_n(x) e^{-x^2} = \left(-\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2}.$$

即ち $n = 0, 1, 2, \cdots$ に対して

$$\varphi_n(q) = f_n(x) = H_n(x)\exp(-x^2/2), \quad E_n = \hbar \cdot \left(n + \frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{k}{m}}$$

が固有値問題 $\widehat{H}\varphi = E\varphi$ の解である。詳しくは、[1, 23] を参照して下さい。

2.2 Heisenberg 群と Schrödinger 表現

前節で考えた作用素

$$P = \frac{h}{2\pi\sqrt{-1}} \frac{d}{dq},\ Q = \text{“}q\ \text{倍”},\ I = \text{恒等変換}$$

は交換関係

$$[P, Q] = \frac{h}{2\pi\sqrt{-1}} \cdot I,\ [P, I] = [Q, I] = 0$$

を満たす。即ち $\mathbb{C}$ 上張られた空間 $\langle P, Q, I\rangle_{\mathbb{C}}$ は 3 次元の Lie 環をなす。この Lie 環をもう少し具体的に構成する事ができる。$V = \mathbb{R}^2$ 上の斜交形式を $D(x, y) = xJ_1{}^t y$ ($J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$) として、$\mathfrak{h}[V] = V \times \mathbb{R}$ は Lie bracket

$$[(x, t), (y, u)] = (0, D(x, y)),\ (x, y \in V,\ t, u \in \mathbb{R})$$

により実 Lie 環となる。その $\mathbb{R}$-基底と交換関係

$$X_0 = ((1, 0), 0),\ Y_0 = ((0, 1), 0),\ S_0 = ((0, 0), 1),$$

$$[X_0, y_0] = S_0,\ [X_0, S_0] = [Y_0, S_0] = 0$$

を見れば、前節の量子力学の処方は Lie 環 $\mathfrak{h}[V]$ の $L^2(\mathbb{R}) \cap C^\infty(\mathbb{R})$ への表現

$$X_0 \mapsto \frac{2\pi\sqrt{-1}}{h} \cdot P,\ Y_0 \mapsto \frac{2\pi\sqrt{-1}}{h} \cdot Q,\ S_0 \mapsto \frac{2\pi\sqrt{-1}}{h} \cdot I$$

に他ならない。この Lie 環の表現は積分することができる。

まず、Lie 環 $\mathfrak{h}[V]$ を持つ単連結実 Lie 群を構成する。$H[V] = V \times \mathbb{R}$ は群演算

$$(x,t)\cdot(y,u) = (x+y, t+u+\frac{1}{2}D(x,y))$$

により単連結実 Lie 群となり、その Lie 環は $\mathfrak{h}[V]$ で、指数写像は

$$\exp : \mathfrak{h}[V] \ni (x,t) \mapsto (x,t) \in H[V]$$

である。$H[V]$ の中心は $\{(0,t) \in H[V] \mid t \in \mathbb{R}\}$ である。任意の $0 \neq c \in \mathbb{R}$ に対して、$H[V]$ の $L^2(\mathbb{R})$ 上の unitary 表現 Π_c が

$$(\Pi_c(h)\varphi)(w) = \mathrm{e}\left(c\cdot(t+\frac{1}{2}xy+wy)\right)\varphi(w+x) \quad (h = ((x,y),t) \in H[V])$$

により定義される。Π_c の微分表現として $\mathfrak{h}[V]$ の $L^2(\mathbb{R}) \cap C^\infty(\mathbb{R})$ 上の表現が定まる。即ち、$X \in \mathfrak{h}[V]$ に対して

$$\Pi_c(X)\varphi = \left(\frac{d}{dt}\Pi_c(\exp tX)\varphi\right)_{t=0}$$

とおく。例えば

$$\begin{aligned}
(\Pi_c(\exp tX_0)\varphi)(w) &= \varphi(w+t), \quad \text{よって} \quad \Pi_c(X_0)\varphi = \frac{d\varphi}{dw},\\
(\Pi_c(\exp tY_0)\varphi)(w) &= \mathrm{e}(cwt)\varphi(w), \quad \text{よって} \quad \Pi_c(Y_0)\varphi = 2\pi\sqrt{-1}c\cdot w\cdot\varphi,\\
(\Pi_c(\exp tS_0)\varphi)(w) &= \mathrm{e}(ct)\varphi(w), \quad \text{よって} \quad \Pi_c(S_0)\varphi = 2\pi\sqrt{-1}c\cdot\varphi.
\end{aligned}$$

よって量子力学の処方となる $\mathfrak{h}[V]$ の表現は $H[V]$ の unitary 表現 $\Pi_{1/h}$ の微分表現に等しい。

この様な量子力学的な背景があるので、$H[V]$ を Heisenberg 群、Π_c を Schrödinger 表現と呼ぶのである。これからの話では、次の二つの定理が基本的である；

定理 2.2.1 任意の $0 \neq c \in \mathbb{R}$ に対して Π_c は $H[V]$ の既約 *unitary* 表現である。

定理 2.2.2 (Stone-von Neumann) $H[V]$ の既約 *unitary* 表現 π が $0 \neq c \in \mathbb{R}$ に対して $\pi(0,t) = \mathrm{e}(ct)\cdot id$ *(*$\forall t \in \mathbb{R}$*)* を満たすならば、π は Π_c と *unitary* 同値である。

Weil 表現は、これら二つの定理に基づいて構成されるのである。物理的に見れば、定理 2.2.2 は量子力学の二つの表現形式、Heisenberg 形式と Schrödinger 形式が同等であることを数学的に保証するものであると考えられる。現在では 定理 2.2.1、定理 2.2.2 はベキ零 Lie 群の既約表現に関する Kirillov の一般論の簡単な Corollary として示す事ができるが [13, 6]、次節では Kirillov の理論を用いない直接証明を与える事にする。定理 2.2.2 より強い次の定理を示す；

定理 2.2.3 $H[V]$ の *unitary* 表現 π が $0 \neq c \in \mathbb{R}$ に対して$\pi(0,t) = \mathbf{e}(ct)\cdot id$ *(*$\forall t \in \mathbb{R}$*)* を満たすならば、適当な複素 *Hilbert* 空間 E とその上の $H[V]$ の自明な表現 $\mathbf{1}_E$ に対して、π はテンソル積$\Pi_c \otimes \mathbf{1}_E$ と *unitary* 同値である。

2.3 定理の証明

2.3.1

まず $H[V]$ には $GL_2(\mathbb{R})$ が左から $(x,t)^\sigma = (x\sigma, \det\sigma\cdot t)$ により自己同型群として作用する。特に $\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$ とおくと、$\Pi_1(h^\sigma) = \Pi_c(h)$ $(\forall h \in H[V])$ だから、定理を $c=1$ の時に示せばよい。

2.3.2

そこで $\langle x, y\rangle = \exp(2\pi\sqrt{-1}xy)$ $(x, y \in \mathbb{R})$ とする。

$$F : V \times V \to \mathbb{C}^1; \quad F((x,y),(x',y')) = \langle x, y'\rangle$$

として、$A(\mathbb{R}) = V \times \mathbb{C}^1$ は群演算

$$(z,t)\cdot(z',u) = (z+z', tu\cdot F(z,z'))$$

により局所 compact unimodular 群となり、$H[V]$ からの全射群準同型写像

$$(x,t) \mapsto (x, F(2^{-1}x, x)\exp(2\pi\sqrt{-1}t))$$

がある。その核 $\{(0,t) \in H[V] \mid t \in \mathbb{Z}\}$ 上で Π_1 は自明になるから、Π_1 は $A(\mathbb{R})$ の表現を通す。Π_1 を $A(\mathbb{R})$ の表現として書くと

$$(\Pi_1(h)\varphi)(w) = t\cdot\langle w, y\rangle\cdot\varphi(w+x) \quad \text{for } h = (x,y),t) \in A(\mathbb{R}),\ \varphi \in L^2(\mathbb{R})$$

