Introduction～Galois 群の作用を目で見る～

上智理工 (Sophia Univ.)　角皆 宏 (TSUNOGAI Hiroshi)

0. 前口上

「基本群」に最初に出会うのは多くの場合 Poincaré が 19 世紀末に論文 “Analysis situs”[Po] で導入した「道の homotopy 類の成す群」としてであろう。(論文題目はそのまま訳せば「位置解析」で、現行の用語でいう位相幾何の創始となった論文である。) 本稿では、その素朴な観点と Galois 群やその表現とが如何に結び付くか、

「基本群は Galois 群なり」
(「Galois 群は基本群なり」と言っても同じだが)

という標語に至るまでを専ら大雑把に紹介して、本サマースクール全体の前置きとしたい。

道を用いた基本群の定義には線分 $[0,1]$ の位相を用いているので、実 (又は複素) の多様体に対しては有効であるが、一般の係数体 (特に代数体・有限体・p 進体など我々がその上で数論を考えたい体) 上の代数多様体には馴染み辛い。そのような場合にも有効に機能させるための基本的な考えは、基本群を被覆変換群として捉えることである。

1. 道類群としての基本群

道の homotopy 類の成す群としての基本群を思い出しておこう。

定義. 位相空間 X 内の**道**とは連続写像 $\gamma : I = [0,1] \to X$ のことで、$\gamma(0)$ を**始点**、$\gamma(1)$ を**終点**という。点 $b \in X$ を**基点**とする **loop** とは、X 内の道 γ で始点・終点とも b、即ち連続写像 $\gamma : I = [0,1] \to X$ で $\gamma(0) = \gamma(1) = b$ であるもののこと。2 つの道 γ と γ' とが **homotopic** であるとは、X 内で始点・終点を固定したまま連続変形して移り合えること、即ち、連続写像 $\varphi : I^2 \to X$ で、$\varphi|_{\{0\}\times I} = \gamma, \varphi|_{\{1\}\times I} = \gamma', \varphi(I \times \{0\}) = \{\gamma(0)\}, \varphi(I \times \{1\}) = \{\gamma(1)\}$ となるものが存在すること。

$$\pi_1(X, b) := \{b \text{ を基点とする loop}\}/(\text{homotopic})$$

を b を基点とする X の**基本群**と呼ぶ。

2004 年整数論サマースクール「基本群と Galois 表現」報告集原稿.

さて「道類群」として導入されたこの基本群を、Galois 群やその表現と結び付けてるには、「普遍被覆の被覆変換群」という視点から捉え直すのが有効である。その為の重要な性質として「被覆ホモトピー性」と呼ばれる性質を挙げておこう。まず位相空間の被覆を定義する。以下では、位相空間は専ら連結・局所連結・弧状連結・Hausdorff とする。

定義．位相空間 X に対し、全射連続写像 $f : Y \to X$ が**被覆**であるとは、"局所同相" であること、即ち、X の各点 $P \in X$ に対し近傍 U_P が存在して、$f^{-1}(U_P)$ の各連結成分が f によって U_P に同相に写されること。

命題．(被覆ホモトピー性) 被覆 $f : Y \to X$ と道 $\gamma : I \to X$ とについて、始点 $x_0 = \gamma(0) \in X$ の任意の持上げ $y_0 \in f^{-1}(\{x_0\})$ に対し、y_0 を始点とする γ の持上げ $\widetilde{\gamma} : I \to Y$ (即ち Y 内の道で $\widetilde{\gamma}(0) = y_0, f \circ \widetilde{\gamma} = \gamma$ となるもの) が一意に存在する。しかも、$\gamma \sim \gamma' \Rightarrow \widetilde{\gamma} \sim \widetilde{\gamma'}$ で、特に終点 $\widetilde{\gamma}(1) \in f^{-1}(\{\gamma(1)\})$ は、γ の homotopy 類のみに依る。

$\varphi : Z \to X$ を連結位相空間 Z からの連続写像とし、1 点 $z \in Z$ に対して $x := \varphi(z)$ とする。被覆 $f : Y \to X$ と x の持上げ $y \in f^{-1}(\{x\})$ とに対し、φ の Y への持上げ $\widetilde{\varphi} : Z \to Y$ (即ち $f \circ \widetilde{\varphi} = \varphi$) で、$\widetilde{\varphi}(z) = y$ となるものは高々1 つ、従って (存在すれば)1 点の像のみで決まる。

さて、被覆の中で普遍性を持つものを考えよう。こういうことをする時は「基点付空間とその被覆」と考えた方が便利である。即ち、基点付空間の間の被覆 $f : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ とは、被覆 $f : Y \to X$ で $f(y_0) = x_0$ なるもの。上のことは次のように簡潔に述べられる。

『$\varphi : (Z, z_0) \to (X, x_0)$ を連結位相空間 Z からの基点付の連続写像とする。被覆 $f : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ に対し、φ の Y への持上げ $\widetilde{\varphi} : (Z, z_0) \to (Y, y_0)$ (即ち $f \circ \widetilde{\varphi} = \varphi$ で $\widetilde{\varphi}(z_0) = y_0$ となるもの) は高々1 つ、つまり存在すれば一意に決まる。』

位相空間 X の被覆 $\varphi : (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to (X, x_0)$ は、$\widetilde{X}$ が連結かつ単連結であると次の普遍性を持つ: 被覆 $f : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ に対し、φ の Y への持上げ $\varphi_f : (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to (Y, y_0)$ が一意に存在する。この時、$\widetilde{X}$ を X の**普遍被覆**という。

