# 代数幾何学による次元公式の計算

浜畑 芳紀（東京理科大学理工学部）

## はじめに

対馬龍司氏の Siegel 保型形式の次元公式に関する論文を紹介する．論文では代数幾何学の様々の結果が使われているので, 最初の節をそれらの解説に充てる．例をいくつか載せたが, 次節以降の記号, 結果を使っているものもあるので, 初読の際は飛ばしていただきたい．第 2 節は対馬氏の論文の解説である．最後の節は Hilbert 保型形式の次元公式についての解説である．Shimizu の次元公式については証明にはまったく触れず, 次元公式を使った次元の計算方法について述べる．また, Hilbert modular 群の torsion-free な部分群の場合に代数幾何学による次元公式を解説する．

本稿を書く機会を下さった伊吹山知義先生に深く感謝します.

## 目 次

# 1　代数幾何学の方法と結果

## 1.1　Riemann-Roch-Hirzebruch の定理

### 1.1.1　Chern 類

ここでは後で必要になる Chern 類を定義する．Chern 類とは特性類の一種である．特性類とは, 多様体の大局的な曲がり具合を cohomoloy 類で表したものといえる．特性類として, Euler 類, Stiefel-Whitney 類, Pontrjagin 類, Chern 類があるが, ベクトル · バンドルの特性類はこの 4 種類のみである．現在知られている特性類の定義は次の 3 つである：(1)　微分形式を使う微分幾何学的定義, (2)　障害類による位相幾何学的定義, (3) Grassmann 多様体の cohomology を使う定義.

**定義（その１）**　$X$ を実多様体とする．$V$ を $X$ 上の複素ベクトル · バンドルでファイバー $\mathbb{C}^q$ をもつものとする．$A^0(X)$ を $X$ 上の微分可能な複素関数全体のなす環, $A^p(V)$ を $V$ に値をとる $X$ 上の $p$ 次微分形式全体のなす加群とする. $f \in A^0(X)$ と $\xi \in A^p(V)$ に対し, $f\xi \in A^p(V)$ が定義されて, $A^p(V)$ は $A^0(M)$-加群になる．$V$ の接続 $\nabla : A^0(V) \to A^1(V)$ を共変外微分 $D : A^p(V) \to A^{p+1}(V)$ に拡張し, $R = D \circ D : A^0(V) \to A^2(V)$ とおくと, $R \in A^2(\mathrm{End}(V))$ である. この $R$ を $\nabla$ の曲率という.

$$\det\left(\lambda I - \frac{R}{2\pi i}\right) = \lambda^q + c_1(V, \nabla)\lambda^{q-1} + \cdots + c_q(V, \nabla)$$

と展開する．ここに, $I$ は $V$ の恒等変換．（$R$ は 2 次の微分形式だから, 他の微分形式と可換となり, 普通の数のように左辺を展開できる．後で分かるように, 分母の $2\pi i$ は $c_i(V, \nabla)$ が $H^*(X, \mathbb{Z})$ の元を定めるようにするため.）右辺の係数 $c_i(V, \nabla)$ は $2i$ 次微分形式である．$\mathrm{End}(\det V)$ 上では, $D$ は通常の外微分 $d$ と等しい．$\det(\lambda I - \frac{R}{2\pi i})$ を $\mathrm{End}(\det V)$ に値をもつ微分形式とみなすと, $d(\det(\lambda I - \frac{R}{2\pi i})) = D(\det(\lambda I - \frac{R}{2\pi i}))$. Bianchi の恒等式を使って, 右辺は 0 となる．よって, $d(c_i(V, \nabla)) = 0 \quad (i = 1, \ldots, q)$. したがって $c_i(V, \nabla)$ は $H^{2i}(X, \mathbb{C})$ の元を定める．この cohomology 類は $\nabla$ の取り方によらない．故にこれを $c_i(V)$ と書き, $V$ の第 $i$ Chern 類と呼ぶ．また,

$$c(V) := 1 + c_1(V) + \cdots + c_q(V)$$

を $V$ の全 Chern 類と呼ぶ. $V$ が $X$ の接バンドル $T_X$ のとき, $c_i(X) = c_i(T_X)$ と書き, $X$ の第 $i$Chern 類と呼ぶ.

$c_i(V) \in H^{2i}(X,\mathbb{Z})$ を示すには, Chern 類を $H^*(X,\mathbb{Z})$ の元として与えるような別の定義と比べる必要がある．そのために, 次に公理による定義を与える．

**定義（その２）**　次の 4 つの公理をみたす $c_i(V)$ を $V$ の第 $i$Chern 類という：

公理 1 $X$ 上の複素ベクトル・バンドル $V$ と整数 $i \geq 0$ に対し, $c_i(V) \in H^{2i}(X,\mathbb{Z})$ で, $c_0(V) = 1$.

公理 2 （自然性） $X$ 上の複素ベクトル・バンドル $V$ と他の多様体 $Y$ からの $C^\infty$ 写像 $f : Y \to X$ に対して,

$$c_i(f^*V) = f^*(c_i(V)) \quad \in H^{2i}(Y,\mathbb{Z}).$$

公理 3 （Whitney の和公式） $X$ 上の複素ベクトル・バンドル $V$, $W$ に対して,

$$c(V \oplus W) = c(V) \cdot c(W).$$

公理 4 （正規化） $L$ を $P^1(\mathbb{C})$ 上の tautological な直線バンドルとする．そのとき

$$c_1(L)[P^1(\mathbb{C})] = -1.$$

上の 4 公理をみたす Chern 類の存在と一意性が, 位相幾何学の理論により証明されている．詳細については, [M-S] を参照されたい．微分形式を使った Chern 類は, 4 公理をみたす．よって, 両者の Chern 類は一致する．微分形式を使う定義を用いて実際の計算が行なわれる．

**例 1.1**　§3 の記号を用いる．$Y_G$ を Hilbert modular 曲面とする．

$$w_i = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{dx_i \wedge dy_i}{y_i^2} \qquad (i = 1, 2)$$

とおく．そのとき, $Y_G$ の第 1 Chern 類 $c_1 \in H^1(Y_G,\mathbb{Z})$ は

$$c_1 = \gamma + \sum_x Z_x$$

によって与えられる．ただし, $\gamma$ は $w_1 + w_2$ によって定まる cohomology 類, $\sum$ は $G$ の cusp 全体の上をわたる．$x$ の特異点解消を行なったとき, 有理曲線 $S_1, \ldots, S_r$ が現れたとすると, $S_1 + \cdots + S_r$ によって定まる cohomology 類が $Z_x$ である．

### 1.1.2 Riemann-Roch-Hirzebruch の定理

$\overline{X}$ を $n$ 次元コンパクト複素多様体とし, $V$ を $\overline{X}$ 上のファイバー $\mathbb{C}^q$ のベクトル・バンドルとする. そのとき $V$ の Chern 類 $c_i(V) \in H^{2i}(\overline{X}, \mathbb{Z})$ は $c_0(V) = 1,\ c_i(V) = 0 \quad (q < i)$ をみたす. Chern 類を係数とする次の多項式を形式的に因数分解する:

$$1 + c_1(V)x + \cdots + c_q(V)x^q = \prod_{i=1}^{q}(1 + \gamma_i x).$$

このとき,

$$\mathcal{T}(V) = \prod_{i=1}^{q} \frac{\gamma_i}{1 - e^{-\gamma_i}}, \quad \mathrm{ch}(V) = \sum_{i=1}^{q} e^{\gamma_i}$$

をそれぞれ $V$ の Todd 類, Chern 指標という. $\mathcal{T}(V)$, $\mathrm{ch}(V)$ の右辺は $\gamma_i$ たちの対称式であるから, $c_i = c_i(V)$ たちで書き下せる. すなわち,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(V) &= \sum_i \mathcal{T}_i(V), \qquad && \mathcal{T}_i(V) \in H^{2i}(\overline{X}, \mathbb{Q}), \\ \mathrm{ch}(V) &= \sum_i \mathrm{ch}_i(V), \qquad && \mathrm{ch}_i(V) \in H^{2i}(\overline{X}, \mathbb{Q}) \end{aligned}$$

と書くとき,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}_1(V) &= \frac{1}{2}c_1 \\
\mathcal{T}_2(V) &= \frac{1}{12}(c_1^2 + c_2) \\
\mathcal{T}_3(V) &= \frac{1}{24}c_1c_2 \\
\mathcal{T}_4(V) &= \frac{1}{720}(-c_1^4 + 4c_1^2c_2 + 3c_2^2 + c_1c_3 - c_4) \\
\mathcal{T}_5(V) &= \frac{1}{1440}(-c_1^3c_2 + 3c_1c_2^2 + c_1^2c_3 - c_1c_4) \\
\mathcal{T}_6(V) &= \frac{1}{60480}(2c_1^6 - 12c_1^4c_2 + 11c_1^2c_2^2 + 10c_2^3 + 5c_1^3c_3 + 11c_1c_2c_3 \\
&\quad -c_3^2 - 5c_1^2c_4 - 9c_2c_4 - 2c_1c_5 + 2c_6) \\
&\cdots \qquad \cdots \\
\mathrm{ch}_0(V) &= q \\
\mathrm{ch}_1(V) &= c_1 \\
\mathrm{ch}_2(V) &= \frac{1}{2}(c_1^2 - 2c_2) \\
\mathrm{ch}_3(V) &= \frac{1}{6}(c_1^3 - 3c_1c_2 + 3c_3) \\
\mathrm{ch}_4(V) &= \frac{1}{24}(c_1^4 - 4c_1^2c_2 + 4c_1c_3 + 2c_2^2 - 4c_4) \\
&\cdots \qquad \cdots
\end{aligned}
$$

Chern 指標に対し, 次の公式が成立する：$\overline{X}$ 上のベクトル・バンドル $V$, $W$ に対して

$$
\begin{aligned}
\mathrm{ch}(V \oplus W) &= \mathrm{ch}(V) + \mathrm{ch}(W), \\
\mathrm{ch}(V \otimes W) &= \mathrm{ch}(V) \cdot \mathrm{ch}(W).
\end{aligned}
$$

$V$ が $\overline{X}$ の接バンドル $T_{\overline{X}}$ のとき, $\mathcal{T}(\overline{X}) = \mathcal{T}(T_{\overline{X}})$, $\mathrm{ch}(\overline{X}) = \mathrm{ch}(T_{\overline{X}})$ と書き, それぞれ $\overline{X}$ の Todd 類, Chern 指標という.