となる。

2.3.3

部分 Fourier 変換として unitary 同型

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$$

が

$$(\mathcal{F}f)(x,y) = \int_{\mathbb{R}} f(y-x, \alpha)\langle x, \alpha\rangle d\alpha \text{ for } f \in L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$$

により定まる。逆変換は

$$(\mathcal{F}^{-1}g)(x,\alpha) = \int_{\mathbb{R}} g(y, y+x)\langle -y, \alpha\rangle dy \text{ for } g \in L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$$

である。

$\varphi \in C_c(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ に対して、$\varphi^\sharp \in C_c(A(\mathbb{R}))$ を $\varphi^\sharp(z,t) = t^{-1}\varphi(z)$ により定義する。$\psi \in C_c(A(\mathbb{R}))$ に対して、$\psi^\flat \in C_c(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ を

$$\psi^\flat(z) = \int_{\mathbb{C}^1} \psi(z,t)tdt \ (z \in \mathbb{R}\times\mathbb{R})$$

により定義する。

2.3.4

ここで $L^2(\mathbb{R})$ の bounded linear operator の全体を $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))$、Hilbert-Schmidt operator の全体を $\mathcal{H}(L^2(\mathbb{R}))$ と表す。$\mathcal{H}(L^2(\mathbb{R}))$ は Hilbert-Schmidt norm に関して複素 Hilbert 空間となる。$K \in L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ に対して

$$(T_K\varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}} K(x,y)\varphi(y)dy \text{ for } \varphi \in L^2(\mathbb{R})$$

とおくと $(*) : K \mapsto T_K$ は unitary 同型 $L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}(L^2(\mathbb{R}))$ を与える。

$\varphi \in C_c(A(\mathbb{R}))$ に対して$\Pi_1(\varphi) \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))$ が

$$(\Pi_1(\varphi)f, g) = \int_{A(\mathbb{R})} \varphi(h)(\Pi_1(h)f, g)dh \; (f, g \in L^2(\mathbb{R}))$$

により定義される。

形式的な計算により

$$\begin{array}{ccc} C_c(A(\mathbb{R})) & \xrightarrow{\Pi_1} & \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R})) \\ \sharp\big\uparrow & & \big\uparrow(*) \\ C_c(\mathbb{R}\times\mathbb{R}) & \xrightarrow[\mathcal{F}]{} & L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}) \end{array}$$

が可換であることが分かる。$C_c(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ は $L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ の dense subspace だから、上の可換図式から $\{\Pi_1(\varphi) \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R})) \mid \varphi \in C_c(A(\mathbb{R}))\}$ は $\mathcal{H}(L^2(\mathbb{R}))$ の dense subspace であることが分かる。

2.3.5 定理 2.2.1 の証明

$L^2(\mathbb{R})$ の unitary 線形自己同型写像 T に対して

$$T\circ\Pi_1(h) = \Pi_1(h)\circ T \; \forall h \in A(\mathbb{R}) \Rightarrow T = \lambda\cdot id \; (\lambda \in \mathbb{C}^1)$$

を示せば良い。仮定から

$$T\circ\Pi_1(\varphi) = \Pi_1(\varphi)\circ T \quad \forall\varphi \in C_c(A(\mathbb{R}))$$

よって **2.3.4** の結果から

$$T\circ T_K = T_K\circ T \quad \forall K \in L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$$

となる。任意の $0 \neq g \in L^2(\mathbb{R})$ を固定する。$f \in L^2(\mathbb{R})$ に対して $K \in L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ を $K(x,y) = f(x)\overline{g(y)}$ により定義すると

$$|g|^2Tf = T\circ T_Kg = T_K\circ Tg = (Tg, g)f$$

となり $T = \lambda\cdot id \; (\lambda = (Tg,g)/|g|^2)$ が示された。

2.3.6

定理 2.2.3 を示すために少し準備をする。$C_c(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ は

$$\varphi *_F \psi(z) = \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \varphi(z-z')\psi(z')F(z-z',z')dz$$

を積とし、involution $\varphi^*(z) = \overline{\varphi(-z)}$ を持つ involutive $\mathbb{C}$-algebra である。又、$L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ は

$$K * L(x,y) = \int_{\mathbb{R}} K(x,z)L(z,y)dz$$

を積とし、involution $K^*(x,y) = \overline{K(y,x)}$ を持つ involutive $\mathbb{C}$-algebra である。このとき部分 Fourier 変換

$$\mathcal{F} : C_c(\mathbb{R}\times\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$$

は involutive $\mathbb{C}$-algebra homomorphism である。更に、$\varphi \in C_c(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, $h=(z,t)\in A(\mathbb{R})$ に対して

$$h\cdot\varphi(w) = tF(z,w-z)\varphi(w-z),\ \varphi\cdot h(w) = tF(w-z,z)\varphi(w-z)$$

とおくと

$$T_{\mathcal{F}(h\cdot\varphi)} = \Pi_1(h)\circ T_{\mathcal{F}\varphi},\ T_{\mathcal{F}(\varphi\cdot h)} = T_{\mathcal{F}\varphi}\circ \Pi_1(h)$$

となることが分かる。

一方、$C_c(A(\mathbb{R}))$ は convolution

$$\varphi * \psi(h) = \int_{A(\mathbb{R})} \varphi(hg^{-1})\psi(g)dg$$

を積とし involution $\varphi^*(h) = \overline{\varphi(h^{-1})}$ を持つ involutive $\mathbb{C}$-algebra である。このとき$\varphi \mapsto \varphi^\sharp$ は $C_c(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ から $C_c(A(\mathbb{R}))$ への involutive $\mathbb{C}$-algebra homomorphism となる。又、$\varphi \in C_c(A(\mathbb{R}))$, $h\in A(\mathbb{R})$ に対して

$$h\cdot\varphi(h') = \varphi(h^{-1}h'),\ \varphi\cdot h(h' = \varphi(h'h^{-1})$$

とおくと

$$(h\cdot\varphi)^\sharp = h\cdot\varphi^\sharp,\ (\varphi\cdot h)^\sharp = \varphi^\sharp\cdot h$$

となる。以上は形式的な計算により容易に示される。

2.3.7 定理 2.2.3 の証明

$\mathbb{R}$ 上の Schwartz 関数$\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$ で $|\psi| = 1$ なるものを一つ選んで固定する。P を $L^2(\mathbb{R})$ から一次元部分空間 $\mathbb{C}\psi$ への直交射影とする。Schwartz 関数$\psi\otimes\overline{\psi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ を $\psi\otimes\overline{\psi}(x,y) = \psi(x)\overline{\psi(y)}$ により定義すると P は $L^2(\mathbb{R})$ の Hilbert-Schmidt operator $P = T_{\psi\otimes\overline{\psi}}$ と書ける。さて Schwartz 関数$\psi\otimes\overline{\psi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ の部分 Fourier 逆変換$\varphi = \mathcal{F}^{-1}(\psi\otimes\overline{\psi}) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ は再び Schwartz 関数である。P は直交射影だから $P^2 = P = P^*$, よって$\varphi *_F \varphi = \varphi = \varphi^*$, よって$\varphi^\sharp * \varphi^\sharp = \varphi^\sharp = (\varphi^\sharp)^*$, よって $Q = \pi(\varphi^\sharp)$ は π の表現空間 H_π から $E = \pi(\varphi^\sharp)H_\pi$ への直交射影となる。まず、幾つかの補題を示す；