位相空間 X の普遍被覆 $f : \widetilde{X} \to X$ に対し、自己同相写像 $\varphi : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ が $f \circ \varphi = \varphi$ を満たす時、φ は f の**被覆変換**であると言い、その全体 $\mathrm{Aut}(\widetilde{X}/X)$ は合成により群を成す。基点 $b \in X$ の逆像 (ファイバ) $f^{-1}(\{b\})$ 内に 1 点 $\widetilde{b}$ を取っておくと、$b \in X$ を基点とする loop γ は以下のように被覆変換を定める:

『被覆ホモトピー性により、γ は $\widetilde{X}$ 内の $\widetilde{b}$ を始点とする道に $\widetilde{\gamma}$ に一意に持ち上がり、その終点 $\widetilde{\gamma}(1)$ は $f^{-1}(\{b\})$ に属する。さて、$\widetilde{X}$ 内の任意の点 $P \in \widetilde{X}$ に対し、その行き先を定めよう。$\widetilde{b}$ から P に至る $\widetilde{X}$ 内の道を 1 つ取って δ とする ($\widetilde{X}$ が単連結なので modulo homotopy で一意)。P から δ で $\widetilde{b}$ に戻り、$\widetilde{\gamma}$ で $\widetilde{\gamma}(1)$ に行き、その点

を始点とする $f(\delta)$ の持ち上げを辿った終点を P' とする。このとき $P \mapsto P'$ により被覆変換 $\widetilde{X} \to \widetilde{X}$ が定まる。』

注．この時定まる $\pi_1(X,b) \to \mathrm{Aut}(\widetilde{X}/X)$ が

- 群の逆同型である
- 基点の持ち上げ $\widetilde{b} \in f^{-1}(\{b\})$ の取り方に依る

ということには、注意を払う必要が間々ある。更に次の注へ。

注．より誤解なく述べる為には、ファイバ $f^{-1}(\{b\})$ への $\pi_1(X,b)$ の作用に着目すべきである[1]。基点 $b \in X$ の逆像 (ファイバ) 内の点 $\widetilde{b} \in f^{-1}(\{b\})$ に対し、$\widetilde{b}$ を始点とする γ の $\widetilde{X}$ への持ち上げ $\widetilde{\gamma}$ の終点 $\gamma(\widetilde{b}) := \widetilde{\gamma}(1)$ を対応させることにより、$\pi_1(X,b)$ が基点 $b \in X$ のファイバ $f^{-1}(\{b\})$ に作用する。ここで注意すべき点は、この時定まる群準同型 $\pi_1(X,b) \to \mathrm{Aut}(f^{-1}(\{b\}))$ が (基点の持ち上げ $\widetilde{b} \in f^{-1}(\{b\})$ の取り方になどに依らずに) canonical に定まるということである。この「被覆に対してそのファイバが定まって基本群が作用する」というのを基点の働き及び基本群の性質の重要なものと捉えて、より一般的な状況で基本群の定式化がなされている (玉川氏の稿参照)。

被覆 $f: Y \to X$ に於いて、$y_0 \in Y$ に対し $x_0 := f(y_0)$ とすれば、道の像を取ることにより自然に基本群の間の射 $f^*: \pi_1(Y,y_0) \to \pi_1(X,x_0); [\gamma] \mapsto [f \circ \gamma]$ が定まる。基点付空間としての被覆 $f: (Y,y_0) \to (X,x_0)$ に対し、普遍性により誘導される射 $(\widetilde{X},\widetilde{x}_0) \to (Y,y_0)$ により、$\widetilde{X}$ は Y の普遍被覆でもある。

被覆変換群 $\mathrm{Aut}(\widetilde{X}/X)$ は $\widetilde{X}$ 上の関数に引戻しにより作用する。Y 上の関数は $\widetilde{X}$ 上の関数とも見做せるが、それは丁度 $\mathrm{Aut}(\widetilde{X}/X)$ の部分群 $\mathrm{Aut}(\widetilde{X}/Y)$ で不変な関数であり、ここに Galois 対応が見られる。

2. Riemann 面の基本群と有理型関数体の Galois 群

有理数体 $\boldsymbol{Q}$ 上定義された非特異な既約代数曲線 $X = X_{\boldsymbol{Q}}$ を考えよう。埋め込み $\boldsymbol{Q} \subset \overline{\boldsymbol{Q}} \subset \boldsymbol{C}$ により、X を $\overline{\boldsymbol{Q}}$ 上 (及び $\boldsymbol{C}$ 上) の代数曲線とも見ることが出来る。必要ならこの時 $X_{\overline{\boldsymbol{Q}}}$ (及び $X_{\boldsymbol{C}}$) と書いて区別しよう。$\boldsymbol{C}$ 有理点の全体 $X(\boldsymbol{C})$ は 1 次元連結複素多様体 (Riemann 面) の構造を持つ。更には単に位相的な多様体でもある。$X(\boldsymbol{C})$ を複素多様体と見る時は X^{an}、位相的多様体と見る時は X^{top} とも書くことにしよう。X^{top} が種数 g の有向閉曲面から n 点を除いた曲面である時、X^{top} の基本群は次の表示を持つ (村上氏の稿参照):

$$\pi_1(X^{\mathrm{top}}, \cdot) \simeq \left\langle \begin{matrix} a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g \\ c_1, \dots, c_n \end{matrix} \,\middle|\, [a_1,b_1]\cdots[a_g,b_g]c_1\cdots c_n = 1 \right\rangle.$$

[1]講演後の松本氏の御助言による。どうも有難うございます。

(弧状連結ならば基本群の同型類は基点に依らない。以下、基点の違いを気にしない時は単に "$\cdot$" としておく。)