**注意 1.1** $\overline{X}$ 上のベクトル・バンドルの同型類全体が生成する自由アーベル群に, 完全系列 $0 \to V_1 \to V_2 \to V_3 \to 0$ があれば, $[V_2] = [V_1] + [V_3]$ となるように relation を定義したものを $K(\overline{X})$ と書く. このとき, $K(\overline{X})$ は

$$
[V] + [W] = [V \oplus W], \qquad [V] \cdot [W] = [V \otimes W]
$$

を加法と積として環になる．この環を $\overline{X}$ の Grothendieck 群（または $K$ 群という）．（この $K(\overline{X})$ は $K$ 理論に出てくる $K_0$ のこと.）上の Chern 指標の公式より, ch は環準同型

$$\mathrm{ch} : K(\overline{X}) \to H^*(\overline{X}, \mathbb{Q})$$

を定める．$\mathrm{ch}_1(V) = c_1(V) \in H^2(\overline{X}, \mathbb{Z})$ であるから, 第1Chern 類は, 写像

$$c_1 : K(\overline{X}) \to H^2(\overline{X}, \mathbb{Z})$$

を定義しているといえる.

$H_{2n}(\overline{X}, \mathbb{Z})$ の中に基本類と呼ばれる $\mathbb{Z}$ 上の生成元がある : $H_{2n}(\overline{X}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\overline{X}]$. $K$ は $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ のいずれかとする．$a \in H^{2n}(\overline{X}, K)$ に対して, $a[\overline{X}] \in K$ となる.
$\overline{X}$ 上のベクトル · バンドル $V$ に対して,

$$\chi(\overline{X}, \mathcal{O}(V)) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim H^i(\overline{X}, \mathcal{O}(V))$$

とおく．これは $V$ の Euler-Poincaré 標数と呼ばれている．このとき, Riemann-Roch-Hirzebruch の定理と呼ばれる次の定理が成立する.

**定理 1.1** (Hirzebruch)

$$\chi(\overline{X}, \mathcal{O}(V)) = \kappa_n \left[ \mathrm{ch}(V) \cdot \mathcal{T}(\overline{X}) \right].$$

ここに $\kappa_n[\quad]$ は, $\mathrm{ch}(V) \cdot \mathcal{T}(\overline{X})$ の中で $H^{2n}(\overline{X}, \mathbb{Q})$ に含まれる部分の $[\overline{X}]$ での値を表す.

$\overline{X} = \overline{X}_n$ が $n$ 次元で, $V$ が直線バンドル $F$ のときは, $c_i = c_i(\overline{X})$ とおくとき

$$\kappa_n[ch(F) \cdot \mathcal{T}(\overline{X})] = P_n(c_1(F), c_1, \ldots, c_n)$$

となる多項式 $P_n$ が存在する．例えば, 次のように表せる.

$$
\begin{aligned}
\chi(\overline{X}_1, \mathcal{O}(F)) &= F + \frac{1}{2}c_1 \\
\chi(\overline{X}_2, \mathcal{O}(F)) &= \frac{1}{2}F^2 + \frac{1}{2}c_1 F + \frac{1}{12}(c_1^2 + c_2) \\
\chi(\overline{X}_3, \mathcal{O}(F)) &= \frac{1}{6}F^3 + \frac{1}{4}c_1 F^2 + \frac{1}{12}(c_1^2 + c_2)F + \frac{1}{24}c_1 c_2 \\
\chi(\overline{X}_4, \mathcal{O}(F)) &= \frac{1}{24}F^4 + \frac{1}{12}c_1 F^3 + \frac{1}{24}(c_1^2 + c_2)F^2 + \frac{1}{24}c_1 c_2 F \\
\chi(\overline{X}_5, \mathcal{O}(F)) &= \frac{1}{120}F^5 + \frac{1}{48}c_1 F^4 + \frac{1}{72}(c_1^2 + c_2)F^3 + \frac{1}{48}c_1 c_2 F^2 \\
&\quad + \frac{1}{720}(-c_1^4 + 4c_1^2 c_2 + 3c_2^2 + c_1 c_3 - c_4)F \\
&\quad + \frac{1}{1440}(-c_1^3 c_2 + 3c_1 c_2^3 + c_1^2 c_3 - c_1 c_4) \\
\chi(\overline{X}_6, \mathcal{O}(F)) &= \frac{1}{720}F^6 + \frac{1}{240}c_1 F^5 + \frac{1}{288}(c_1^2 + c_2)F^4 + \frac{1}{144}c_1 c_2 F^3 \\
&\quad + \frac{1}{1440}(-c_1^4 + 4c_1^2 c_2 + 3c_2^2 + c_1 c_3 - c_4)F^2 \\
&\quad + \frac{1}{1440}(-c_1^3 c_2 + 3c_1 c_2^2 + c_1^2 c_3 - c_1 c_4)F \\
&\quad + \frac{1}{60480}(2c_1^6 - 12c_1^4 c_2 + 11c_1^2 c_2^2 + 10c_2^3 + 5c_1^3 c_3 \\
&\quad + 11c_1 c_2 c_3 - c_3^2 - 5c_1^2 c_4 - 9c_2 c_4 - 2c_1 c_5 + 2c_6)
\end{aligned}
$$

**例 1.2** $\overline{X}$ をコンパクト Riemann 面とし, $D$ を $\overline{X}$ 上の因子とする. $D$ の定義する直線バンドルも同じ記号で表すことにする. Riemann-Roch-Hirzebruch の定理より,

$$
\begin{aligned}
\chi(\overline{X}, \mathcal{O}(D)) &= D[\overline{X}] + \frac{1}{2}c_1(\overline{X})[\overline{X}] \\
&= D[\overline{X}] - \frac{1}{2}K[\overline{X}]
\end{aligned}
$$

となる. ただし, $K$ は $\overline{X}$ の canonical bundle である. $D = 0$ とすると, 左辺 $= \chi(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}}) = 1 - g$ ($g$ は $\overline{X}$ の genus) で, 右辺は $-\frac{1}{2}K[\overline{X}]$ であるから, $-\frac{1}{2}K[\overline{X}] = 1 - g$. また, $\deg D = D[\overline{X}]$ であるから,

$$\chi(\overline{X}, \mathcal{O}(D)) = \deg D + 1 - g$$

を得る. これは, コンパクト Riemann 面についての Riemann-Roch の定理である.

この後, Hirzebruch は Atiyah と共にこの定理を微分可能多様体へ一般化した. すなわち, コンパクト微分可能多様体上の楕円型微分作用素の 2 つの指数に関する等式を与えたのである. そしてさらにその結果は, Atiyah-Singer の指数定理として一般化されている.

## 1.2 対数的 Chern 類

$\overline{X}$ を $n$ 次元複素多様体とし, $\Delta$ を $\overline{X}$ 上の reduced divisor で normal crossing なものとする. $X = \overline{X} - \Delta$ とおく. $x \in \Delta$ に対して, $x$ のまわりの局所座標系 $(z_1, . . . , z_n)$ を $\Delta$ が $z_1 \cdots z_l = 0$ で定義されているようにとる. $\Theta_{\overline{X}}$ を $\overline{X}$ 上の正則ベクトル場の芽の層とする. 座標系 $(z_1, . . . , z_n)$ に関して $z_1\frac{\partial}{\partial z_1}, . . . , z_l\frac{\partial}{\partial z_l}, \frac{\partial}{\partial z_{l+1}}, . . . , \frac{\partial}{\partial z_n}$ で生成される $\Theta_{\overline{X}}$ の部分層を $\Theta_{\overline{X}}(\log\Delta)$ と書く. $\frac{dz_1}{z_1}, . . . , \frac{dz_l}{z_l}, dz_{l+1}, . . . , dz_n$ で生成される $\Omega^1_{\overline{X}}(\Delta) = \Omega^1_{\overline{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\overline{X}}} \mathcal{O}_{\overline{X}}(\Delta)$ の部分層を $\Omega^1_{\overline{X}}(\log\Delta)$ と書く. そのとき, $\Theta_{\overline{X}}(\log\Delta)$ は, $\mathcal{O}_{\overline{X}}$ 上で $\Omega^1_{\overline{X}}(\log\Delta)$ と dual である. よって $c_j(\Theta_{\overline{X}}(\log\Delta)) = (-1)^j c_j(\Omega_{\overline{X}}(\log\Delta))\ \ (0 \leq j \leq n)$ が成立する.

$$\overline{c}_j(X) := c_j(\Theta_{\overline{X}}(\log\Delta) \qquad (0 \leq j \leq n)$$

を $X$ の $\overline{X}$ における第 $j$-対数的 Chern 類という.

$\Delta$ を既約因子の和として分解する:$\Delta = \bigcup_{i\in I} D_i$. 各 $i$ に対して, $\epsilon_i \in H^2(\overline{X}, \mathbb{Z})$ を $D_i$ によって定まる cohomology class とする. 自然数 $k$ に対して, $\Delta_k$ を $\epsilon_i\ \ (i \in I)$ の第 $k$-基本対称式とする. これを実際に書き下してみると次のようになる.

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= \sum_{i\in I}\epsilon_i \quad \in H^2(\overline{X}, \mathbb{Z}) \\
\Delta_2 &= \sum_{i<j}\epsilon_i\epsilon_j \quad \in H^4(\overline{X}, \mathbb{Z}) \\
\cdots & \quad \cdots \\
\Delta_n &= \sum_{i_1<\cdots<i_n}\epsilon_{i_1}\cdots\epsilon_{i_n} \quad \in H^{2n}(\overline{X}, \mathbb{Z})
\end{aligned}$$

$k > n$ のとき, $\Delta_k = 0$ となる.

$c(\overline{X}) = 1 + c_1(\overline{X}) + \cdots + c_n(\overline{X})$ を $\overline{X}$ の全 Chern 類, $\overline{c}(\overline{X}, \Delta) = 1 + \overline{c}_1(X) + \cdots + \overline{c}_n(X)$ を $\overline{X}$ の $\Delta$ に関する全対数的 Chern 類と呼ぶ. Tsushima は次の等式を示した.

$$c(\overline{X}) = \overline{c}(\overline{X}, \Delta)\prod_{i\in I}(1 + \epsilon_i)$$

これを書き直すと次の結果になる.