補題 2.3.7.1 $\{\pi(h)\xi \mid h \in A(\mathbb{R}), \xi \in E\}$ は H_π の *dense subspace* を張る。

証明 $\xi, \zeta \in H_\pi$, $h = (z,t) \in A(\mathbb{R})$ に対して

$$(\pi(h) \circ Q \circ \pi(h^{-1})\xi, \zeta) = \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \varphi(z')(\pi(z',1)\xi,\zeta)F(z,z')F(z',z)dz'$$

となる。よって $\zeta \in H_\pi$ に対して

$$(\pi(h) \circ Q\xi, \zeta) = 0 \quad \forall h \in A(\mathbb{R}),\ \xi \in H_\pi$$

とすると

$$\varphi(z')(\pi(z',1)\xi,\zeta) = 0 \quad \forall z' \in \mathbb{R}\times\mathbb{R},\ \xi \in H_\pi$$

となり $\zeta = 0$ となる。 □

補題 2.3.7.2 $Q \circ \pi(h) \circ Q = (\Pi_1(h)\psi, \psi)Q \quad \forall h \in A(\mathbb{R})$.

証明 まず

$$\begin{aligned} T_{\mathcal{F}(\varphi *_F (h\cdot\varphi))} &= T_{\mathcal{F}\varphi} \circ T_{\mathcal{F}(h\cdot\varphi)} \\ &= P \circ \Pi_1(h) \circ P = (\Pi_1(h)\psi,\psi)P \\ &= (\Pi_1(h)\psi,\psi)T_{\mathcal{F}\varphi} \end{aligned}$$

よって $\varphi *_F (h\cdot\varphi) = (\Pi_1(h)\psi,\psi)\varphi$, よって $\varphi^\sharp * (h\cdot\varphi^\sharp) = (\Pi_1(h)\psi,\psi)\varphi^\sharp$, 従って

$$Q \circ \pi(h) \circ Q = (\Pi_1(h)\psi,\psi)Q$$

を得る。 □

補題 2.3.7.3 $\forall\xi,\zeta \in E$, $\forall h,h' \in A(\mathbb{R})$ に対して

$$(\pi(h)\xi, \pi(h')\zeta) = (\Pi_1(h)\psi, \Pi_1(h')\psi)(\xi,\zeta).$$

証明 $\xi = Qu$, $\zeta = Qv$ $(u, v \in H_\pi)$ として

$$\begin{aligned} (\pi(h)\xi, \pi(h')\zeta) &= (\pi(h)\circ Qu, \pi(h')\circ Qv) \\ &= (Q\circ\pi(h'^{-1}h)\circ Qu, v) \\ &= (\Pi_1(h'^{-1}h)\psi,\psi)(Qu,v) = (\Pi_1(h)\psi, \Pi_1(h')\psi)(\xi,\zeta) \end{aligned}$$

となる。ここで 補題2.3.7.2 を用いた。 □

ここまで来ると 定理2.2.3 の証明はすぐに出来る。まず Π_1 は $A(\mathbb{R})$ の $L^2(\mathbb{R})$ 上の既約表現だから $\{\Pi_1(h)\psi \mid h \in A(\mathbb{R})\}$ は $L^2(\mathbb{R})$ の dense subspace を張る。そこで

$$\sum_j c_j\Pi_1(h_j)\psi = 0 \text{ for } c_j \in \mathbb{C},\ h_j \in A(\mathbb{R})$$

ならば、任意の $\xi \in E$ に対して

$$\begin{aligned}|\sum_j c_j\pi(h_j)\xi|^2 &= \sum_{i,j} c_i\overline{c_j}(\pi(h_i)\xi, \pi(h_j)\xi)\\ &= \sum_{i,j} c_i\overline{c_j}(\Pi_1(h_i)\psi, \Pi_1(h_j)\psi)|\xi|^2\\ &= |\sum_j c_j\Pi_1(h_j)\psi|^2|\xi|^2 = 0\end{aligned}$$

であることに注意すると completed tensor product $L^2(\mathbb{R})\widehat{\otimes}_{\mathbb{C}}E$ から H_π への unitary 線形同型写像 I が $I(\Pi_1(h)\psi \otimes \xi) = \pi(h)\xi$ により定義されることが分かる。このとき

$$\pi(h) \circ I = I \circ (\Pi_1(h) \otimes \mathrm{id})\ \forall h \in A(\mathbb{R})$$

となり、定理 2.2.3 が証明される。

注意 1 G を locally compact abelian group (additive) として $\widehat{G}$ を G の Pontryagin dual とする (即ち、G の unitary character 全体の集合を character の積に関して additive group としたものに open-compact topology を入れて locally compact abelian group としたもの)。G と $\widehat{G}$ の canonical pairing を $\langle x, \alpha\rangle = \alpha(x)$ $(x \in G, \alpha \in \widehat{G})$ とする。$V = G \times \widehat{G}$ として

$$F : V \times V \to \mathbb{C}^1;\ \ F((x, \alpha), (y, \beta)) = \langle x, \beta\rangle$$

とおくと、$A(G) = V \times \mathbb{C}^1$ は群演算

$$(z, t) \cdot (z', u) = (z + z', tu \cdot F(z, z'))$$

により locally compact unimodular group となる。上で述べた議論は、記号を適当に変更すれば、$A(G)$ にもそのまま適用できることが分かるから、$A(G)$ に対しても定理 2.2.1 や定理 2.2.3 と同様の定理が成り立つ。Weil は [24] でそのような議論をして、一般の locally compact abelian group 上の Poisson 和公式を Weil 表現の文脈に取り込んでいる。このような議論は、局所体上の理論と adele 環上の理論を一括して扱える利点もある。

3 アーベル多様体上の線束

この節では、複素数体上定義されたアーベル多様体の上の線束と、その global section としての theta 級数について解説する。以下、$\mathbf{e}(x) = \exp 2\pi\sqrt{-1}x$ とおく。

3.1 複素輪環体上の線束

以下、g 次元複素ベクトル空間 V と、V の $\mathbb{Z}$-格子 $\Lambda \subset V$ を固定する。$X = \Lambda\backslash V$ を複素輪環体とし、X 上の正則関数の成す構造層を $\mathcal{O}_X$ とする。

3.1.1 Appell-Humbert の定理

複素輪環体 X 上の線束の同型類の成す群 $\mathrm{Pic}(X) = H^1(X, \mathcal{O}_X^\times)$ を具体的に書くのが目標である。更に、標準的な exact sequence

$$0 \to \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{e^{2\pi\sqrt{-1}*}} \mathcal{O}_X^\times \to 1$$

から生ずる connecting homomorphism

$$c : \mathrm{Pic}(X) = H^1(X, \mathcal{O}_X^\times) \to H^2(X, \mathbb{Z})$$

に対して $\mathrm{Pic}_0(X) = \mathrm{Ker}\, c \subset \mathrm{Pic}(X)$ とおいて、exact sequence

$$1 \to \mathrm{Pic}_0(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X) \xrightarrow{c} \mathrm{Ker}[H^2(X, \mathbb{Z}) \to H^2(X, \mathcal{O}_X)] \to 0$$

を具体的に書きたい。そのために

1) $H : V \times V \to \mathbb{C}$: Hermitian form s.t. $\mathrm{Im}\, H(\Lambda \times \Lambda) \subset \mathbb{Z}$,

2) $\alpha : \Lambda \to \mathbb{C}^1$ s.t. $\alpha(u+v) = \alpha(u)\alpha(v)\mathbf{e}\left(-\frac{1}{2}\mathrm{Im}\, H(u,v)\right) \quad \forall u, v \in \Lambda$