さて、位相空間に対して基本群を考えたように、この $X = X_{\boldsymbol{Q}}$ に対してもその基本群を考えたいのだが、$\boldsymbol{Q}$ 上定義されているというようなことは、前述のように道類群として考えてもうまく反映できない。しかし、代数多様体に対しても被覆の概念は定式化できるので、被覆変換群として (代数多様体としての) 基本群を導入しよう。

代数的な射 $f : Y \to X$ について、f が定める位相的な写像 $f^{\mathrm{top}} : Y^{\mathrm{top}} \to X^{\mathrm{top}}$ が位相空間としての被覆写像であるときに、f が被覆写像であると、暫定的に考えることにしよう。このような写像 $Y^{\mathrm{top}} \to X^{\mathrm{top}}$ を統制するのが、X^{top} の位相的な基本群 $G := \pi_1(X^{\mathrm{top}}, \cdot)$ であった。(以下では位相的基本群であることに注意する時、必要なら $\pi_1^{\mathrm{top}}(X^{\mathrm{top}}, \cdot)$ と書いて区別しよう。) 即ち、写像 $Y^{\mathrm{top}} \to X^{\mathrm{top}}$ の (位相的被覆写像としての) 同型類は、$G = \pi_1^{\mathrm{top}}(X^{\mathrm{top}}, \cdot)$ の部分群 H の共役類と対応し、位相的な普遍被覆を $\widetilde{X}$ とすれば、Y^{top} は $Y^{\mathrm{top}} \simeq \widetilde{X}/H$ として復元されるのであった。特に $X^{\mathrm{top}} \simeq \widetilde{X}/G$ である。では逆に、G の部分群 H (の共役類) を与えた時、対応するような代数的な射 $f : Y \to X$ が存在するだろうか。

G の部分群 H (の共役類) に対応する位相的な被覆は自然な射影

$$f_H^{\mathrm{top}} : Y_H^{\mathrm{top}} := \widetilde{X}/H \to \widetilde{X}/G = X^{\mathrm{top}}$$

で与えられる。今作った Y_H^{top} は只の位相的多様体であるが、f_H^{top} が局所同相であり、$X(\boldsymbol{C}) = X^{\mathrm{top}}$ が元々複素構造を持っているので、この $X(\boldsymbol{C}) = X^{\mathrm{an}}$ の複素構造を f_H^{top} で Y_H^{top} に引き戻すことが出来る。こうして出来た複素多様体 (Riemann 面) を Y_H^{an} と書くと、作り方から f_H^{top} は複素解析的な射になり (これを f_H^{an} と書こう)、複素解析的な被覆 $f_H^{\mathrm{an}} : Y_H^{\mathrm{an}} \to X^{\mathrm{an}}$ が出来る。ここまでは良い。

問題は、この $f_H^{\mathrm{an}} : Y_H^{\mathrm{an}} \to X^{\mathrm{an}}$ が、$\boldsymbol{C}$ 上定義される代数的な射 $f_{\boldsymbol{C}} : Y_{\boldsymbol{C}} \to X_{\boldsymbol{C}}$ からは一般には来ない点にある。実際、$H = \{1\}$ の時は Y_H^{an} は普遍被覆そのものであるが、これは自明な場合を除き代数的でない。

しかし、有限次の被覆ならば (即ち、有限指数 $[G : H] < \infty$ ならば)、代数的となる。即ち、$\boldsymbol{C}$ 上定義される代数的な射 $f = f_{\boldsymbol{C}} : Y_{\boldsymbol{C}} \to X_{\boldsymbol{C}}$ で、$f^{\mathrm{an}} : Y^{\mathrm{an}} \to X^{\mathrm{an}}$ が f_H^{an} と同型になるものが存在する。特に、H が正規部分群であれば f も Galois な射で、f の被覆変換群 $\mathrm{Aut}(Y/X)$ が G/H と同型になる。従って、代数的被覆 $f_{\boldsymbol{C}} : Y_{\boldsymbol{C}} \to X_{\boldsymbol{C}}$ の同型類は、$G = \pi_1^{\mathrm{top}}(X^{\mathrm{top}}, \cdot)$ の有限指数の部分群の共役類と対応するという形で、やはり G によって統制されると言える。

但し一般には、単独で普遍被覆となる代数的被覆はないので、G が (普遍被覆となるべき) 或る一つの代数的被覆の被覆変換群という形にはなっていない。そこで、全ての代数的被覆から成る系を考えることになり、有限被覆の被覆変換群の射影極限として基本群が定義される。(前節での考察を顧みれば、その反対群としておくか、変換

群の作用を右作用としておくべきであるが。) 極限を正しく取るには基点を適切に顧慮する必要があるので、代数的被覆も始めから基点付きで考えておくのが良い。

$\boldsymbol{C}$ 上の代数的被覆 $f = f_{\boldsymbol{C}} : Y = Y_{\boldsymbol{C}} \to X = X_{\boldsymbol{C}}$ は、引戻しにより有理関数体の間の射 $\boldsymbol{C}(X) \hookrightarrow \boldsymbol{C}(Y)$ を定め、通常これにより $\boldsymbol{C}(X)$ を $\boldsymbol{C}(Y)$ の部分体と見る。被覆変換 $\varphi : Y \to Y$ は $\boldsymbol{C}(X)$ 上の $\boldsymbol{C}(Y)$ の自己同型 $\varphi_* : \boldsymbol{C}(Y) \to \boldsymbol{C}(Y)$ を定める。特に f が Galois な被覆で、G の正規部分群 N に対応しているとすれば、$G/N \simeq \mathrm{Aut}(Y/X) \simeq \mathrm{Gal}(\boldsymbol{C}(Y)/\boldsymbol{C}(X))$ である。このように、代数多様体の有限被覆の被覆変換群は対応する関数体の拡大の Galois 群に他ならないから、$\boldsymbol{C}(Y)$ の元を $X(\boldsymbol{C})$ 上の (多価) 代数関数と見れば、「基本群は Galois 群なり」ということになる。Galois 群の作用は道に沿った解析接続で別の枝に移ることとして与えられる。