**命題 1.1** (Tsushima) $c_j(\overline{X}) = \sum_{k=0}^{j}\overline{c}_{j-k}(X)\cdot\Delta_k$.

## 1.3 Toroidal コンパクト化

$\mathcal{D}$ を有界対称領域とし, $\Gamma$ を $\mathrm{Aut}(\mathcal{D})$ の neat な arithmetic subgroup とする. ここで, $\Gamma$ が neat であるとは $\gamma \in \Gamma$ のべき $\gamma^n$ が unipotent ならば, $\gamma$ 自身が unipotent であることを意味する. このとき $\Gamma$ は $\mathcal{D}$ に free に作用して, $X := \Gamma \setminus \mathcal{D}$ は smooth variety である. この $X$ は locally symmetric variety または arithmetic variety と呼ばれている.

$f$ を $\mathcal{D}$ 上の正則関数とする. $f$ が (1) 各 $\gamma \in \Gamma$ に対し, $f(\gamma z) j_\gamma(z)^k = f(z)$ ($j_\gamma(z)$ は $\gamma$ の $z$ での jacobian determinant) (2) boundary の近くでのある増大条件, をみたすとき, $f$ を $\Gamma$ に関する weight $k$ の保型形式という. $\Gamma$ に関する weight $k$ の保型形式全体のなすベクトル空間を $A_k(\Gamma)$ と書くと, $A_k(\Gamma)$ は有限次元である.

### 1.3.1 Satake コンパクト化

$X$ のコンパクト化 $\overline{X}$ で次の性質を持つものが存在する：

(S1) $\overline{X}$ は projective, normal で, $X$ を Zariski open subset として含む.

(S2) $A(\Gamma) = \bigoplus_{k \geq 0} A_k(\Gamma)$ を $\Gamma$ に関する保型形式全体のなす環とする. そのとき, $\overline{X} = \mathrm{Proj}\ A(\Gamma)$. すなわち, $A(\Gamma)$ は $X$ の projective embedding を与える.

(S3) normal crossing な boundary をもつ $X$ の非特異なコンパクト化 $\widetilde{X}$ に対し, dominant holomorphic な map $p : \widetilde{X} \to \overline{X}$ が存在して, $X$ に制限すると恒等写像になる. $\overline{X}$ 上の ample invertible sheaf で weight 1 の保型形式に対応するものを $\mathcal{L}$ と書いて, $\widetilde{\mathcal{L}} = p^*\mathcal{L}$ とおくと $A_k(\Gamma) \cong H^0(\overline{X}, \mathcal{L}^{\otimes k}) = H^0(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{L}}^{\otimes k})$.

(S4) $\Gamma$ の指数有限な部分群 $\Gamma'$ に対して, $\Gamma' \setminus \mathcal{D} \to \Gamma \setminus \mathcal{D}$ を延長するような標準的な finite holomorphic map $\overline{\Gamma' \setminus \mathcal{D}} \to \overline{\Gamma \setminus \mathcal{D}}$ が存在する.

$\overline{X}$ は $X$ の Satake コンパクト化, あるいは Satake-Baily-Borel コンパクト化と呼ばれている. Satake は Siegel 上半平面の商のコンパクト化を与え, Baily と Borel が任意の対称領域の商へ一般化したのでそのような名称がついている. $\overline{X}$ の短所は, boundary が余りに小さいため boundary に沿って複雑な特異点があるかもしれないということである. $X$ 自体に既に特異点があるかもしれないが, $\Gamma$ の部分群 $\Gamma'$ を十分小さくとると, 特異点は自然な分岐被覆 $\Gamma' \setminus \mathcal{D} \to X = \Gamma \setminus \mathcal{D}$ によって除去されるから, 実際にはあまり問題にならない. しかし, boundary の特異性はこのような手段では解消されない.

Satake コンパクト化の作り方: $\mathfrak{D} \subset \mathbb{C}^n$ とする. $\overline{\mathfrak{D}}$ を $\mathfrak{D}$ の $\mathbb{C}^n$ における閉包とし, $\partial\mathfrak{D} = \overline{\mathfrak{D}} - \mathfrak{D}$ とおく. すると, $\partial\mathfrak{D}$ は次の性質をみたす部分集合 $F$ の disjoint union である. 1) $p \in F$ ならば, $p$ の $\mathbb{C}^n$ における近傍 $N$ が存在して, $F \cap N$ は $N$ の複素部分多様体である. 2) $\sigma$ を $\mathbb{C}^n$ の中の unit disc とする. $f : \sigma \to \mathbb{C}^n$ は正則写像で, $f(\sigma) \subset \overline{\mathfrak{D}}$ と $f(\sigma) \cap F \neq \phi$ をみたせば, $f(\sigma) \subset F$. そのような $F$ を $\mathfrak{D}$ の boundary component という. $G = \mathrm{Aut}(\mathfrak{D})^\circ$ と書くと, $g \in G$ に対して, $g \cdot F = F$ または $g \cdot F \cap F = \phi$ である. $G$ が $\mathbb{Q}$ 上で定義されているとする. $P(F) := \{g \in G \mid g \cdot F = F\}$ が $\mathbb{Q}$ 上で定義されているならば, $F$ は rational であるという. $\mathfrak{D}^* = \mathfrak{D} \cup \{\mathfrak{D}$ の rational boundary component 全体 $\}$ と書く. $\Gamma$ を $G$ の neat な arithmetic subgroup とする. $\mathfrak{D}^*$ 上に次をみたす位相 $\mathfrak{T}$ を定義することができる. i) $\mathfrak{T}$ は, $\mathfrak{D}$ と各 $g \cdot \mathfrak{D}^* \quad (g \in G_{\mathbb{Q}})$ 上に $\mathbb{C}^n$ の部分空間としての位相を induce する. ii) $G_{\mathbb{Q}}$ は $\mathfrak{D}^*$ へ $\mathfrak{T}$ に関して連続に作用する. iii) $x,\ x' \in \mathfrak{D}^*,\ x \notin x'\Gamma$ のとき, $x$ の近傍 $N$ と $x'$ の近傍 $N'$ が存在して, $\Gamma \cdot N \cap N' = \phi$. iv) $x \in \mathfrak{D}^*$ とする. そのとき, $x$ の基本近傍系 $\mathfrak{N} = \{N_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が存在して, $\gamma \in \Gamma_x$ なら, $\gamma \cdot N_\lambda = N_\lambda$, $\gamma \notin \Gamma - \Gamma_x$ なら, $\gamma \cdot N_\lambda \cap N_\lambda = \phi$ となる. この位相を Satake topology と呼ぶ. このとき, $\overline{X} := \Gamma \setminus \mathfrak{D}^*$ が $X$ の Satake コンパクト化である.

**例 1.3** (Siegel modular variety)　2.2 の記号を用いる.

$$\mathfrak{S}_g^* = \bigcup \{\mathfrak{S}_g \text{の rational boundary component 全体}\} = \bigcup_{0 \leq g' \leq g} Sp_g(\mathbb{Z}) \cdot F_{g'}$$

とおく. $\mathfrak{S}_g^*$ を $\mathfrak{S}_g$ の rational closure という. $\Gamma$ を $G = Sp_g(\mathbb{R})$ の arithmetic subgroup とするとき, $\Gamma \setminus \mathfrak{S}_g^*$ に適当な位相を定義したものは $\Gamma \setminus \mathfrak{S}_g$ の Satake コンパクト化である. $\Gamma \setminus \mathfrak{S}_g^*$ の位相について : $\mathfrak{S}_g^*$ に Satake topology または cylindrical topology と呼ばれる位相を定義して, $\Gamma \setminus \mathfrak{S}_g^*$ 上に商位相が定義される. 2 つの位相は異なるが, 商位相は同値である.

**例 1.4** (Hilbert modular variety)　§3 の記号を使う. $K$ を $n$ 次総実代数体とし, $\Gamma$ を $G = SL_2(\mathfrak{o}_K)$ の指数有限の部分群とする. $\Gamma \setminus H^n$ に cusp を添加して

$$\overline{\Gamma \setminus H^n} = \Gamma \setminus H^n \cup \Gamma \setminus \mathbb{P}^1(K)$$

とおく. これに適当な位相を定義すると, $\overline{\Gamma \setminus H^n}$ は $\Gamma \setminus H^n$ の Satake コンパクト化になる.

**例 1.5** (Picard modular variety)　$d \in \mathbb{N}$ を平方因子のない自然数とし, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ とおく. $\mathfrak{o}_K$ をその整数環とする.

$$\mathcal{D}^n = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \ \| z \| < 1\}, \quad U(n,1;\mathbb{C}) = \{g \in GL_{n+1}(\mathbb{C}) \mid {}^t\overline{g} I g = I\}$$

とおく. ただし, $I = \begin{pmatrix} E_n & \\ & -1 \end{pmatrix}$ とする. $U(n,1;\mathbb{C})$ は $\mathcal{D}^n$ へ

$$g \cdot z = \frac{Az+b}{cz+d}, \quad g = \begin{pmatrix} A & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U(n,1;\mathbb{C})$$

によって作用する. ただし, $A \in M_n(\mathbb{C}),\ b,\ {}^tc \in \mathbb{C}^n,\ d \in \mathbb{C}$ のように $g$ をブロックに分ける. この作用は推移的であり, $(0,\dots,0) \in \mathcal{D}^n$ の isotropy subgroup は $U(n) \times U(1)$ である. よって, $\mathcal{D}^n = U(n,1;\mathbb{C})/(U(n) \times U(1))$ と書ける.

$$\Gamma := U(n,1;\mathfrak{o}_K) = U(n,1) \cap GL_{n+1}(\mathfrak{o}_K)$$

を $K$ に対する Picard modular 群と呼び, $\Gamma \setminus \mathcal{D}^n$ を Picard modular variety と呼ぶ.

$$\partial_K \mathcal{D}^n = \{z \in K^n \mid \ \| z \| = 1\}$$

とおくと, $\Gamma$ は上と同様の仕方で $\partial_K \mathcal{D}^n$ に作用する.

$$\overline{\Gamma \setminus \mathcal{D}^n} := \Gamma \setminus \mathcal{D}^n \cup \Gamma \setminus \partial_K \mathcal{D}^n$$

に適当な位相を定義すると, $\Gamma \setminus \mathcal{D}^n$ の Satake コンパクト化になる.

**例 1.6** (K3 曲面の 4 次元族) $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} U & & \\ & U & \\ & & -1_2 \end{pmatrix}$ とおく.