なる対 (H, α) の全体を $G(X)$ と書き、群演算

$$(H, \alpha) \cdot (H', \alpha') = (H + H', \alpha\alpha')$$

により abelian group にしておく。$H(X)$ を、上の条件 1) を満たす Hermitian form H の全体からなる加法群とする。全射群準同型写像

$$j : G(X) \ni (H, \alpha) \mapsto H \in H(X)$$

に対して

$$G_0(X) = \mathrm{Ker}(j) = \{(0, \alpha) \mid \alpha : \Lambda \to \mathbb{C}^1 : \text{group hom.}\}$$

とおく。$(H, \alpha) \in G(X)$ を取ると、$u \in \Lambda$ は $(x, t) \in V \times \mathbb{C}$ に

$$u \cdot (x, t) = (x + u, t\alpha(u) \exp\left(H(x, u) + \frac{1}{2}H(u, u)\right))$$

により作用する。$L(H, \alpha) = \Lambda \backslash (V \times \mathbb{C})$ は projection mapping

$$\pi : L(H, \alpha) \ni (x, t) \pmod{\Lambda} \mapsto x \pmod{\Lambda} \in X$$

により X 上の線束を成す。$(H, \alpha) \in G(X)$ に $L(H, \alpha)$ の同型類 $[L(H, \alpha)] \in \mathrm{Pic}(X)$ を対応させることにより、群準同型写像

$$\lambda : G(X) \to \mathrm{Pic}(X)$$

が定まる。

X 上の cohomology $H^2(X, \mathbb{Z})$ は自然に群の cohomology $H^2(\Lambda, \mathbb{Z})$ と同型になる。ここで Λ は $\mathbb{Z}$ に自明に作用させる。cohomology class $\overline{f} \in H^2(\Lambda, \mathbb{Z})$ に対して $g(u \wedge v) =$

$f(u,v)-f(v,u)$ $(u,v\in\Lambda)$ なる $g\in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\bigwedge^2\Lambda,\mathbb{Z})$ が定義される。更に、$\mathbb{R}$-linear extension を取れば、自然な同一視

$$\begin{aligned} H^2(X,\mathbb{Z}) &= H^2(\Lambda,\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\bigwedge^2\Lambda,\mathbb{Z}) \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} A: V\times V\to\mathbb{R} & : \text{alternating } \mathbb{R}\text{-bilinear} \\ & \text{s.t. } A(\Lambda\times\Lambda)\subset\mathbb{Z} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

を得る。そこで、群準同型写像

$$\mu: H(X)\ni H\mapsto \mathrm{Im}\,H\in H^2(X,\mathbb{Z})$$

が定義される。更に、$(H,\alpha)\in G(X)$ に対して

$$c[L(H,\alpha)] = [u\wedge v\mapsto \mathrm{Im}\,H(u,v)]\in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\bigwedge^2\Lambda,\mathbb{Z}) = H^2(X,\mathbb{Z})$$

が成り立つ。ここで次の定理が成り立つ；

定理 3.1.1.1 (Appell-Humbert) 可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & G_0(X) & \longrightarrow & G(X) & \xrightarrow{j} & H(X) & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\lambda} & & \downarrow{\scriptstyle\mu} & & \\ 0 & \to & \mathrm{Pic}_0(X) & \longrightarrow & \mathrm{Pic}(X) & \xrightarrow[c]{} & \mathrm{Ker}[H^2(X,\mathbb{Z})\to H^2(X,\mathcal{O}_X)] & \to & 0 \end{array}$$

が成り立ち、

$$\lambda: G(X)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Pic}(X),\quad \mu: H(X)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Ker}[H^2(X,\mathbb{Z})\to H^2(X,\mathcal{O}_X)]$$

は同型である。

$(H,\alpha)\in G(X)$ に対して

$$\Lambda_H = \{x\in V \mid \mathrm{Im}\,H(x,u)\in\mathbb{Z}\ \forall u\in\Lambda\}$$

とおく。また、X 上の線束 $L(H,\alpha)$ の global section の空間を

$$\mathcal{L}(H,\alpha) = \{\theta: X\to L(H,\alpha) : \text{holo.} \mid \pi\circ\theta = id\}$$

とする。$\mathcal{L}(H,\alpha)$ を V 上の関数に引き戻して書けば、$\mathcal{L}(H,\alpha)$ は

$$\theta(x+u) = \alpha(u)\exp\{\pi(H(x,u)+\frac{1}{2}H(u,u))\}\cdot\theta(x)\quad \forall u\in\Lambda$$

なる正則関数 $\theta: V\to\mathbb{C}$ の全体と複素線形同型である。このとき次の定理が成り立つ；

定理 3.1.1.2 $(\Lambda_H:\Lambda)<\infty$ なるための必要十分条件は H が非退化なることである。このとき、

$$\dim\mathcal{L}(H,\alpha) = \begin{cases} (\Lambda_H:\Lambda)^{1/2} & : \text{if } H>0 \\ 0 & : \text{otherwise} \end{cases}$$

となる。

3.1.2 偏極アーベル多様体

$H(X)$ の元で正定値なるもの（即ち、Λ に関する Riemann form）全体を $H^+(X)$ と書く。$H \in H^+(X)$ に対して

$$\Lambda_H/\Lambda \xrightarrow{\sim} \left(\bigoplus_{j=1}^{g} \mathbb{Z}/e_j\mathbb{Z}\right)^2 \quad 1 < e_j \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } e_j | e_{j+1}$$

となる。$\{e_1, \cdots, e_g\}$ を H の invariant factor と呼ぶことにする。

$H, H' \in H^+(X)$ に対して、$H' = r \cdot H$ なる正の有理数 r が存在するとき（即ち、H, H' の invariant factor をそれぞれ $\{e_1, \cdots, e_g\}$, $\{e'_1, \cdots, e'_g\}$ として、$e_1/e'_1 = \cdots = e_g/e'_g$ となるとき）、$H \sim H'$ と書くことにすると、$\sim$ は $H^+(X)$ 上の同値関係を定める。$H \in H^+(X)$ の invariant factor が $\{e_1, \cdots, e_g\}$ のとき、H の同値類 $[H] \in H^+(X)/\sim$ を X 上の type $[e_1 : \cdots : e_g]$ の偏極と呼び、$(X, [H])$ を type $[e_1 : \cdots : e_g]$ の偏極アーベル多様体と呼ぶ。ここで次の定理が成り立つ；

定理 3.1.2.1 (Lefschetz) 偏極アーベル多様体 $(X, [H])$ に対して $(H, \alpha) \in G(X)$ とする。$3 \leq \forall m \in \mathbb{Z}$ に対して $\mathcal{L}(mH, \alpha^m)$ の $\mathbb{C}$-基底を $\{\theta_0, \theta_1, \cdots, \theta_N\}$ とすると、複素輪環体 X から複素射影空間 $\mathbf{P}^N(\mathbb{C})$ への埋め込みが $x \mapsto [\theta_0(x) : \theta_1(x) : \cdots : \theta_N(x)]$ により与えられる。

複素射影空間の閉部分多様体は全て代数多様体である（Chow の定理）から、上の Lefschetz の定理から、偏極アーベル多様体は代数多様体の構造を持つ事がわかる。

3.1.3 theta 関数

$\mathbb{R}$-双線形形式 $Q : V \times V \to \mathbb{C}$ が

1) $Q(\sqrt{-1}x, y) = \sqrt{-1}Q(x, y)$,

2) $Q(x, y) - Q(y, x) \in \sqrt{-1}\mathbb{R} \quad \forall x, y \in V$

を満たすとき、Q を quasi-Hermitian form と呼ぶ。このとき

$$H_Q(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{-1}}(Q(\sqrt{-1}x, y) - Q(x, \sqrt{-1}y)) \quad (x, y \in V)$$