「Galois 群の作用が目に見えている」

と言えまいか。

さて、基点付き被覆達から成る系を考える。基点付きの 2 つの代数的 Galois 被覆 $f_i : (Y_i, y_i) \to (X, x_0)$ $(i = 1, 2)$ に対し、$(Y_2, y_2) \to (Y_1, y_1)$ なる基点付きの射は、存在すれば一意であり、$\mathrm{Aut}(Y_2/X) \to \mathrm{Aut}(Y_1/X)$ を引起こす。これより、全ての代数的 Galois 被覆から成る系は射影系を成し、その系の自己同型群 (それぞれの被覆の被覆変換の compatible な系の成す群) は上の自然な射に関して取った射影極限

$$\varprojlim_{Y/X:\ \text{Galois 被覆}} \mathrm{Aut}(Y/X)$$

で与えられる。これが $X_{\boldsymbol{C}}$ の**代数的基本群** $\pi_1(X_{\overline{\boldsymbol{Q}}}, \cdot)$ である。関数体の言葉で言えば、上の自然な射により定まる包含射 $\boldsymbol{C}(Y_1) \hookrightarrow \boldsymbol{C}(Y_2)$ に関して取った関数体の入射極限

$$M_{\boldsymbol{C}} := \varinjlim_{Y/X:\ \text{Galois 被覆}} \boldsymbol{C}(Y)$$

に対して、各 $\boldsymbol{C}(Y)$ をこの部分体と見れば、$M_{\boldsymbol{C}}$ は全ての $\boldsymbol{C}(Y)$ の合併体であって、$\boldsymbol{C}(X)$ の最大不分岐拡大体である。被覆変換群の射影極限は、この (一般には無限次) 拡大の Galois 群 $\mathrm{Gal}(M_{\boldsymbol{C}}/\boldsymbol{C}(X))$ であり、ここに入れる Krull 位相は射影極限としての位相に他ならない。一般に、群 G に対して、全ての有限商群の射影的極限

$$\widehat{G} := \varprojlim_{N \lhd G, [G:N] < \infty} G/N$$

を G の**副有限完備化 (profinite completion)** と呼ぶ。この時、位相群として、

$$\pi_1^{\mathrm{top}}(X^{\mathrm{top}}, \cdot)^{\wedge} \simeq \pi_1(X_{\overline{\boldsymbol{Q}}}, \cdot) = \mathrm{Gal}(M_{\boldsymbol{C}}/\boldsymbol{C}(X))$$

である。

3. $\boldsymbol{C}$ 上から $\overline{\boldsymbol{Q}}, \boldsymbol{Q}$ 上への降下

さて、こうして $\boldsymbol{C}$ 上の代数的被覆 $f_{\boldsymbol{C}} : Y_{\boldsymbol{C}} \to X_{\boldsymbol{C}}$ が得られたが、元々 X は $\boldsymbol{Q}$ 上定義されていたから、更に遡って、これが $\boldsymbol{Q}$ 上定義された被覆 $f_{\boldsymbol{Q}} : Y_{\boldsymbol{Q}} \to X_{\boldsymbol{Q}} = X$ から来るかということを考えたい。

初めに f が $\overline{\boldsymbol{Q}}$ 上定義されるかどうか、即ち、$\overline{\boldsymbol{Q}}$ 上定義された多様体 $Y_{\overline{\boldsymbol{Q}}}$ と射 $f_{\overline{\boldsymbol{Q}}} : Y_{\overline{\boldsymbol{Q}}} \to X_{\overline{\boldsymbol{Q}}}$ で $\boldsymbol{C}$ 上で考えると $f_{\boldsymbol{C}}$ となるものが存在するかどうか、を考えると、Weil による定義体の降下の議論により、これが肯定的なことが判る。(G が有限生成であることから、指数 n を固定した時に $[G : H] = n$ となる部分群 H は有限個しかないことに注意。小松氏の稿参照。) これは G が $X_{\overline{\boldsymbol{Q}}}$ の $\overline{\boldsymbol{Q}}$ 上の被覆を統制していることを意味する。G の有限指数部分群 H に対応する $\overline{\boldsymbol{Q}}$ 上定義された $X_{\overline{\boldsymbol{Q}}}$ の被覆 $Y_{\overline{\boldsymbol{Q}}}$ を取ると、$X_{\boldsymbol{C}}$ の対応する被覆が $Y_{\boldsymbol{C}} = Y_{\overline{\boldsymbol{Q}}} \times_{\overline{\boldsymbol{Q}}} \boldsymbol{C}$ として得られる。関数体の方で言えば、$Y_{\overline{\boldsymbol{Q}}}$ の $\overline{\boldsymbol{Q}}$ 上の関数体を $\overline{\boldsymbol{Q}}(Y)$ とすれば、$\overline{\boldsymbol{Q}}(Y) \otimes_{\overline{\boldsymbol{Q}}} \boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}(Y)$ で、Galois 群の作用も同変的である。$M_{\overline{\boldsymbol{Q}}}$ を全ての $\overline{\boldsymbol{Q}}(Y)$ の合併体 (正確には入射極限) とすれば、$\overline{\boldsymbol{Q}}(X)$ の最大不分岐拡大体であって、$M_{\overline{\boldsymbol{Q}}} \otimes_{\overline{\boldsymbol{Q}}} \boldsymbol{C} = M_{\boldsymbol{C}}$ であり、再び位相群として、$\widehat{G} \simeq \mathrm{Gal}(M_{\overline{\boldsymbol{Q}}}/\overline{\boldsymbol{Q}}(X))$ である。