この行列を使って

$$\mathcal{D}_{IV} = \left\{ z = (z_1 : \cdots : z_6) \in \mathbb{P}^5 \mid {}^t z A z = A,\ {}^t\overline{z} A z > 0,\ \mathrm{Im}(z_3/z_1) > 0 \right\}$$

と定める. $g = (g_{ij}) \in GL_6(\mathbb{Z})$ に対して, $G(g) = (g_{11}+g_{12})(g_{33}+g_{34}) - (g_{13}+g_{14})(g_{31}+g_{32})$ とおくと $G := \{g \in GL_6(\mathbb{R}) \mid {}^t g A g = A,\ G(g) > 0\}$ は $\mathcal{D}_{IV}$ へ自然に作用する. $\Gamma_A := \{g \in GL_6(\mathbb{Z}) \mid {}^t g A g = A,\ G(g) > 0\}$ を $A$ に属する modular 群と呼ぶ. $\Gamma_A(2) := \{g \in \Gamma_A \mid g \equiv 1_6 \mod 2\}$ とおく. また, $F_1 = \{(z_1 : 0 : z_3 : 0 : 0 : 0) \in \mathbb{P}^5 \mid \mathrm{Im}(z_3/z_1) > 0\}$, $F_0 = \{(1:0:0:0:0:0)\}$ とおくと $F_1 \cong H = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ である. このとき $\overline{\mathcal{D}_{IV}} = \mathcal{D}_{IV} \cup \Gamma_A \cdot F_1 \cup \Gamma_A \cdot F_0$ とおくと, $\Gamma_A \setminus \overline{\mathcal{D}_{IV}}$ は適当な位相によって $\Gamma_A \setminus \mathcal{D}_{IV}$ の Satake コンパクト化である. $\Gamma_A(2) \setminus \overline{\mathcal{D}_{IV}}$ についても同様.

### 1.3.2 Toroidal コンパクト化

Mumford によれば, 次の性質を持つ $X$ のコンパクト化 $\widetilde{X}$ が存在する:

(M1) $\widetilde{X} - X$ は codimension が 1.

(M2) $\widetilde{X}$ は normal.

(M3) bimeromorphic でかつ holomorphic な map な $p : \widetilde{X} \to \overline{X}$ が存在して, $X$ に制限すると恒等写像になる.

(M4) $\widetilde{X}$ は $X$ に対して unique に決まらないが, smooth, projective な $\widetilde{X}$ で $\widetilde{X} - X$ が normal crossing なものが存在する.

(M5) 比例定理が成り立つ. (c.f. 1.4.)

$\widetilde{X}$ を $X$ の toroidal コンパクト化という. Tai によれば, $\widetilde{X}$ が projective ならば, $p : \widetilde{X} \to \overline{X}$ は $\overline{X}$ を boundary に沿った blow up の正規化である.

**例 1.7** Siegel modular variety の Satake コンパクト化を boundary に沿って blow up したものを, Igusa コンパクト化という. Igusa コンパクト化は toroidal コンパクト化である (Namikawa). genus $g$ が 3 以下のとき, このコンパクト化は nonsingular であるが, $g$ が 4 以上のときは singular になる.

**例 1.8** (Hilbert modular variety の Voronoi コンパクト化) 次は Ichikawa による 1980 年代後半の未発表の結果である. Hilbert modular variety から Siegel modular variety への modular embedding を考えると, Siegel modular variety の Voronoi コンパクト化を定める Delony-Voronoi 分解から Hilbert modular variety の Voronoi コンパクト化が定義される. このコンパクト化の各点に, polarized stable quasi-abelian variety が対応する. しかし, Hilbert moduar 曲面の場合に既に Hirzebruch によるコンパクト化と一致しておらず, singular になる場合もある.

**例 1.9** $\Gamma$ を Picard modular 群 $U(n, 1; \mathfrak{o}_K)$ の torsion free subgroup とし, $X = \Gamma \setminus \mathfrak{D}^n$ とおく. すると, $\widetilde{X} - X$ は abel 多様体の disjoint union となり, 各 abel 多様体は $K$ による虚数乗法をもつ.

toroidal コンパクト化の idea は, Igusa コンパクト化と Hirzebruch による Hilbert modular 曲面のコンパクト化から来ている. toroidal コンパクト化の長所を上で見たが, 短所としてよい moduli interpretation を与えることが難しいということがある.

## 1.4 Hirzebruch-Mumford の比例定理

1.3 の記号を用いる．$X$ の次元を $n$ とする．$\widetilde{X}$ を smooth であるようにとっておく．$G = \mathrm{Aut}(\mathcal{D})^\circ$ とおき, $G$ の maximal compact subgroup $K$ を適当にとると, $\mathcal{D} = G/K$ と表せる．$C_c$ を $G$ の複素化 $G_{\mathbb{C}}$ の compact form とすると, $\mathcal{D}^\vee := G_c/K$ は projective rational algebraic variety で flag variety となる．$\mathcal{D}^\vee$ を $\mathcal{D}$ の compact dual という．$\mathcal{D}$ から $\mathcal{D}^\vee$ への埋め込み (Borel embedding) $\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{D}^\vee$ が存在する．

### 1.4.1 Hirzebruch の比例定理

**定理 1.2** (Hirzebruch)　$X$ がコンパクトのとき, $\mathcal{D}$ と $\Gamma$ にのみ依存する定数 $c$ が存在して, $\sum_{i=1}^n i\nu_i = n$ なる任意の $n$ 個の非負整数の組 $(\nu_1, . . . , \nu_n)$ に対して

$$(\prod_{i=1}^n c_i^{\nu_i})[X] = c(\prod_{i=1}^n \check{c}_i^{\nu_i})[\mathcal{D}^\vee]$$

が成立する．

上の公式に出てくる $c$ は

$$c = (-1)^n \frac{\mathrm{vol}(X)}{\mathrm{vol}(\mathcal{D}^\vee)}$$

であることが知られている．ここに, $\mathrm{vol}(X)$ は $\mathcal{D}$ の Bergman metric によって定義される $X$ の volume であり, $\mathrm{vol}(\mathcal{D}^\vee)$ は $\mathcal{D}$ の Bergman metric を延長するような $\mathcal{D}^\vee$ の invariant metric によって定義される $\mathcal{D}^\vee$ の volume である．

**系 1.1**　上の仮定の下で $k > 0$ に対して

$$P(k) = \chi((\Omega^n_{\mathcal{D}^\vee})^{\otimes(-k)}) \quad (= \dim H^0(\mathcal{D}^\vee, (\Omega^n_{\mathcal{D}^\vee})^{\otimes(-k)}))$$

とおくと, $k \geq 2$ のとき

$$\dim A_k(\Gamma) = c \cdot P(-k) = (-1)^n c \cdot P(k-1).$$

ただし, $c$ は定理 1.2 の中に出てくる定数である．

証明.

$$
\begin{aligned}
c\cdot P(-k) &= c\cdot\chi\left((\Omega^n_{\mathcal{D}^\vee})^{\otimes k}\right) && \text{(Riemann-Roch-Hirzebruch)}\\
&= P_n(-k\check{c}_1,\check{c}_1,\ldots,\check{c}_n)\\
&= P_n(-kc_1,c_1,\ldots,c_n) && \text{(Hirzebruch 比例定理)}\\
&= P_n(c_1(\mathcal{L}^{\otimes k}),c_1,\ldots,c_n)\\
&= \chi\left(\mathcal{L}^{\otimes k}\right) && \text{(Riemann-Roch-Hirzebruch)}\\
&= \dim H^0(\overline{X},\mathcal{L}^{\otimes l}) && \text{(1.5 の消滅定理)}\\
&= \dim A_k(\Gamma)\ .\\
c\cdot P(1-k) &= \chi\left(\mathcal{L}^{\otimes(1-k)}\right)\\
&= (-1)^n\chi\left(\Omega^n_{\overline{X}}\otimes\mathcal{L}^{\otimes(k-1)}\right) && \text{(Serre duality)}\\
&= (-1)^n\chi\left(\mathcal{L}^{k}\right) && (\mathcal{L}=\Omega^n_{\overline{X}})\\
&= (-1)^n\dim A_k(\Gamma) && \text{(1.5 の消滅定理)}\ .
\end{aligned}
$$

□

### 1.4.2 Mumford の比例定理

$X$ がコンパクトでない場合には, $X$ の toroidal コンパクト化 $\widetilde{X}$ と対数的 Chern 類とを用いることにより, Hirzebruch の定理を一般化することができる.

**定理 1.3** (Mumford) $\mathcal{D}$ と $\Gamma$ にのみ依存する定数 $c$ が存在して, $\sum_{i=1}^n i\nu_i=n$ なる任意の $n$ 個の非負整数の組 $(\nu_1,\ldots,\nu_n)$ に対して

$$(\prod_{i=1}^n \overline{c}_i^{\nu_i})[\widetilde{X}]=c\cdot(\prod_{i=1}^n \check{c}_i^{\nu_i})[\mathcal{D}^\vee]$$

が成立する.

上の公式に出てくる $c$ も

$$c=(-1)^n\frac{\mathrm{vol}(X)}{\mathrm{vol}(\mathcal{D}^\vee)}$$

である. ここで

$$c'=\frac{(-1)^n(\prod_{i=1}^n\check{c}_i^{\nu_i})[\mathcal{D}^\vee]}{\mathrm{vol}(\mathcal{D}^\vee)}$$

とおくと, $c'$ は $\mathcal{D}$ と $(\nu_1, . . . , \nu_n)$ にのみ依存する定数であり,

$$(\prod_{i=1}^{n} \overline{c}_i^{\nu_i})[\widetilde{X}] = c' \cdot \mathrm{vol}(X)$$

と表せる.

**例 1.10** $H^2$ 上で, $\mathrm{Aut}(H^2)$ に関して不変な metric $\sum_{i=1}^{2} \frac{(dx_i)^2+(dy_i)^2}{y_i^2}$ がある. 対応する normalized volume form は $\omega = \left(\frac{-1}{2\pi}\right)^2 \frac{dx_1 \wedge dy_1}{y_1^2} \wedge \frac{dx_2 \wedge dy_2}{y_2^2}$ である. Hilbert modular 曲面 $Y_G$ に対して

$$\overline{c}_1^2[Y_G] = 2\mathrm{vol}(G \setminus H^2), \qquad \overline{c}_2[Y_G] = \mathrm{vol}(G \setminus H^2).$$

$\Delta = \widetilde{X} - X$, $\widetilde{\mathcal{L}} = \Omega^n_{\widetilde{X}}(\Delta)$ とおくと, $A_k(\Gamma) = H^0(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{L}}^{\otimes k})$ である（cf. 1.3）. $S_k(\Gamma) := H^0(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{L}}^{\otimes k}(-\Delta) = H^0(\widetilde{X}, \Omega^n_{\widetilde{X}} \otimes \widetilde{\mathcal{L}}^{\otimes(k-1)})$ とおく. $S_k(\Gamma)$ の元を $\Gamma$ に関する weight $k$ の cusp form と呼ぶ. Mumford の比例定理より, 次の結果が得られる.