は V 上の Hermitian form となる（Q の Hermitian part）。また、

$$S_Q(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{-1}}(Q(\sqrt{-1}x, y) + Q(x, \sqrt{-1}y)) \quad (x, y \in V)$$

は V 上の二次形式となり（Q の symmetric part）、$Q = H_Q + S_Q$ となる。

$$A_Q(x, y) = \operatorname{Im} H_Q(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{-1}}(Q(x, y) - Q(y, x)) \quad (x, y \in V)$$

とおく。

V 上の quasi-Hermitian form Q と $\alpha : \Lambda \to \mathbb{C}^1$ に対して

$$\theta(x+u) = \alpha(u)\exp\{\pi(Q(x,u) + \frac{1}{2}Q(u,u))\} \cdot \theta(x) \quad \forall u \in \Lambda$$

なる正則関数 $\theta : V \to \mathbb{C}$ を Λ に関する type (Q,α) の theta 関数と呼ぶ。Λ に関する type (Q,α) の theta 関数全体の成す複素ベクトル空間を $\mathcal{L}(Q,\alpha)$ と書く。

$\mathcal{L}(Q,\alpha) \neq 0$ のとき、$(H_Q,\alpha) \in G(X)$ で、$\theta \in \mathcal{L}(Q,\alpha)$ に対して

$$\theta^*(x) = \theta(x)\exp(-\frac{\pi}{2}S_Q(x,x))$$

とおくと、$\theta \mapsto \theta^*$ は $\mathbb{C}$-線形同型写像 $\mathcal{L}(Q,\alpha) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}(H_Q,\alpha)$ を与える。

3.2 偏極アーベル多様体のモジュライ空間

以下、$2g$ 次元実斜交空間 (V,D) を固定する。即ち、V は $2g$ 次元実ベクトル空間で、D は V 上の非退化交代形式である。更に、V の $\mathbb{Z}$-格子$\Lambda \subset V$ を取り、$D(u,v) \in \mathbb{Z} \;\; \forall u,v \in \Lambda$ と仮定する。D に関する Λ の dual lattice

$$\Lambda^* = \{x \in V \mid D(u,x) \in \mathbb{Z} \;\; \forall u \in \Lambda\}$$

は Λ を含む V の $\mathbb{Z}$-格子で、

$$\Lambda^*/\Lambda \simeq \left(\bigoplus_{j=1}^{g} \mathbb{Z}/e_j\mathbb{Z}\right)^2, \quad 1 < e_j \in \mathbb{Z}\,\text{s.t. } e_j | e_{j+1}$$

となる。(V,D) に付随する斜交群を

$$Sp(V) = \{\sigma \in GL_{\mathbb{R}}(V) \mid D(x\sigma, y\sigma) = D(x,y) \;\; \forall x,y \in V\}$$

とおく。また

$$Sp(\Lambda) = \{\sigma \in Sp(V) \mid \Lambda\sigma = \Lambda\}$$

とおく。

3.2.1 複素構造の集合としての Sigel 上半空間

$$\mathfrak{H}_V = \{I \in Sp(V) \mid I^2 = -1,\; D(xI,x) > 0 \;\; \forall 0 \neq x \in V\}$$

とおく。$I \in \mathfrak{H}_V$ を取ると、実ベクトル空間 V は $\sqrt{-1}x = xI$ とおくことにより複素ベクトル空間となる。こうして出来た複素ベクトル空間を V_I と書く事にする。V_I 上の Hermitian form H_I を

$$H_I(x,y) = D(xI,y) + \sqrt{-1}D(x,y) \quad (x,y \in V_I)$$

により定義すると、H_I は Λ に関する Riemann form となる。よって type $[e_1 : \cdots : e_g]$ の偏極アーベル多様体 $X_I = (V_I/\Lambda, [H_I])$ が定まる。

$Sp(V)$ は $\mathfrak{H}_V$ に $(\sigma, I) \mapsto \sigma I \sigma^{-1}$ により推移的に作用する。$\forall I \in \mathfrak{H}_V$ に対して

$$\begin{aligned} K_I &= \{\sigma \in Sp(V) \mid \sigma I \sigma^{-1} = I\} \\ &= \{\sigma \in GL_{\mathbb{C}}(V_I) \mid H_I(x\sigma, y\sigma) = H_I(x, y) \ \ \forall x, y \in V_I\} \end{aligned}$$

は $Sp(V)$ の極大 compact 部分群で複素 unitary 群 $U(V_I, H_I)$ に等しい。

そこで、type $[e_1 : \cdots : e_g]$ の偏極アーベル多様体の同型類全体の集合を $\mathcal{A}(e_1 : \cdots : e_g)$ と書く事にすると、

$$Sp(\Lambda)\backslash \mathfrak{H}_V \ni I \pmod{Sp(\Lambda)} \mapsto [V_I/\Lambda, [H_I]] \in \mathcal{A}(e_1 : \cdots : e_g)$$

は全単射であることが分かる。

3.2.2 Harish-Chandra 分解

Harish-Chandra 分解（又は、Harish-Chandra の埋めこみ）は一般の Hermite 型簡約 Lie 群に対して考えることが出来る。ここでは一例として実斜交群 $Sp(V)$ に対して具体的な計算も含めて考えることにする。一般論は [14] を参照して下さい。

以下、$I_0 \in \mathfrak{H}_V$ を固定し、$K = K_{I_0}$ とおく。

$$W^{\pm} = \{x \in V_{\mathbb{C}} \mid xI_0 = \pm\sqrt{-1}x)$$

とおくと、$V_{\mathbb{C}} = W^- \oplus W^+$ かつ $D(W^-, W^-) = D(W^+, W^+) = 0$ である。

$$\langle , \rangle : W^- \times W^+ \to \mathbb{C}; \quad \langle x, y \rangle = D(x, y)$$

は W^- と W^+ の間の non-degenerate pairing である。

$$\mathrm{Sym}_{\mathbb{C}}(W^-, W^+) = \{b \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W^-, W^+) \mid \langle x, yb \rangle = \langle y, xb \rangle \ \ \forall x, y \in W^-\}$$

とおく。また、$d \in GL_{\mathbb{C}}(W^+)$ に対して

$${}^t d \in GL_{\mathbb{C}}(W^-) \ \text{s.t.} \ \langle x\,{}^t d, y \rangle = \langle x, yd \rangle \ \ \forall x, y \in W^+$$

とする。直和分解 $V_{\mathbb{C}} = W^- \oplus W^+$ に応じて$\sigma \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}})$ を$\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおく。即ち、$(x, y) \in V_{\mathbb{C}} = W^- \oplus W^+$ に対して

$$(x, y)\sigma = (xa + yc, xb + yd) \quad \begin{array}{ll} a \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W^-), & b \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W^-, W^+) \\ c \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W^+, W^-) & d \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W^+) \end{array}$$

とおく。

$$\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(Sp(V)) = \{X \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{R}}(V) \mid D(xX, y) + D(x, yX) = 0 \ \ \forall x, y \in V\}$$

を実 Lie 群 $Sp(V)$ の Lie 環とする。$\theta X = I_0 X I_0^{-1}$ は $\mathfrak{g}$ の Cartan involution で

$$\mathfrak{k} = \mathrm{Lie}(K) = \{X \in \mathfrak{g} \mid \theta X = X\}$$

である。

$$\mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \theta X = -X\}$$

とおくと $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ は、いわゆる $\mathfrak{g}$ の Cartan 分解である。