しかし、幸か不幸か、自明な場合を除き、全ての被覆が $\boldsymbol{Q}$ 上定義される訳ではない。つまり、X の被覆への $\boldsymbol{Q}$ の絶対 Galois 群 $G_{\boldsymbol{Q}} = \mathrm{Gal}(\overline{\boldsymbol{Q}}/\boldsymbol{Q})$ の作用は自明でなく、$G_{\boldsymbol{Q}}$ の作用により異なる被覆に移る。

この作用を標語「基本群は Galois 群なり」の下に群論的に捉える為に、上記のような関数体の拡大の Galois 群の言葉で見ていこう。

4. 群論の準備

一般に、群拡大

$$\mathcal{E} : 1 \longrightarrow N \longrightarrow \tilde{G} \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

に於いて、次のように G の N への外作用 (内部自己同型を法として定まる作用) $\varphi_{\mathcal{E}} : G \to \mathrm{Out}N$ が定まる ($\mathrm{Out}N := \mathrm{Aut}N/\mathrm{Int}N$ は N の外部自己同型群):

$\sigma \in G$ に対し、その持上げ $\tilde{\sigma} \in \tilde{G}$ を選び、$\tilde{\varphi}_{\tilde{\sigma}} \in \mathrm{Aut}N$ を、$x \in N$ に対して $\tilde{\varphi}_{\tilde{\sigma}}(x) := \tilde{\sigma}x\tilde{\sigma}^{-1}$ で定めると、$\tilde{\varphi}_{\tilde{\sigma}}$ は持上げ $\tilde{\sigma}$ に依るが、その類 $\varphi_{\mathcal{E}}(\sigma) := [\tilde{\varphi}_{\tilde{\sigma}}] \in \mathrm{Out}N$ は σ のみで well-defined に定まる。

特に、N が可換群のときは内部自己同型がないので、通常の意味での G の N への作用 $\varphi_{\mathcal{E}} : G \to \mathrm{Aut}N$ が定まる。対照的に N の中心が自明な時は、外作用 $\varphi_{\mathcal{E}}$ で拡大群 $\tilde{G}$ の同型類が定まるので、$\tilde{G}$ 自身を見ることと同等である。又、完全列が分裂する時、分裂射 $s : G \to \tilde{G}$ を指定すると、$\varphi_{\mathcal{E}}$ の $G \to \mathrm{Aut}N$ への持上げが定まる。

このような群拡大は、Galois 理論に於いて、体の拡大 $k \subset K \subset L$ (ここに $L/k, K/k$ 共に Galois 拡大) があると、Galois 群の完全列

$$1 \longrightarrow \mathrm{Gal}(L/K) \longrightarrow \mathrm{Gal}(L/k) \longrightarrow \mathrm{Gal}(K/k) \longrightarrow 1$$

として生ずる。

5. Galois 群の基本群への作用

前節の事柄を、$\boldsymbol{Q}$ 上定義された代数曲線 $X = X_{\boldsymbol{Q}}$ に対して適用しよう。$\boldsymbol{Q}$ 上の関数体を $\boldsymbol{Q}(X)$、$\overline{\boldsymbol{Q}}$ 上の関数体を $\overline{\boldsymbol{Q}}(X)$ とすれば、先に現れた最大不分岐拡大体 $M_{\overline{\boldsymbol{Q}}}$ は $\boldsymbol{Q}(X)$ の Galois 拡大でもあって、Galois 群の完全列

$$(\star) \qquad 1 \longrightarrow \mathrm{Gal}(M_{\overline{\boldsymbol{Q}}}/\overline{\boldsymbol{Q}}(X)) \longrightarrow \mathrm{Gal}(M_{\overline{\boldsymbol{Q}}}/\boldsymbol{Q}(X)) \longrightarrow \mathrm{Gal}(\overline{\boldsymbol{Q}}(X)/\boldsymbol{Q}(X)) \longrightarrow 1$$

が生ずる。

$(\star)$ の左側の群は、代数閉体 $\overline{\boldsymbol{Q}}$ 上定義された被覆を統制する代数的基本群 $\pi_1(X_{\overline{\boldsymbol{Q}}}) \simeq \mathrm{Gal}(M_{\overline{\boldsymbol{Q}}}/\overline{\boldsymbol{Q}}(X))$ であり、$(\star)$ の右側の群 $\mathrm{Gal}(\overline{\boldsymbol{Q}}(X)/\boldsymbol{Q}(X))$ は $\boldsymbol{Q}$ の絶対 Galois 群 $G_{\boldsymbol{Q}} := \mathrm{Gal}(\overline{\boldsymbol{Q}}/\boldsymbol{Q})$ と自然に同型である。前節のように、この完全列から $G_{\boldsymbol{Q}}$ の $\pi_1(X_{\overline{\boldsymbol{Q}}})$ への外作用が定まる:

$$\varphi_X : G_{\boldsymbol{Q}} \longrightarrow \mathrm{Out}\pi_1(X_{\overline{\boldsymbol{Q}}}).$$