**系 1.2** $\overline{X} - X$ の次元を $n'$ とすると, $n$ 次多項式 $P(k)$ と $n'$ 以下の多項式 $P_1(k)$ が存在して

$$\dim S_k(\Gamma) = (-1)^n c \cdot P(k-1) + P_1(k).$$

ただし, $c$ は定理 1.2 の中の定数で, $P$ は系 1.1 の中の多項式である.

証明.

$$\begin{aligned} c \cdot P(-k) &= c \cdot P_n(-k\check{c}_1, \check{c}_1, . . . , \check{c}_n) \\ &= P_n(-k\overline{c}_1, \overline{c}_1, . . . , \overline{c}_n) \qquad (\text{Mumford 比例定理}) \\ &= P_n(c_1(\widetilde{\mathcal{L}}^{\otimes k}), \overline{c}_1, . . . , \overline{c}_n) \qquad (-\overline{c}_1 = c_1(\widetilde{\mathcal{L}})) \end{aligned}$$

ここで, $\widetilde{\mathcal{L}} = p^*\mathcal{L}$ で, $\mathcal{L}$ は $\overline{X}$ 上の ample sheaf である. $n' = \dim(\overline{X} - X)$ であるから, $l > n'$ のとき $c_1(\mathcal{L}^{\otimes l})$ は, $X$ の中に support をもつ cycle を代表元としてもつ. よって, $c_1(\widetilde{\mathcal{L}}^{\otimes l})$ についても同様のことがいえる. したがって, $c_1(\widetilde{\mathcal{L}}^{\otimes l}) \prod_{i=1}^{n} \overline{c}_i^{\nu_i} = c_1(\widetilde{\mathcal{L}}^{\otimes l}) \prod_{i=1}^{n} c_i^{\nu_i}$ となる. 故に $P_n(c_1(\widetilde{\mathcal{L}}^{\otimes k}), \overline{c}_1, . . . , \overline{c}_n) - P_n(c_1(\widetilde{\mathcal{L}}^{\otimes k}), c_1, . . . , c_n) = n'$ 次以下の多項式, となる.

$$\begin{aligned} c \cdot P(-k) &= \chi\left(\widetilde{\mathcal{L}}^{\otimes k}\right) + (n' \text{ 次以下の多項式}) \\ &= (-1)^n \chi\left(\Omega^n_{\widetilde{X}} \otimes \widetilde{\mathcal{L}}^{\otimes(-k)}\right) + (n' \text{ 次以下の多項式}) \qquad (\text{Serre duality}) \end{aligned}$$

において $-k$ を $k-1$ に置き換えて, $n'$ 次以下の多項式の部分を $(-1)^{n+1}P_1(k)$ で書くと

$$
\begin{aligned}
c \cdot P(k-1) &= (-1)^n \chi\left(\Omega^n_{\widetilde{X}} \otimes \widetilde{\mathcal{L}}^{\otimes(k-1)}\right) - (-1)^n P_1(k) \\
&= (-1)^n \dim S_k(\Gamma) - (-1)^n P_1(k) \qquad (1.5\text{ の消滅定理})
\end{aligned}
$$

□

**注意 1.2**　系 1.2 の中の $P_1$ は $n'$ 次であろう, と予想されている.

## 1.5　消滅定理

1953 年に Kodaira は次の定理を証明した：

**定理 1.4** (Kodaira)　$X$ を $n$ 次元コンパクト Kähler 多様体, $\Omega^n_X$ を $X$ の $n$ 次微分形式の層, $F$ を $X$ 上の正の直線バンドルとするとき,

$$H^p(X, \Omega^n_X \otimes \mathcal{O}(F)) = 0 \qquad (p > 0).$$

ここで, $F$ が曲率形式が正であるような計量をもつとき, 正であると呼ばれている. $X$ がコンパクト複素多様体のとき, $F$ が正であることと $F$ が ample であることは同値である. 2 年後にこの定理は Nakano によって, $F$ が正のベクトル · バンドルの場合へ一般化された.

**例 1.11**　$X = \mathbb{P}^n$ とする. そのとき (i) $0 < p < n$, (ii) $p = 0,\ m < 0$, (iii) $p = n,\ m > -n-1$ のいずれかをみたすとき, $H^p(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)) = 0$. 実際, (i) の場合はよく知られている（cf. Hartshorne の本）. $\Omega^n_{\mathbb{P}^n} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1)$ であるから, $H^p(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)) = H^p(\mathbb{P}^n, \Omega^n_{\mathbb{P}^n} \otimes \mathcal{O}(m+n+1))$. ここで, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m+n+1)$ は ample $\Leftrightarrow\ m+n+1 > 0$ であるから, Kodaira の消滅定理より $p > 0,\ m > -n-1$ のとき, $H^p(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)) = 0$. 故に (iii) の場合が成立する. Serre duality より, $H^p(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)) = H^{n-p}(\mathbb{P}^n, \Omega^n_{\mathbb{P}^n} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-m))$ となる. よって, Kodaira の消滅定理より $n > p,\ -m > 0$ のとき, $H^{n-p}(\mathbb{P}^n, \Omega^n_{\mathbb{P}^n} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-m)) = 0$ となり, (ii) の場合も成り立つ.

1970 年に Kodaira の消滅定理は複素解析空間へ一般化された. $n$ 次元既約コンパクト複素空間は, $n$ 個の代数的に独立な有理型関数をもつとき, Moishezon 空間と呼ばれる.

**定理 1.5** (Grauert-Riemenschneider) $X$ は $n$ 次元 Moishezon 空間で, $V$ を $X$ 上の正のベクトル · バンドルとすると

$$H^p(X, \Omega_X^n \otimes \mathcal{O}(V)) = 0 \qquad (p > 0).$$

証明の中で本質的に次の定理が証明されている.

**定理 1.6** $\pi : \widehat{X} \to X$ を $n$ 次元 Moishezon 空間 $X$ の特異点解消とし, $V$ を $X$ 上の正のベクトル · バンドルとすると

$$R^p\pi_*(\Omega_{\widehat{X}}^n \otimes \mathcal{O}(\pi^*(V))) = 0 \qquad (p > 0).$$

$Y$ を $\mathbb{C}$ 上の normal projective variety とし, $\pi : X \to Y$ を特異点の resolution とする. $K$ は $X$ の canonical bundle で, $L$ は $Y$ 上の ample な line bundle とする. ample なら正であることが知られているから, 上記の定理より次が従う.

**定理 1.7** $H^p(X, \mathcal{O}(K + \pi^*L)) = 0 \qquad (p > 0).$

1980 年代になって, Kawamata と Viehweg は $X$ がコンパクト複素多様体の場合に, Kodaira の消滅定理における $F$ の ample の条件を弱めることができた. 彼らは独立に同値な結果を得たのである.

これまでに出てきた Riemann-Roch-Hirzebruch の定理, 消滅定理, と Serre の双対定理の 3 定理は, 代数幾何学において頻繁に使われている.

## 1.6 正則 Lefschetz 公式

$X$ はコンパクト複素多様体で, $V$ は $X$ 上の正則ベクトル · バンドルとする. $G$ を $(X, V)$ の自己同型からなる有限群とする. $g \in G$ に対して, $X^g$ を $g$ の固定点集合とする. $X^g$ を既約分解しておく : $X^g = \bigcup_\alpha X_\alpha^g$. $N_\alpha^g = \sum_\theta N_\alpha^g(\theta)$ を $X_\alpha^g$ の normal bundle とする. $N_\alpha^g(\theta)$ 上では, $g$ の固有値は $e^{i\theta}$ とする. $N_\alpha^g(\theta)$ の total Chern class が $c(N_\alpha^g(\theta)) = \prod_\beta(1 + \beta)$ のとき,

$$\mathcal{U}(N_\alpha^g(\theta)) = \prod_\beta \left(\frac{1 - e^{-x_\beta - i\theta}}{1 - e^{-i\theta}}\right)^{-1}$$

とおく. $\mathcal{T}(X_\alpha^g)$ は $X_\alpha^g$ の Todd class で, $\mathrm{ch}(V|X_\alpha^g)(g)$ は $V|X_\alpha^g$ の $g$-作用付きの Chern character とする. ここで, $\mathrm{ch}(V|X_\alpha^g)(g)$ は次のように定義される : $K(X_\alpha^g)$ を $X_\alpha^g$ の Grothendieck 群, $R(G)$ を $G$ の複素表現環とすると, $V|X_\alpha^g$ は

$$V|X_\alpha^g = \sum_i a_i \otimes \chi_i \qquad (a_i \in K(X_\alpha^g),\ \chi_i \in R(G))$$

と表せる．このとき

$$\mathrm{ch}(V|X_\alpha^g)(g) = \sum_i \chi_i(g)\mathrm{ch}(a_i) \quad \in H^*(X_\alpha^g, \mathbb{C})$$

と定義する．一般の場合も同様に定義される．例えば, $g$ は $N_\alpha^g(\theta)$ へ $e^{i\theta}$ によって作用するから, $\mathrm{ch}(N_\alpha^g(\theta))(g) = e^{i\theta} \cdot \mathrm{ch}(N_\alpha^g(\theta))$ となる．以上の記号を使って

$$\tau(g, X_\alpha^g) = \left\{ \frac{\mathrm{ch}(V|X_\alpha^g)(g) \cdot \prod_\theta \mathcal{U}^\theta(N_\alpha^g(\theta)) \cdot \mathcal{T}(X_\alpha^g)}{\det(1 - g|(N_\alpha^g)^*)} \right\} [X_\alpha^g]$$

とおき, さらに $\tau(g) = \sum_\alpha \tau(g, X_\alpha^g)$ とおく．次は, Atiyah-Singer による定理である．

**定理 1.8** （正則 Lefschetz 定理 [A-S]）

$$\sum_{p \geq 0} (-1)^p \mathrm{tr}(g|H^p(X, \mathcal{O}(V)) = \tau(g).$$

定理において $g = 1$ とおくと, 定理 1.1 の結果になるから, 正則 Lefschetz 公式は Riemann-Roch-Hirzebruch の定理の一般化である．

$H^p(X, \mathcal{O}(V))^G$ を $H^p(X, \mathcal{O}(V))$ の $G$ 不変な部分空間とする．正則 Lefschetz 定理から次の定理が従う．

**定理 1.9**

$$\sum_{p \geq 0} (-1)^p \dim H^p(X, \mathcal{O}(V))^G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \tau(g).$$

証明. 上の定理より,

$$\dim H^p(X, \mathcal{O}(V))^G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \mathrm{tr}(g|H^p(X, \mathcal{O}(V)))$$

を示せば十分である．簡単のため, $V = H^p(X, \mathcal{O}(V))$ とおく．$i : V^G \to V$ を包含写像とし, $f : V \to V$ を $f(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} gv$ によって定義される写像とする．すると $f$ の像は $V^G$ に含まれ, $f$ は $f = i \circ \pi$, $\pi : V \to V^G$ と分解する．$v \in V^G$ ならば, $f(v) = v$ ゆえ, $\pi \circ i = \mathrm{id}_{V^G}$．よって

$$\dim V^G = \mathrm{tr}(\mathrm{id}_{V^G}) = \mathrm{tr}(\pi \circ i) = \mathrm{tr}(i \circ \pi) = \mathrm{tr}(f).$$

□

## 1.7 参考文献


[A] A. Ash, et al., Smooth Compactification of Locally Symmetric Varieties, Math. Sci. Press, Brookline 1975.