$H_0 = \frac{1}{2} I_0$ は $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ の中心の元で、$(\mathrm{ad}(H_0)|_{\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}})^2 = -1$ である。そこで

$$\mathfrak{p}^{\pm} = \{X \in \mathfrak{p}_{\mathbb{C}} \mid \mathrm{ad}(H_0)X = \pm\sqrt{-1}X\}$$

とおくと、$\mathfrak{p}^{\pm}$ は $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の abelian subalgebra で $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{p}^{+} \oplus \mathfrak{p}^{-}$ となる。$P^{\pm} = \exp \mathfrak{p}^{\pm}$ は $Sp(V_{\mathbb{C}})$ の abelian subgroup で $X \mapsto \exp X$ は複素 Lie 群の同型 $\mathfrak{p}^{\pm} \xrightarrow{\sim} P^{\pm}$ を与える。

compact 群 K の複素化として

$$K_{\mathbb{C}} = \left\{ \begin{pmatrix} {}^t d^{-1} & o \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid d \in GL_{\mathbb{C}}(W^{+}) \right\}$$

とおくと $K = K_{\mathbb{C}} \cap Sp(V)$ である。さて

$$P^{+} \cdot K_{\mathbb{C}} \cdot P^{-} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Sp(V_{\mathbb{C}}) \mid \det d \neq 0 \right\}$$

は $Sp(V_{\mathbb{C}})$ の開部分集合で $(p, k, q) \mapsto pkq$ は $P^{+} \times K_{\mathbb{C}} \times P^{-}$ から $P^{+} \cdot K_{\mathbb{C}} \cdot P^{-}$ への全単写を与える。更に

$$Sp(V)K_{\mathbb{C}}P^{-} \subset P^{+} \cdot K_{\mathbb{C}} \cdot P^{-}, \quad K = Sp(V) \cap K_{\mathbb{C}} \cdot P^{-}$$

である。ここで $\sigma K \mapsto \sigma I_0 \sigma^{-1}$ は全単写 $Sp(V)/K \xrightarrow{\sim} \mathfrak{H}_V$ を与えるから、次の全単写と包含写像を通して、$\mathfrak{H}_V$ を $\mathfrak{p}^{+}$ の部分集合と同一視する事が出来る；

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}_V \xrightarrow{\sim} Sp(V)/K &\xrightarrow{\sim} Sp(V)K_{\mathbb{C}}P^{-}/K_{\mathbb{C}}P^{-} \\ &\subset P^{+}K_{\mathbb{C}}P^{-}/K_{\mathbb{C}}P^{-} \xrightarrow{\sim} P^{+} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{p}^{+} \end{aligned}$$

即ち、$I \in \mathfrak{H}_V$ に対して

$$I = \sigma I_0 \sigma^{-1}, \quad \sigma = \exp X \cdot k \cdot q \in Sp(V) \ \text{ for } X \in \mathfrak{p}^{+}, \ k \in K_{\mathbb{C}}, \ q \in P^{-}$$

のとき $I = X \in \mathfrak{p}^{+}$ と同一視するのである。このとき、次元を比較して $\mathfrak{H}_V$ は $\mathfrak{p}^{+}$ の開部分集合であることが分かり、よって $\mathfrak{H}_V$ は複素構造を持つ事が分かる。

$\sigma \in Sp(V)$ と $z \in \mathfrak{H}_V \hookrightarrow \mathfrak{p}^{+}$ に対して $\exp z \in Sp(V)K_{\mathbb{C}}P^{-}$ だから

$$\sigma \exp z = \exp \sigma(z) \cdot J(\sigma, z) \cdot q, \quad \sigma(z) \in \mathfrak{H}_V \hookrightarrow \mathfrak{p}^{+}, \ J(\sigma, z) \in K_{\mathbb{C}}, \ q \in P^{-}$$

と書ける。ここで $\sigma I \sigma^{-1} = \sigma(z) \in \mathfrak{H}_V$ と対応する事が分かる。$\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすると

$$\sigma(z) = (az + b)(cz + d)^{-1}, \quad J(\sigma, z) = \begin{pmatrix} {}^t(cz + d)^{-1} & 0 \\ 0 & cz + d \end{pmatrix}$$

となることが直接計算して分かる。

W^+ 上の正定値 Hermitian form $\langle,\rangle_{I_0}$ を $\langle v,w\rangle_{I_0}=2\sqrt{-1}D(v,\overline{w})$ により定義して、

$$\begin{aligned}\mathrm{Her}(W^+) &= \{T\in\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W^+)\mid\langle vT,w\rangle_{I_0}=\langle v,wT\rangle_{I_0}\ \ \forall v,w\in W^+\}\\ \mathrm{Her}^+(W^+) &= \{T\in\mathrm{Her}(W^+)\mid\langle vT,v\rangle_{I_0}>0\ \ 0\neq v\in W^+\}\end{aligned}$$

とおく。

$$\mathfrak{p}^+=\left\{\begin{pmatrix}0&b\\0&0\end{pmatrix}\mid b\in\mathrm{Sym}_{\mathbb{C}}(W^-,W^+)\right\}$$

だから $\begin{pmatrix}0&b\\0&0\end{pmatrix}=b$ と同一視して $\mathfrak{p}^+=\mathrm{Sym}_{\mathbb{C}}(W^-,W^+)$ とおくと、$\mathfrak{H}_V\hookrightarrow\mathfrak{p}^+$ は

$$\mathfrak{H}_V=\{z\in\mathrm{Sym}_{\mathbb{C}}(W^-,W^+)\mid 1-\overline{z}z\in\mathrm{Her}^+(W^+)\}$$

となる。

$I\in\mathfrak{H}_V$ に対して $I=z\in\mathfrak{H}_V\hookrightarrow\mathfrak{p}^+$ とする。$x=(v,w)\in V\subset V_{\mathbb{C}}=W^-\oplus W^+$ に対して $x\begin{pmatrix}z\\1\end{pmatrix}=vz+w$ とおくと、$x\mapsto x\begin{pmatrix}z\\1\end{pmatrix}$ は複素線形同型 $V_I\xrightarrow{\sim}W^+$ を与える。よって Λ の像として W^+ の $\mathbb{Z}$-格子

$$\Lambda_z=\left\{x\begin{pmatrix}z\\1\end{pmatrix}\in W^+\mid x\in\Lambda\right\}$$

が定まる。W^+ 上の正定値 Hermitian form H_z を

$$H_z(v,w)=2\sqrt{-1}D(v(1-\overline{z}z)^{-1},\overline{w})\quad(v,w\in W^+)$$

により定義すると、$v=x\begin{pmatrix}z\\1\end{pmatrix},w=y\begin{pmatrix}z\\1\end{pmatrix}$ $(x,y\in V_I)$ に対して $H_z(v,w)=H_I(x,y)$ である。特に H_z は Λ_z に関する Riemann form となる。まとめると、偏極アーベル多様体 $X_I=(V_I/\Lambda,[H_I])$ と同型な偏極アーベル多様体 $X_z=(W^+/\Lambda_z,[H_z])$ が構成されたことになる。