これを X に付随する**外 Galois 表現**と呼ぶ。

基本群 $\pi_1(X_{\overline{\boldsymbol{Q}}})$ が良く判る例で見てみよう。基本群は非自明な abel 群である例は 2 種ある。

<u>例</u>. 2 点抜き射影直線 $C = \mathbf{P}^1 \setminus \{0, \infty\}$ の場合:
C の有限次不分岐 Galois 被覆 ($\mathbf{P}^1$ の $0, \infty$ の外不分岐な被覆) は Kummer 被覆 $s^n = t$ しかないので、基本群 $\pi_1(C_{\overline{\boldsymbol{Q}}})$ は $\widehat{\boldsymbol{Z}}$ と同型である。これから得られる $G_{\boldsymbol{Q}}$ の表現 $\varphi_C : G_{\boldsymbol{Q}} \to \mathrm{Aut}\widehat{\boldsymbol{Z}} \simeq \widehat{\boldsymbol{Z}}^{\times}$ は円分指標に他ならない。

<u>例</u>. 楕円曲線 E の場合:
E の有限次不分岐 Galois 被覆は同種写像に限り、それらはみな n 倍写像 $n : E \to E$ の中間被覆として現れるから、射影極限を取る時には n 倍写像のみを考慮すればよく、基本群 $\pi_1(E_{\overline{\boldsymbol{Q}}})$ は $\widehat{\boldsymbol{Z}}^{\oplus 2}$ と同型である。これから得られる $G_{\boldsymbol{Q}}$ の表現 $\varphi_E : G_{\boldsymbol{Q}} \to \mathrm{Aut}\widehat{\boldsymbol{Z}}^{\oplus 2} \simeq \mathrm{GL}(2, \widehat{\boldsymbol{Z}})$ は、E の等分点への Galois 表現である。

これらの例は結局良く知られたものが現われる例だが、基本群が非可換群になる場合には本質的に新たなものが現われる。その中でも 3 点抜き射影直線 $\mathbf{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ の場合が、最も基本的かつ他の色々な場合の祖型であると同時に、様々な理由により最も重要な場合でもあり、Belyĭ[Be]・Deligne[De]・Grothendieck[Gr]・伊原 [I1] などを端緒として多くの研究が続いている。以下専らこの場合を扱う。

6. $\mathbf{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}$ の場合

$\boldsymbol{Q}$ 上定義された 3 点抜き射影直線 $X = X_{\boldsymbol{Q}} = \mathbf{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\} = \operatorname{Spec} \boldsymbol{Q}\left[t, \frac{1}{t}, \frac{1}{1-t}\right]$ を考え、それを代数閉包 $\overline{\boldsymbol{Q}}$ 上で考えた (係数拡大した) ものを $X_{\overline{\boldsymbol{Q}}} := X \times_{\boldsymbol{Q}} \overline{\boldsymbol{Q}} = \operatorname{Spec} \overline{\boldsymbol{Q}}\left[t, \frac{1}{t}, \frac{1}{1-t}\right]$ とする。X の定める Riemann 面 $X^{\mathrm{an}} = X(\boldsymbol{C}) = \mathbf{P}^1(\boldsymbol{C}) \setminus \{0,1,\infty\}$ において、0 (resp. $1, \infty$) の回りを 1 周する道を適切に取って、その homotopy 類を x (resp. y, z) とすると、$X(\boldsymbol{C})$ の位相的基本群は、$\pi_1^{\mathrm{top}}(X(\boldsymbol{C})) = \langle x, y, z | xyz = 1 \rangle \simeq F_2$ (ここに F_2 は階数 2 の自由群) となり、特に x, y で自由生成される。以下、これにより $\pi_1^{\mathrm{top}}(X(\boldsymbol{C}))$ と階数 2 の自由群 F_2 とを同一視しよう。

$X_{\overline{\boldsymbol{Q}}}$ の有限次不分岐 Galois 被覆 ($\mathbf{P}^1$ の $0, 1, \infty$ の外不分岐な被覆) は、$\pi_1^{\mathrm{top}}(X(\boldsymbol{C})) = F_2$ の指数有限な正規部分群に対応する。これら全ての有限次不分岐 Galois 被覆を統制する群が $X_{\overline{\boldsymbol{Q}}}$ の代数的基本群 $\pi_1(X_{\overline{\boldsymbol{Q}}}, \cdot)$ であり、F_2 の副有限完備化

$$\widehat{F_2} := \varprojlim_{N \triangleleft F_2, [F_2:N] < \infty} F_2/N \tag{6.1}$$

と同型である。Galois 群の言葉でいえば $K = \overline{\boldsymbol{Q}}(t)$ の $0, 1, \infty$ の外不分岐な最大代数拡大 M の Galois 群 $\mathrm{Gal}(M/K)$ に他ならない。Galois 群の完全列

$$1 \longrightarrow \mathrm{Gal}(M/\overline{\boldsymbol{Q}}(t)) \longrightarrow \mathrm{Gal}(M/\overline{\boldsymbol{Q}}(t)) \longrightarrow \mathrm{Gal}(\overline{\boldsymbol{Q}}(t)/\boldsymbol{Q}(t)) \longrightarrow 1 \tag{6.2}$$

を考えると、$\mathrm{Gal}(\overline{\boldsymbol{Q}}(t)/\boldsymbol{Q}(t))$ は自然に $\boldsymbol{Q}$ の絶対 Galois 群 $G_{\boldsymbol{Q}} = \mathrm{Gal}(\overline{\boldsymbol{Q}}/\boldsymbol{Q})$ と同型であって、上の完全列から $G_{\boldsymbol{Q}}$ の表現

$$\varphi_X : G_{\boldsymbol{Q}} \to \mathrm{OutGal}(M/\overline{\boldsymbol{Q}}(t)) \simeq \mathrm{Out}\widehat{F_2} \tag{6.3}$$