[A-S] M. F. Atiyah and I. M. Singer, The index of elliptic operators. III, Ann. of Math., **87** (1968), 546-604.

[G-R] H. Grauert and O. Riemenschneider, Verschwindungssätze für analytische Kohomologiegruppen auf komplexen Räumen, Invent. math., **11** (1970), 263-292.

[H] F. Hirzebruch, Topological Methods in Algebraic Geometry, Springer-Verlag 1956.

[H-Z] F. Hirzebruch and D. Zagier, The Atiyah-Singer Theorem and Elementary Number Theory, Publish or Perish, Inc. 1974.

[K] Y. Kawamata, A generalization of Kodaira-Ramanujam's vanishing theorem, Math. Ann., **261** (1982), 43-46.

[M-S] J. W. Milnor and J. D. Stasheff, Characteristic Classes, Ann. Math. Studies **76**, Princeton Univ. Press, 1974.

[M] D. Mumford, Hirzebruch's proportionality theorem in the non-compact case, Invent. math., **42** (1977), 239-272.

[N] S. Nakano, On compact analytic vector bundles, J. Math. Soc. Japan, **7** (1955), 1-12.

[Na] Y. Namikawa, On dimension formula of cusp forms, In: "Algebraic and Topological Theories − to the memory of Dr. Takehiko MIYATA", 1985, pp. 648-660.

[S] I. Satake, On numerical invariants of arithmetic varieties of $\mathbb{Q}$-rank one, In: "Automorphic Forms of Several Variables, Taniguchi Symposium, Katata, 1983", Birkhäuser, 1984, pp. 353-369.

[V] E. Viehweg, Vanishing theorems, J. reine angew. math., **335** (1982), 1-8.

# 2 Siegel保型形式の次元公式 (due to R. Tsushima)

主な記号

$\mathfrak{S}_g$: $g$ 次 Siegel 上半平面

$\Gamma_g(l)$: Siegel modular 群 $Sp_g(\mathbb{Z})$ の level $l$ $(l \geq 3)$ の主合同部分群

$\mathfrak{S}_g^*(l) = \Gamma_g(l) \setminus \mathfrak{S}_g$

$\overline{\mathfrak{S}}_g^*(l)$: $\mathfrak{S}_g^*(l)$ の Satake コンパクト化

$\widetilde{\mathfrak{S}}_g^*(l)$: $\mathfrak{S}_g^*(l)$ の Voronoi コンパクト化

$\Delta(g) = \widetilde{\mathfrak{S}}_g^*(l) - \mathfrak{S}_g^*(l)$

$s : \widetilde{\mathfrak{S}}_g^*(l) \to \overline{\mathfrak{S}}_g^*(l)$: $\mathfrak{S}_g^*(l)$ 上で恒等射になるような自然な morphism

$S_k(\Gamma_g(l))$: $\Gamma_g(l)$ に関する weight $k$ の Siegel cusp forms の空間

## 2.1 文献と主結果

この節では対馬龍司氏による Siegel 保型形式の次元公式を解説する. 紹介するのは次の 2 本の論文である.

[T1] A formula for the dimension of spaces of Siegel cusp forms of degree three, Amer. J. Math., **102** (1980), 937-977,

[T2] On the spaces of Siegel cusp forms of degree two, Amer. J. Math., **104** (1982), 843-885.

主結果は次の 2 定理である.

**定理 2.1** (1) $n = 3,\ k \geq 5,\ l \geq 3$ のとき,

$$\begin{aligned}\dim S_k(\Gamma_3(l)) \quad = \quad & (2^{-16}3^{-6}5^{-2}7^{-1}l^{21}(2k-2)(2k-3)(2k-4)^2(2k-5)(2k-6) \\ & -2^{-10}3^{-2}5^{-1}l^{16}(2k-4) + 2^{-8}3^{-3}l^{15}) \prod_{\substack{p|l,\\ p:\text{素数}}} (1-p^{-2})(1-p^{-4})(1-p^{-6}).\end{aligned}$$

*(2)* $n = 2,\ k \geq 4,\ l \geq 3$ のとき,

$$\begin{aligned}\dim S_k(\Gamma_2(l)) \quad = \quad & (2^{-10}3^{-3}5^{-1}l^{10}(2k-2)(2k-3)(2k-4) - 2^{-6}3^{-2}l^8(2k-3) \\ & +2^{-5}3^{-1}l^7) \prod_{p|l}(1-p^{-2})(1-p^{-4}).\end{aligned}$$

**定理 2.2** $S_k(\Gamma_2(1)),\ S_K(\Gamma_2(2))$ の次元は正則 Lefschetz 公式を使って計算できる.

## 2.2 Voronoi コンパクト化

toroidal コンパクト化で幾何的に意味のあるもの, すなわち, コンパクト化の各点に対してある幾何的対象が自然に対応しているもの, をここでは扱う. Voronoi による 2 次形式の reduction theory が大きな役割を果たすためにそのコンパクト化は Voronoi コンパクト化と呼ばれている.

### 2.2.1 Torus embeddings

$T$ を $n$ 次元複素トーラスとする : $T = (\mathbb{C}^*)^n$.

**定義 2.1** (1) $T$ の torus embedding とは代数多様体 $X$ で

- $X$ は $T$ を Zariski open dense subset として含む.
- $T$ は $X$ に作用していて, 平行移動による $T$ の $T$ 自身への作用を延長したものになっている.

をみたすもののことをいう. 特に, $X$ が affine のとき affine torus embedding という.

*(2)* $T$ の torus embedding $X,\ X'$ の間の morphism とは写像 $f : X \to X'$ で次の図式が可換であるようなもののことをいう :

$$\begin{array}{ccccc} f & : & X & \to & X' \\ & & & \nwarrow \quad \nearrow & \\ & & & T & \end{array}$$

**注意 2.1** torus embedding, affine torus embedding をそれぞれ toric variety, affine toric variety と呼ぶことがある.

**例 2.1** $T = (\mathbb{C}^*)^n$ とおく.

$$T \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n, \quad ((a_1, \dots, a_n), (z_1, \dots, z_n)) \mapsto (a_1 z_1, \dots, a_n z_n)$$

によって, $T$ は $\mathbb{C}^n$ に作用する. このとき, $\mathbb{C}^n$ は $T$ の affine torus embedding である.

torus embedding を組合せ論的に記述しよう．scheme として
$T = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[T_1, T_1^{-1}, \ldots, T_n, T_n^{-1}])$ である．$M = \mathrm{Hom}(T, \mathbb{C}^*)$, $N = \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^*, T)$ とおく．$M$ は $T$ の指標群で

$$M \cong \mathbb{Z}^n = \{r = (r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{Z}^n \mid \chi^r : T \to \mathbb{C}^*\}$$

である．ただし, $\chi^r(t_1, \ldots, t_n) = t_1^{r_1} \cdots t_n^{r_n}$ である．$N$ は $T$ の 1-パラメータ部分群のなす群で,

$$T \cong \mathbb{Z}^n = \{a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n \mid \lambda_a : \mathbb{C}^* \to T\}$$

である．ただし, $\lambda_a(t) = (t^{a_1}, \ldots, t^{a_n})$ である．よって $M$, $N$ は自由 $\mathbb{Z}$-加群である．$M$ と $N$ は pairing

$$(\ ,\ ) : M \times N \to \mathbb{Z}, \quad (r, a) = \sum_{i=1}^{n} r_i a_i$$

によって互いに dual である．この pairing を使うと

$$\chi^r(\lambda_a(t)) = t^{(r,a)} \qquad (r \in M,\ a \in N,\ t \in \mathbb{C}^*)$$

と書ける．$N_{\mathbb{R}} := N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, $M_{\mathbb{R}} := M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ とおくと, 標準的な $\mathbb{R}$-双線形な pairing $(\ ,\ ) : M_{\mathbb{R}} \times N_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ を得る．

**定義 2.2** $N_{\mathbb{R}}$ の部分集合 $\sigma$ は次の 2 条件をみたすとき, strongly convex rational polyhedral cone という：

- $N$ の有限個の元 $n_1, \ldots, n_s$ が存在して

$$\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0} n_1 + \cdots + \mathbb{R}_{\geq 0} n_s.$$

- $\sigma$ は原点を通る直線を含まない.

$M$ の元 $\chi$ を任意にとる．$\chi(t_1, \ldots, t_n) = t_1^{r_1} \cdots t_n^{r_n}$ のとき, $\chi$ と $\prod_{i=1}^{n} T_i^{r_i}$ とを同一視する．ただし, $T_1, \ldots, T_n$ は不定元とする．$M$ の部分半群 $S$ で 0 を含むものに対して, $\mathbb{C}[S] = \mathbb{C}[\chi]_{\chi \in S}$ は $\mathbb{C}[M] = \mathbb{C}[T_1, T_1^{-1}, \ldots, T_n, T_n^{-1}]$ の部分環である．$\widehat{\sigma} = \{r \in M_{\mathbb{R}} \mid\ < r, a > \geq 0 \quad (\forall a \in \sigma)\}$ を $\sigma$ の dual と呼ぶ. $\widehat{\sigma} \cap M$ は $M$ の部分半群で 0 を含むから, $\mathbb{C}[\widehat{\sigma} \cap M]$ は $\mathbb{C}[M]$ の部分環である. $X_\sigma = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[\widehat{\sigma} \cap M])$ とおくと, $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[M]) \subset \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[\widehat{\sigma} \cap M])$ により, $X_\sigma$ は $T$ の affine normal torus embedding である.