3.2.3 Cayley 変換

以下、$I_0\in\mathfrak{H}_V$ を固定し、前節の記号を用いる。更に、

$$V=W\oplus W',\quad D(W,W)=D(W',W')=0$$

なる V の部分空間 W,W' を取り、直和分解 $V_{\mathbb{C}}=W_{\mathbb{C}}\oplus W'_{\mathbb{C}}$ による$\sigma\in\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}})$ のブロック分けを$\sigma=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ とする。W と W' の間の pairing $\langle,\rangle$ を $\langle x,y\rangle=D(x,y)$ により定義する。$\mathrm{Sym}_{\mathbb{C}}(W^-,W^+)$ と同様に

$$\begin{aligned}\mathrm{Sym}_{\mathbb{R}}(W,W') &= \{b\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W,W')\mid\langle x,yb\rangle=\langle y,xb\rangle\ \ \forall x,y\in W\}\\ \mathrm{Sym}^+_{\mathbb{R}}(W,W') &= \{b\in\mathrm{Sym}_{\mathbb{R}}(W,W')\mid\langle x,xb\rangle>0\ \ 0\neq\forall x\in W\}\end{aligned}$$

とおく。

$W^-\rho = W_{\mathbb{C}},\ W^+\rho = W'_{\mathbb{C}}$ なる $\rho \in Sp(V_{\mathbb{C}})$ を一つ固定しておく（このような ρ は必ず存在する)。

$$\widehat{P}^+ = \rho^{-1}P^+\rho,\ \ \widehat{P}^- = \rho^{-1}P^-\rho,\ \ \widehat{K_{\mathbb{C}}} = \rho^{-1}K_{\mathbb{C}}\rho,\ \ \check{K}_{\mathbb{C}} = \overline{\rho}^{-1}K_{\mathbb{C}}\rho$$

とおくと、$\widehat{P}^+ \cdot \widehat{K_{\mathbb{C}}} \cdot \widehat{P}^-$ は $Sp(V_{\mathbb{C}})$ の開部分集合で、$(p,k,q) \mapsto pkq$ は$\widehat{P}^+ \times \widehat{K_{\mathbb{C}}} \times \widehat{P}^-$ から$\widehat{P}^+ \cdot \widehat{K_{\mathbb{C}}} \cdot \widehat{P}^-$ への全単写を与える。

$$\widehat{\mathfrak{p}}^+ = \mathrm{Lie}(\widehat{P}^+) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}) \mid b \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{C}}(W_{\mathbb{C}}, W'_{\mathbb{C}}) \right\}$$

だから $\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = b$ により$\widehat{\mathfrak{p}}^+ = \mathrm{Sym}_{\mathbb{C}}(W_{\mathbb{C}}, W'_{\mathbb{C}})$ と同一視する。

さて、$\rho Sp(V_{\mathbb{C}})K_{\mathbb{C}}P^- \subset P^+K_{\mathbb{C}}P^-$ となるので、$z \in \mathfrak{H}_V \hookrightarrow \mathfrak{p}^+$ に対して

$$\rho \exp z = \exp \rho(z) \cdot J(\rho, z) \cdot q,\quad \rho(z) \in \mathfrak{p}^+,\ \ J(\rho,z) \in K_{\mathbb{C}},\ \ q \in P^-$$

として、

$$\exp z \cdot \rho = \exp \widehat{z} \cdot \widehat{J}(\rho, z) \cdot \widehat{q},$$

$$\widehat{z} = \mathrm{Ad}(\rho^{-1})\rho(z) \in \widehat{\mathfrak{p}}^+,\ \ \widehat{J}(\rho,z) = \rho^{-1}J(\rho,z)\rho \in \widehat{K_{\mathbb{C}}},\ \ \widehat{q} = \rho^{-1}q\rho \in \widehat{P}^-$$

とおく。変換 $z \mapsto \widehat{z}$ を ρ による Cayley 変換と呼ぶ。

$$\widehat{\mathfrak{H}}_V = \{\widehat{z} \mid z \in \mathfrak{H}_V\} \subset \widehat{\mathfrak{p}}^+ = \mathrm{Sym}_{\mathbb{C}}(W_{\mathbb{C}}, W'_{\mathbb{C}})$$

とおく。

$\sigma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in Sp(V)$ と $z \in \mathfrak{H}_V \hookrightarrow \mathrm{Sym}_{\mathbb{C}}(W^-, W^+)$ に対して$\sigma(\widehat{z}) = \widehat{\sigma z} \in \widehat{\mathfrak{H}}_V$ とおく。

$$\sigma \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sigma z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot J(\sigma, z) \cdot q \in P^+ \cdot K_{\mathbb{C}} \cdot P^-$$

より

$$\sigma \begin{bmatrix} 1 & \widehat{z} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \widehat{\sigma z} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} J(\sigma, \widehat{z})\widehat{q},\quad J(\sigma,\widehat{z}) \in \widehat{K_{\mathbb{C}}},\ \ \widehat{q} \in \widehat{P}^-$$

となり

$$\sigma(\widehat{z}) = (a\widehat{z}+b)(c\widehat{z}+d)^{-1},\quad J(\sigma,\widehat{z}) = \begin{bmatrix} {}^t(c\widehat{z}+d)^{-1} & 0 \\ 0 & c\widehat{z}+d \end{bmatrix}$$

となることが分かる。これを利用して

$$\widehat{\mathfrak{H}}_V = \{z \in \mathrm{Sym}(W_{\mathbb{C}}, W'_{\mathbb{C}}) \mid \mathrm{Im}\, z = (z - \overline{z})/(2\sqrt{-1}) \in \mathrm{Sym}^+_{\mathbb{R}}(W, W')\}$$

を得る。

$z \in \mathfrak{H}_V \hookrightarrow \mathrm{Sym}_{\mathbb{C}}(W^-, W^+)$ を取り$\widehat{z} \in \widehat{\mathfrak{H}}_V \hookrightarrow \mathrm{Sym}_{\mathbb{C}}(W_{\mathbb{C}}, W'_{\mathbb{C}})$ とおく。$w \mapsto \widehat{w} = wJ(\rho,z)^{-1}\rho$ は複素線形同型 $W^+ \xrightarrow{\sim} W'_{\mathbb{C}}$ を与える。$W'_{\mathbb{C}}$ 上の正定値 Hermitian form $H_{\widehat{z}}$

を $H_{\widehat{z}}(v,w)=\langle v(\operatorname{Im} z)^{-1},\overline{w}\rangle$ により定義すると、$H_{\widehat{z}}(\widehat{v},\widehat{w})=H_z(v,w)$ となる。$\begin{bmatrix} \widehat{z} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} J(\rho,z)^{-1}\rho$ となるから、Λ_z に対応する $W'_{\mathbb{C}}$ の $\mathbb{Z}$-格子は

$$\Lambda_{\widehat{z}}=\left\{x\begin{bmatrix} \widehat{z} \\ 1 \end{bmatrix} \mid x\in\Lambda\right\}$$

であり、$H_{\widehat{z}}$ は $\Lambda_{\widehat{z}}$ に関する Riemann form となる。よって $X_z=(W^+/\Lambda_z,[H_z])$ と同型な、type $[e_1:\cdots:e_g]$ の偏極アーベル多様体 $X_{\widehat{z}}=(W'_{\mathbb{C}}/\Lambda_{\widehat{z}},[H_{\widehat{z}}])$ が得られた。

3.2.4 核関数

直接関係する話題ではないが、[22] で参考にするために述べておく。

$z,z'\in\mathfrak{H}_V\hookrightarrow\mathfrak{p}^+$ に対して、$\overline{\exp z}^{-1}\exp z'\in P^+K_{\mathbb{C}}P^-$ となるので

$$\overline{\exp z}^{-1}\exp z'=p\cdot K(z',z)^{-1}\cdot q \quad \text{for } p\in P^+,\ K(z',z)\in K_{\mathbb{C}},\ q\in P^-$$