が得られる。これを X に付随する $G_{\boldsymbol{Q}}$ の外 Galois 表現と呼ぶのであった。

この Galois 表現は、円分指標など今までに知られたものより豊富な情報を有する新しいものであろうか。ここに次の著しい結果が成立する。

定理 . $\varphi_X : G_{\boldsymbol{Q}} \to \mathrm{Out}\widehat{F_2}$ は単射である。

これは次の Belyĭの定理 [Be] から従う (小松氏の稿参照)。

定理 (Belyĭ). $\overline{\boldsymbol{Q}}$ 上定義された任意の代数曲線 C は、$\mathbf{P}^1$ の $0, 1, \infty$ の外不分岐な被覆として実現できる。

$\overline{\boldsymbol{Q}}$ 上定義された全ての代数曲線が定義されるためには、係数体は $\overline{\boldsymbol{Q}}$ を含まざるを得ないので、Belyĭの定理が主張する所によれば、$X = \mathbf{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}$ の全ての被覆が定義されるためには、係数体は $\overline{\boldsymbol{Q}}$ を含まざるを得ない。これは、X の全ての被覆の系への $G_{\boldsymbol{Q}}$ の作用が忠実であること、即ち φ_X の単射性を意味するのである。

従って原理的には、$\sigma \in G_{\boldsymbol{Q}}$ が $\widehat{F_2}$ の (位相的) 生成元 x, y の像 (これは x, y の pro-word で表される) で特定されることになる。$\varphi_X(\sigma) \in \mathrm{Out}\widehat{F_2}$ は、

$$\begin{cases} x \mapsto x^{\lambda}, \\ y \mapsto f(x,y)y^{\lambda}f(x,y)^{-1} \end{cases} \qquad (\lambda \in \widehat{\boldsymbol{Z}}^{\times}, f(x,y) \in [\widehat{F_2}, \widehat{F_2}])$$

の形の自己同型で一意に代表されることが知られているので、この (λ, f) を $\sigma \in G_{\boldsymbol{Q}}$ の「座標」と見るのが、現今では標準的である。すると上式は、$\sigma \in G_{\boldsymbol{Q}}$ の $\pi_1(\mathbf{P}^1_{\overline{\boldsymbol{Q}}} \setminus \{0, 1, \infty\}) \simeq \widehat{F_2}$ への作用をその座標 (λ, f) で書いたものと思えるが、やはり原理的には $\sigma \in G_{\boldsymbol{Q}}$ の性質は全てその座標 (λ, f) に現れている筈で、実際、種々の写像類群への $G_{\boldsymbol{Q}}$ の作用がこの座標によって書き表されている (中村氏の稿参照)。

さて一方、$\boldsymbol{Q}$ の絶対 Galois 群 $G_{\boldsymbol{Q}}$ そのものを知りたいと思えば、次に想到しよう:

問題. $(\lambda, f) \in \widehat{\boldsymbol{Z}}^{\times} \times [\widehat{F_2}, \widehat{F_2}]$ が、$\sigma \in G_{\boldsymbol{Q}}$ の座標となる為の必要十分条件を求めよ。(即ち、φ_X の像を決定せよ。)

これは最も基本的であるが、今なお未解決な問題である。φ_X の像を含む群のうち、現在最も標準的と思われるのが Grothendiek-Teichmüller 群 $\widehat{GT}$ であろう (古庄氏の稿参照)。

7. Galois 群も基本群

代数的な被覆 (即ち代数的な “局所同相” 射) のちゃんとした定式化を先延ばしにしてきたが、通常次の “finite etalè 被覆” を採用するのが普通である。(かなり端折ってあるので詳しくは松本氏の稿や代数幾何の教科書を参照されたい。)

定義. 局所環の間の射 $\varphi : A \to B$ が**不分岐**であるとは、$\mathfrak{m}_A B = \mathfrak{m}_B$ で剰余体の拡大 $A/\mathfrak{m}_A \hookrightarrow B/\mathfrak{m}_B$ が分離的であること。スキームの間の全射 $f : Y \to X$ が **finite etalè 被覆**とは、局所的に $f : \mathrm{Spec}\, B \to \mathrm{Spec}\, A$ となっているとして、環射 $A \to B$ によって B が有限平坦 A 加群であって、各点 $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}\, B$ に対し、局所環の拡大 $A_{f(\mathfrak{q})} \to B_{\mathfrak{q}}$ が不分岐となること。

閉点 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, A$ (即ち $\mathfrak{p}$ が A の極大 ideal) については、剰余環 $k = A/\mathfrak{p}$ が既に体であって局所環の剰余体でもあるが、この時は $A/\mathfrak{p} \to B/\mathfrak{p}B$ によって $B/\mathfrak{p}B$ を k-代数とみるとき、k の有限次分離拡大の直和になることである。特に、k が代数閉体なら $B/\mathfrak{p}B$ は k 自身の直和であって、正に点 $\mathfrak{p}$ の上にそれと同じものが何枚か重なっているという “局所同相” に相当する条件であることが感じとれよう。

一方、剰余体が代数閉体でない状況を想定すれば、注目すべきは、この定式化の下では体の有限次分離拡大が被覆として扱える、ということである。ということは、完全列$(\star)$ に現れる右側の群 $\mathrm{Gal}(\overline{\boldsymbol{Q}}/\boldsymbol{Q}) = G_{\boldsymbol{Q}}$ も、被覆の変換群として基本群と捉えら