$\tau$ を strongly convex rational polyhedral cone $\sigma$ の部分集合とする．ある $m_0 \in \widehat{\sigma}$ があって, $\tau = \sigma \cap m_0^{\perp} = \{y \in \sigma \mid (m_0, y) = 0\}$ と表せるとき, $\tau$ を $\sigma$ の face といい, $\tau \prec \sigma$ と書く.

**定義 2.3**　$N_{\mathbb{R}}$ の fan （または rational partial polyhedral decomposition, 略して r.p.p. decomposition）とは $N_{\mathbb{R}}$ の strictly convex rational polyhedral cone からなる族 $\Sigma = \{\sigma_i\}$ で

(i)　$\sigma \in \Sigma, \tau \prec \sigma \Rightarrow \tau \in \Sigma,$

(ii)　$\sigma_i,\ \sigma_j \in \Sigma \Rightarrow \sigma_i \cap \sigma_j \prec \sigma_i,\ \sigma_i \cap \sigma_j \prec \sigma_j$

をみたすもののことをいう. $|\Sigma| := \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \sigma$ を $\Sigma$ の support という.

$\Sigma$ を $N_{\mathbb{R}}$ の r.p.p. decomposition とする. $\sigma,\ \tau \in \Sigma$ が $\tau \prec \sigma$ をみたせば, $T$ 上の恒等写像を延長する open immersion $X_\tau \to X_\sigma$ が存在する. 詳しく言えば, $\tau = \sigma \cap m_0^\perp$ となる $m_0 \in \widehat{\sigma}$ をとると, $X_\tau = \{x \in X_\sigma \mid m_0(x) \neq 0\}$ となり, $X_\tau$ は $X_\sigma$ の principal open subset である. よって $X_\sigma$　$(\sigma \in \Sigma)$ たちを貼り合わせて $T$ の torus embedding $X_\Sigma = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} X_\sigma$ が得られる.

$X_\Sigma$ について次のことが知られている：

(1)　$X_\Sigma$ は smooth　$\Leftrightarrow$　各 $\sigma \in \Sigma$ は $N$ の基底の一部によって生成される.

(2)　$X_\Sigma$ はコンパクト　$\Leftrightarrow$　$|\Sigma| = N_{\mathbb{R}}$

### 2.2.2　Toroidal コンパクト化

ここでは Siegel 空間の場合の toroidal コンパクト化を構成する.

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{S}_g &= \{\tau \in M_g(\mathbb{C}) \mid {}^t\tau = \tau,\ \mathrm{Im}(\tau) > 0\} \\
G &= Sp_g(\mathbb{R}) \\
\Gamma_g(l) &= \{M \in Sp_g(\mathbb{Z}) \mid M \equiv 1_{2g} \pmod{l}\} \quad (l \geq 3)
\end{aligned}
$$

とおく. $l$ を固定して, 簡単のため $\Gamma = \Gamma_g(l)$ とおく. $G$ は $\mathfrak{S}_g$ へ

$$
M \cdot \tau = (A\tau + B)(C\tau + D)^{-1}, \qquad M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in G,\ \tau \in \mathfrak{S}_g
$$

によって推移的に作用する. $\sqrt{-1}1_g$ の isotropy subgroup を $K$ と書くと, $K$ は $G$ の maximal compact subgroup で, $\mathfrak{S}_g = G/K$ となる.

$\mathfrak{S}_g$ は Cayley 変換

$$
\begin{aligned}
c \ : \ & \mathfrak{S}_g \widetilde{\rightarrow} \mathfrak{D}_g = \{ Z \in M_g(\mathbb{C}) \mid {}^tZ = Z,\ {}^tZ\overline{Z} < 1_g \}, \\
& \tau \mapsto Z = (\tau - \sqrt{-1}1_g)(\tau + \sqrt{-1}1_g)^{-1} \\
& c^{-1}(Z) = \sqrt{-1}(Z + 1_g)(-Z + 1_g)^{-1}
\end{aligned}
$$

によって有界対称領域として実現される. $G$ は $\mathfrak{D}_g$ へ

$$
\begin{aligned}
M \cdot Z \ = \ & \big( (A - \sqrt{-1}C)(Z + 1_g) + (B - \sqrt{-1}D)\sqrt{-1}(Z - 1_g) \big) \\
& \cdot \big( (A + \sqrt{-1}C)(Z + 1_g) + (B + \sqrt{-1}D)\sqrt{-1}(Z - 1_g) \big)^{-1} \\
& \text{for} \quad M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in G,\ Z \in \mathfrak{D}_g
\end{aligned}
$$

によって作用する.

$$
\overline{\mathfrak{D}_g} = \{ Z \in M_g(\mathbb{C}) \mid {}^tZ = Z,\ {}^tZZ \leq 1_g \}
$$

とする. $p,\ q \in \overline{\mathfrak{D}_g}$ に対して, 次の条件が成立するならば, $p \sim q$ と書く: 正則写像

$$
\alpha_i : \mathfrak{D}_1 = \{ Z \in \mathbb{C} \mid |Z| < 1 \} \to \overline{\mathfrak{D}_g} \qquad (i = 1, \ldots, m)
$$

が存在して, $\alpha_1(0) = p,\ \alpha_m(0) = q,\ \alpha_i(\mathfrak{D}_1) \cap \alpha_{i+1}(\mathfrak{D}_1) \neq \phi$. 関係 $\sim$ は $\overline{\mathfrak{D}_g}$ 上の同値関係である. $\sim$ による各同値類を, $\mathfrak{S}_g$ の boundary component と呼ぶ. $G$ の $\mathfrak{D}_g$ への作用は $\overline{\mathfrak{D}_g}$ 上に自然に延長される. 次のことが成立する：

- $0 \leq g' \leq g$ のとき,

  $$
  F_{g'} = \left\{ \begin{pmatrix} Z' & 0 \\ 0 & 1_{g-g'} \end{pmatrix} \mid Z' \in \mathfrak{S}_{g'} \right\}
  $$

  は $\mathfrak{S}_g$ の boundary component である.

- 任意の boundary component は, $M \cdot F_{g'}$ $(\exists M \in G,\ 0 \leq \exists g' \leq g)$ という形である.

$F = M \cdot F_{g'}$ $(M \in Sp_{g'}(\mathbb{Q}))$ という形の boundary component を rational boundary component という.

$$
F \text{ が rational} \quad \Leftrightarrow \quad F = M \cdot F_{g'} \quad (\exists M \in Sp_g(\mathbb{Z}),\ 0 \leq \exists g' \leq g)
$$

が成立する.

$g'' = g - g'$ とおく. $\mathfrak{S}_g$ の boundary component $F$ に対して, $P(F) = \{M \in G \mid M \cdot F = F\}$, $W(F)$ は $P(F)$ の unipotent radical, $U(F)$ は $W(F)$ の center, $V(F) = W(F)/U(F)$（$V(F)$ はベクトル群になる）, $C(F)$ を $U(F)$ の中の self dual cone とする. ここに, self dual cone とは次のような cone のことである. $U(F)^*$ を $U(F)$ の双対空間, $<\ ,\ >: U(F)^* \times U(F) \to \mathbb{R}$ を双線形形式とする. $C$ の dual cone $C^*$ を $C^* = \{x^* \in U(F)^* \mid\ < x^*, x >> 0\ (\forall x \in \overline{C(F)} - \{0\})\ \}$ によって定義する. 線形同型 $f : U(F) \to U(F)^*$ が存在して, $f(C) = C^*$ をみたすとき, $C$ は self dual という. さて, $F' = M \cdot F$ のとき, $P(F') = M \cdot P(F) \cdot M^{-1}$ ゆえ, $F_{g'}$ に対してこれらの群の構造を調べれば十分である. $F_{g'}$ に対して, $P(F_{g'})$, $W(F_{g'})$, $U(F_{g'})$, $V(F_{g'})$ は次のように書ける：

$$\begin{aligned}
P(F_{g'}) &= \left\{ \begin{pmatrix} A' & 0 & B' & * \\ * & u & * & * \\ C' & 0 & D' & * \\ 0 & 0 & 0 & {}^t u^{-1} \end{pmatrix} \in Sp(g, \mathbb{R}) \mid \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} \in Sp(g', \mathbb{Z}),\ \ u \in GL(g'', \mathbb{R}) \right\} \\
W(F_{g'}) &= \left\{ \begin{pmatrix} 1_{g'} & 0 & 0 & n \\ {}^t m & 1_{g''} & {}^t n & b \\ 0 & 0 & 1_{g'} & -n \\ 0 & 0 & 0 & 1_{g''} \end{pmatrix} \in P(F_{g'}) \mid {}^t nm + b = {}^t mn + {}^t b \right\} \\
U(F_{g'}) &= \left\{ \begin{pmatrix} 1_{g'} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_{g''} & 0 & b \\ 0 & 0 & 1_{g'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_{g''} \end{pmatrix} \in W(F_{g'}) \mid {}^t b = b \right\} \\
V(F_{g'}) &= W(F_{g'})/U(F_{g'}) \cong \{E + \sqrt{-1}H \mid E,\ H \in M(g, g'; \mathbb{R})\}
\end{aligned}$$

となる.