とおくと、$\mathfrak{p}^+=\operatorname{Sym}(W^-,W^+)$ と同一視したとき

$$\begin{aligned} K(z',z) &= \begin{pmatrix} 1-z'\overline{z} & 0 \\ 0 & (1-\overline{z}z')^{-1} \end{pmatrix} \\ K(\sigma z',\sigma z) &= J(\sigma,z')K(z',z)\overline{J(\sigma,z)}^{-1} \quad \forall\sigma\in Sp(V) \end{aligned}$$

であることが容易に分かる。

$z,z'\in\widehat{\mathfrak{H}}_V\subset\widehat{\mathfrak{p}}^+$ に対して書けば、

$$\overline{\exp z}^{-1}\exp z'=p\cdot K(z',z)^{-1}\cdot q \quad \text{for } p\in\widehat{P}^+,\ K',z)\in\check{K}_{\mathbb{C}},\ q\in\widehat{P}^-$$

で、$\widehat{\mathfrak{p}}^+=\operatorname{Sym}_{\mathbb{C}}(W_{\mathbb{C}},W'_{\mathbb{C}})$ と同一視すれば

$$\begin{aligned} K(z',z) &= \begin{bmatrix} 0 & \overline{z}-z' \\ (z'-\overline{z})^{-1} & 0 \end{bmatrix} \\ K(\sigma z',\sigma z) &= J(\sigma,z')K(z',z)\overline{J(\sigma,z)}^{-1} \quad \forall\sigma\in Sp(V) \end{aligned}$$

となる。$K(z',z)$ は $Sp(V)$ の正則離散系列表現の再生核を記述する際に用いられる。同じことだが、同表現の minimal K-type に対応する球関数を記述するのにも用いられる。

3.3 Riemann の theta 級数

前節の記号を用いる。更に、W, W' の $\mathbb{Z}$-格子 L, L' により $\Lambda=L\oplus L'$ と仮定する。$z\in\widehat{\mathfrak{H}}_V\hookrightarrow\operatorname{Sym}_{\mathbb{C}}(W_{\mathbb{C}},W'_{\mathbb{C}})$ に対して

$$\Lambda_z=\{xz+y\in W'_{\mathbb{C}}\mid x\in L,y\in L'\}$$

である。$W'_{\mathbb{C}}$ 上の quasi-Hermitian form Q_z を $Q_z(x,y) = -2\sqrt{-1}\langle x(\mathrm{Im}\,z)^{-1}, \mathrm{Im}\,y\rangle$ により定義すると、Q_z の Hermitian part は $H_z(x,y) = \langle x(\mathrm{Im}\,z)^{-1}, \overline{y}\rangle$ であり、symmetric part は $S_z(x,y) = -\langle x(\mathrm{Im}\,z)^{-1}, y\rangle$ である。$a = (a', a'') \in V = W \oplus W'$ に対して

$$\alpha_a(\lambda' z + \lambda'') = \mathbf{e}(D(a,\lambda) + \frac{1}{2}\langle\lambda', \lambda''\rangle), \quad \text{for } \lambda = (\lambda', \lambda'') \in \Lambda = L \oplus L'$$

とおくと、$(H_z, \alpha_a) \in G(W'_{\mathbb{C}}/\Lambda_z)$ で、対応する $W'_{\mathbb{C}}/\Lambda_z$ 上の線束 $L(H_z, \alpha_a)$ の global section 全体 $\mathcal{L}(H_z, \alpha_a)$ は theta 関数の空間 $\mathcal{L}(Q_z, \alpha_a)$ と自然に複素線形同型である。

$\mathcal{L}(Q_z, \alpha_a)$ の基底が次のように構成される；$a = (a', a'') \in V = W \oplus W'$, $z \in \mathfrak{H}_V$, $w \in W'_{\mathbb{C}}$ に対して

$$\vartheta[a](z,w) = \sum_{\ell \in L} \mathbf{e}\left\{\frac{1}{2}\langle \ell + a', z(\ell + a')\rangle + \langle \ell + a', w + a''\rangle\right\}$$

とおく。これを Riemann の theta 級数と呼ぶ。$\vartheta[a]$ は$\mathfrak{H}_V \times W'_{\mathbb{C}}$ 上の正則関数である。

$$L^* = \{x \in W \mid \langle x, L'\rangle \subset \mathbb{Z}\}$$

とおくと、$L^*/L \simeq \bigoplus_{j=1}^{g} \mathbb{Z}/e_j\mathbb{Z}$ である。ここで次の定理が証明できる；

定理 3.3.0.1 $\{\vartheta[a + (r, 0)](z, *) \mid r \in L^*/L\}$ は $\mathcal{L}(Q_z, \alpha_a)$ の $\mathbb{C}$-基底である。

[22] で Riemann の theta 級数が Weil 表現の文脈でも自然にとらえられることを見るであろう。このように theta 級数に幾何学的と同時に表現論的な起源があることは、とても興味深いことである。

参考文献

[1] 阿部龍蔵, 量子力学入門 (物理テキストシリーズ、岩波書店、1987)

[2] デュドネ,J., 数学史 (1700-1900), (岩波書店, 1985)

[3] 土井公二、三宅敏恒, 保型形式と整数論 (紀伊国屋書店, 1976)

[4] Igusa,J.-I., Theta Functions, (Springer-Verlag, 1972)

[5] Katurada.H., *An explicit formula for the Fourier coefficients of Siegel- Eisenstein series*, pre-print (1996)

[6] Kirillov,A.A., Elements of the Theory of Representations, (Springer-Verlag, 1976)

[7] Kitaoka,Y., Arithmetic of quadratic forms, (Cambridge Univ.Press, 1993)

[8] Koblitz,N., Introduction to elliptic curves and modular forms, GTM 97, (Springer-Verlag, 1984)

[9] 小泉正二, テータ関数, (紀伊国屋書店)

[10] Mumford,D., Abelian Varieties, (Oxford Univ.Press, 1970)

[11] Mumford,D., Tata Lectures on Theta I,II,III, (Progress in Math.28 (1983), 43 (1984), 97 (1991), Birkhäuser)

[12] Murty,V.K., Introduction to Abelian Varieties, (CRM Monograph Ser.3, A.M.S. 1991)

[13] Pukanszky,L., Leçons sur les représentations des groupes, (Dunod,Paris, 1967)

[14] Satake,I., Algebraic structures of symmetric doamins, (Iwanami Shoten, Princeton Univ.Press, 1980)

[15] Selberg,A., *Hermonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series*, J.Indian Math.Soc. 20 (1956), 47-87

[16] Serre,J.-P., Cours d'arithmétique, Presses Univ.de France (1970)

[17] 清水英男, "保型関数" (岩波講座基礎数学)

[18] Siegel,C.L., *Über die analytische Theorie der quadratischen Formen* I,II,III, Ann.Math. 36 (1935) 527-606, Ann.Math. 37 (1936) 230-263, Ann.Math. 38 (1837) 212-291

[19] Siegel,C.L., *On the theory of indefinite quadratic forms*, Ann.Math. 45 (1944) 577-622

[20] Siegel,C.L., *Indefinite quadratische Formen und Funktionentheorie* I,II, Math.Ann. 124 (1951) 17-54, Math.Ann. 124 (1952) 364-387

[21] 高木貞治, 初等整数論講義, (共立出版、1971)

[22] 高瀬幸一, Weil 表現と古典的 Theta 級数, (in this volume)

[23] 朝永振一郎, 量子力学 I,(みすず書房、1969)

[24] Weil,A., *Sur certains groupes d'opërateurs unitaires*, Acta Math. 111 (1964) 143-211

[25] Weil,A., *Sur la formule de Siegel dans la théorie des groupes classique*, Acta Math. 113 (1965) 1-87