れるのである。実際には、体 k に対して環付空間 $\operatorname{Spec} k$ (位相空間としては1点のみの自明な空間だが、その上に局所環として体 k が乗っている) を考える。この空間の連結な被覆は、体 k の有限次分離拡大 K に対して $\operatorname{Spec} K \to \operatorname{Spec} k$ (位相空間の間の射は1点集合間の自明なもの、環の間の射は包含射 $k \hookrightarrow K$) の形のものなので、その全体の成す系の自己同型群は正に k の絶対 Galois 群 $\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{sep}}/k) = G_k$ に他ならない。従って、この定式化により $\pi_1(\mathrm{Spec}\ k) \simeq G_k$ となる。

完全列($\star$) の真ん中の群 $\mathrm{Gal}(M_{\overline{\boldsymbol{Q}}}/\boldsymbol{Q}(X))$ は、代数閉体 $\overline{\boldsymbol{Q}}$ 上の幾何的な被覆を統制する部分 $\pi_1(X_{\overline{\boldsymbol{Q}}}) \simeq \mathrm{Gal}(M_{\overline{\boldsymbol{Q}}}/\overline{\boldsymbol{Q}}(X))$ (**幾何的基本群**と呼ばれることがある) と係数拡大の部分 $\pi_1(\operatorname{Spec} \boldsymbol{Q}) \simeq G_{\boldsymbol{Q}}$ とを (非自明に!!) 併せたものである。$\pi_1(X_{\boldsymbol{Q}}) \simeq \mathrm{Gal}(M_{\overline{\boldsymbol{Q}}}/\boldsymbol{Q}(X))$ は**数論的基本群**と呼ばれることがある。

古典的な岩澤理論などで扱うのは、完全列の両脇の群とも代数体の Galois 群という数論的な状況であるが、対照的に両脇の群とも位相的な基本群という幾何的な状況であるのがファイバ空間に於けるモノドロミー表現である (松本氏の稿参照)。これなどは「もっと目で見える」状況と言えよう。

参考文献として、草分けとなった論文・主な論説文・関連論文を多く含む論文集などを挙げておきます。

参考文献

[Po] H. Poincaré, Analysis situs, Journal de l'École polytechnique, Ser 2, 1 (1895), (Poincaré 全集第6巻に所収).

[AI] G. Anderson, Y. Ihara, Pro-l branched coverings of $\mathbf{P}^1$ and higher circular l-units, I: Ann. of Math. (2) 128 (1988), no. 2, 271–293, II: Internat. J. Math. 1 (1990), no. 2, 119–148.

[Be] G. V. Belyĭ, On Galois extensions of a maximal cyclotomic field, Izv. Akad. Nauk USSR 43 (1979), 267–276; English transl. Math USSR Izv. 14 (1980) 247–256.

[De] P. Deligne, Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points, in [2] , 79–297.

[Dr] V. G. Drinfel'd, On quasitriangular quasi-Hopf algebras and a group closely related with $\mathrm{Gal}(\bar{\boldsymbol{Q}}/\boldsymbol{Q})$, Leningrad J. 2 (1991), 829–860.

[Gr] A. Grothendieck, Esquisse d'un programme, in [6], 5–48 (originally 1984, mimeographed note).

[I1] Y. Ihara, Profinite braid groups, Galois representations and complex multiplications, Ann. of Math. 123 (1986), 43–106.

[I2] Y. Ihara, Braids, Galois groups, and some arithmetic functions, Proc. ICM (Kyoto, 1990), 99–120.

[N] 中村博昭, 副有限基本群のガロア剛性, 数学 47 (1995) vol. 1, 1–17.

[NTM] 中村博昭, 玉川安騎男, 望月新一, 代数曲線の基本群に関する Grothendieck 予想, 数学 50 (1998) vol. 2, 1–17.

[1] Galois representations and arithmetic algebraic geometry, Y. Ihara. (ed.), Adv. Stud. Pure Math. 12, Kinokuniya, Tokyo, 1987.

[2] Galois groups over $\boldsymbol{Q}$, Y. Ihara, K. Ribet, J.-P. Serre (eds.), MSRI Publ. 16, Springer-Verlag, 1989.

[3] モジュライ空間, ガロア表現および L 関数, 京大数理研講究録 884, 1994.

[4] The Grothendieck theory of dessins d'enfants, L. Schneps (ed.), London Math. Soc. Lec. Note Ser. 200, Cambridge, 1994.

[5] Recent developments in the inverse Galois problem, M. Fried et al. (eds.), Contemp. Math. 186, AMS, 1995.

[6] Geometric Galois actions 1, Around Grothendieck's "Esquisse d'un programme", L. Schneps, P. Lochak (eds.), London Math. Soc. Lec. Note Ser. 242, Cambridge, 1997.

[7] Geometric Galois actions 2, The inverse Galois problem, moduli spaces and mapping class groups, L. Schneps, P. Lochak (eds.), London Math. Soc. Lec. Note Ser. 243, Cambridge, 1997.

[8] Communications in Arithmetic Fundamental Groups, 京大数理研講究録 1267, 2002.

[9] Arithmetic fundamental groups and noncommutative algebra, M. D. Fried, Y. Ihara (eds.), Proc. Symp. Pure Math. 70, AMS, 2002.

[10] Galois groups and fundamental groups, L. Schneps (ed.), MSRI Publ. 41. Cambridge, 2003.

上智大学理工学部数学科 102-8554 東京都千代田区紀尾井町 7–1

E-mail address: `tsuno@mm.sophia.ac.jp`