$S(F) = U(F)_{\mathbb{C}} \cdot \mathfrak{S}_g$ とおくと, $S(F) \subset \mathfrak{S}_g^{\vee}$（$\mathfrak{S}_g$ の compact dual）. $F = F_{g'}$ のとき, $U(F_{g'})_{\mathbb{C}} \cong \mathrm{Sym}_{g''}(\mathbb{C}) := \{g''$次対称 $\mathbb{C}$-行列全体$\}$ であり,

$$S(F_{g'}) = \left\{ \tau = \begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ {}^t\tau_2 & \tau_3 \end{pmatrix} \in M_g(\mathbb{C}) \mid \tau_1 \in \mathfrak{S}_{g'},\ \tau_3 \in \mathrm{Sym}_{g''}(\mathbb{C}) \right\}$$

となる. 各 $F$ に対して, 正則同型 $S(F) \simeq F \times V(F) \times U(F)_{\mathbb{C}}$ があり, $F = F_{g'}$ の場合には

$$S(F_{g'}) \simeq F_{g'} \times V(F_{g'}) \times U(F_{g'})_{\mathbb{C}}, \quad \begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ {}^t\tau_2 & \tau_3 \end{pmatrix} \quad \leftrightarrow \quad (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$$

という対応がある. 自然な埋め込みにより, $\mathfrak{S}_g$ は

$$J(\tau) = \mathrm{Im}\tau_3 - {}^t(\mathrm{Im}\tau_2)(\mathrm{Im}\tau_1)^{-1}(\mathrm{Im}\tau_2) > 0$$

をみたす $\tau = \begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ {}^t\tau_2 & \tau_3 \end{pmatrix} \in S(F_{g'})$ 全体として特徴付けられる. これを第 3 種 Siegel 領域としての Piatetski-Shapiro realization という. $C(F_{g'}) = \{J \in \mathrm{Sym}_{g''}(\mathbb{R}) \mid J > 0\}$ となり, $C(F_{g'}) \subset U(F_{g'})$ である. $\Phi : S(F_{g'}) \to U(F_{g'}),\ \ \tau \mapsto J(\tau)$ と定めると, $\mathfrak{S}_g = \Phi^{-1}(C(F_{g'}))$ が成立する. $P(F_{g'})$ の 2 つの部分群を次のように定義する：

$$\begin{aligned}
G_h(F_{g'}) &= \left\{ \begin{pmatrix} A' & 0 & B' & 0 \\ 0 & 1_{g''} & 0 & 0 \\ C' & 0 & D' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_{g''} \end{pmatrix} \in P(F_{g'}) \mid \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} \in Sp(g', \mathbb{Z}) \right\} \\
&\cong \mathrm{Aut}(F_{g'}) \\
G_l(F_{g'}) &= \left\{ \begin{pmatrix} 1_{g'} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_{g'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & {}^tu^{-1} \end{pmatrix} \in P(F_{g'}) \mid u \in GL(g'', \mathbb{R}) \right\}.
\end{aligned}$$

$G_l(F_{g'})$ は $U(F_{g'})$ へ $u(J) = u \cdot J \cdot {}^tu,\ \ (u \in G_l(F_{g'}),\ J \in U(F_{g'}))$ によって作用する. $\mathrm{Aut}(U(F_{g'}), C(F_{g'}))$ を, $U(F_{g'})$ の自己同型で $C(F_{g'})$ を保つもの全体とすると, $G_l(F_{g'}) = \mathrm{Aut}(U(F_{g'}), C(F_{g'}))$ となる. また, 射影

$$p_l : P(F_{g'}) \to G_l(F_{g'}), \quad \begin{pmatrix} A' & 0 & B' & * \\ * & u & * & * \\ C' & 0 & D' & * \\ 0 & 0 & 0 & {}^tu^{-1} \end{pmatrix} \mapsto u$$

$$p_h : P(F_{g'}) \to G_h(F_{g'}), \quad \begin{pmatrix} A' & 0 & B' & * \\ * & u & * & * \\ C' & 0 & D' & * \\ 0 & 0 & 0 & {}^tu^{-1} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$$

によって, $P(F_{g'}) = (G_h(F_{g'}) \times G_l(F_{g'})) \cdot W(F_{g'})$ となる. $P(F_{g'})$ は $\mathfrak{S}_g$ へ半線形変換

$$(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \mapsto (g(\tau_1), B(\tau_1)\tau_2 + b(\tau_1), A(\tau_3) + a(\tau_1, \tau_2))$$

によって作用する．ここに，$g(\tau_1)$ は，$p_h$ によって induce される $F_{g'}$ への作用，$A(\tau_3)$ は $p_l$ によって induce される $U(F_{g'})_{\mathbb{C}}$ への作用，$B(\tau_1)$ は行列，$a(\tau_1, \tau_2)$，$b(\tau_1)$ はベクトルである．

$\Gamma(F) = \Gamma \cap U(F)$ とおく．$\overline{\Gamma}(F) = p_l(\Gamma(F))$ とおくと，$\overline{\Gamma}(F) \subset G_l(F)$. $L(F) = \Gamma \cap U(F)$ とおくと，$L(F)$ は $U(F)$ の lattice である．（2.2.1 の記号を使うと，$U(F)$ は $N_{\mathbb{R}}$ に，$L(F)$ は $N$ に対応している）．$\overline{\Gamma}(F)$ は $\mathrm{Aut}(U(F), C(F))$ の arithmetic subgroup である．

$X = \Gamma \setminus \mathfrak{S}_g$ の toroidal コンパクト化は次の $\Gamma$-admissible family を使って構成される．

**定義 2.4** polyhedral decomposition の $\Gamma$-admissible family とは次の 3 条件をみたす polyhedral decomposition の族 $\Sigma = \{\Sigma_F\}_{F:\mathrm{rational}}$ のことをいう：

(1) 任意の $F$ に対して，$\Sigma_F$ は $C(F)$ の $\overline{\Gamma}(F)$-admissible polyhedral decomposition である．すなわち，

  (i) 各 $\sigma_i^F \in \Sigma_F$ は $\overline{C}(F)$（$C(F)$ の rational closure）の中の strictly convex rational polyhedral cone

  (ii) $\sigma_i^F \in \Sigma_F,\ \sigma \prec \sigma_i^F \Rightarrow \sigma \in \Sigma_F$

  (iii) $\sigma_i^F,\ \sigma_j^F \in \Sigma_F \Rightarrow \sigma_i^F \cap \sigma_j^F \prec \sigma_i^F,\ \sigma_j^F$

  (iv) $\gamma \in \overline{\Gamma}(F),\ \sigma_i^F \in \Sigma_F \Rightarrow \gamma \cdot \sigma_i^F \in \Sigma_F$

  (v) $\#\Sigma_F \bmod \overline{\Gamma}(F)$ は有限集合

  (vi) $C(F) \subset \bigcup_i \sigma_i^F$

(2) $\gamma \in \Gamma$ に対して，$F_1 = \gamma \cdot F_2$ ならば，$\Sigma_{F_1} = \gamma \cdot \Sigma_2$.

(3) $F_1 \subset \overline{F_2} \Rightarrow\ \Sigma_{F_2} = \Sigma_{F_1} | U(F_2)$.

定義より，$\Gamma$-admissible family は $C(F_0)$ の $\overline{\Gamma}(F_0)$-admissible polyhedral decomposition によって定まる．$C(F_0) = \mathfrak{Y}_g^+$ で $\overline{\Gamma}(F_0) = \{u \in GL(g, \mathbb{Z}) \mid u \equiv 1_g \pmod{l}\}$ であるから，$\mathfrak{Y}_g^+$ の $GL(g, \mathbb{Z})$-admissible decomposition を見つければ十分である．

**部分コンパクト化** $S(F) \simeq F \times V(F) \times U(F)_{\mathbb{C}},\ S(F)' := S(F)/U(F)_{\mathbb{C}} \simeq F \times V(F)$ であって，自然な写像 $\Pi'_F : S(F) \to S(F)'$ によって，$S(F)$ は $S(F)'$ 上の principal $U(F)_{\mathbb{C}}$-bundle になる．$T(F) := L(F) \setminus U(F)_{\mathbb{C}}$ は algebraic torus である．$L(F) \setminus S(F) \simeq F \times V(F) \times T(F) \to S(F)'$ となるが，最後に出てきた写像によって $L(F) \setminus S(F)$ は $T(F)$ を fibre とする principal bundle とな

る．$T(F)$ は torus であるから, $\Sigma_F$ を使った torus embedding $T(F) \subset X_{\Sigma_F}$ が存在する．$(L(F) \setminus S(F))_{\Sigma_F} = (L(F) \setminus S(F)) \times_{T(F)} X_{\Sigma_F}$ とおく．すると, $(L(F) \setminus S(F))_{\Sigma_F}$ は $X_{\Sigma_F}$ を fibre とする $S(F)'$ 上の fibre bundle である．$\mathfrak{S}_g \subset S(F)$ ゆえ, $L(F) \setminus \mathfrak{S}_g \subset (L(F) \setminus S(F))_{\Sigma_F}$ である．$L(F) \setminus \mathfrak{S}_g$ の $(L(F) \setminus S(F))_{\Sigma_F}$ における閉包の内部を $(L(F) \setminus \mathfrak{S}_g)_{X_{\Sigma_F}}$ と書く．これを, $\Sigma_F$ によって定義される方向 $F$ に関する $\Gamma \setminus \mathfrak{S}_g$ の部分コンパクト化という.

$F = F_{g'}$ の場合には次のようになる

$\mathfrak{T}_{g''}$: $g''$ 次複素対称行列で成分がすべて 0 でないもの全体のなす集合

$\mathfrak{Z}_{g',g''}$ : $(g', g'')$ 型複素行列のなすベクトル空間

$P_{g''}(l) = P(F) \cap \Gamma_g(l), \quad U_{g''}(l) = U(F) \cap \Gamma_g(l)$

このとき, 写像

$$e : \mathfrak{S}_g \to \mathfrak{T}_{g,g''} := \mathfrak{S}_{g'} \times \mathfrak{Z}_{g',g''} \times \mathfrak{T}_{g''}, \quad \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & z_3 \end{pmatrix} \to (z_1, z_2, \mathbf{e}(z_3/l))$$

は $U_{g''}(l) \setminus \mathfrak{S}_g$ から $\mathfrak{T}_{g,g''}$ のある開集合 $\mathfrak{T}^{\circ}_{g,g''}$ の上への isomorphism をひきおこす．$\overline{\Gamma}(F)$-admissible decomposition $\Sigma_F$ は torus embedding $\mathfrak{T}_{g''} \subset \mathfrak{X}_{g''}$ を定める．$\mathfrak{X}_{g,g''} := \mathfrak{S}_{g'} \times \mathfrak{Z}_{g',g''} \times \mathfrak{X}_{g''}$ の中の $\mathfrak{T}^{\circ}_{g,g''}$ の閉包の内部を $\mathfrak{X}^{\circ}_{g,g''}$ と書く．これが $(L(F_{g'}) \setminus \mathfrak{S}_g)_{\Sigma_{F_{g'}}}$ である.

**貼り合わせ**　$\Gamma$-admissible family の定義と部分コンパクト化の作り方から次のことが分かる.

(1)　$F_1 \subset \overline{F_2}$ ならば, $U(F_1) \supset U(F_2)$, $\Sigma_{F_2} = \Sigma_{F_1}|U(F_2)$ で, 自然な写像 $L(F_2) \setminus \mathfrak{S}_g \to L(F_1) \setminus \mathfrak{S}_g$, $X_{\Sigma_{F_2}} \to X_{\Sigma_{F_1}}$ がある．これより, étale 写像

$$\Pi_{1,2} : (L(F_2) \setminus \mathfrak{S}_g)_{\Sigma_{F_2}} \to (L(F_1) \setminus \mathfrak{S}_g)_{\Sigma_{F_1}}$$

が得られる.

(2)　$F_2 = \gamma \cdot F_1$　$(\exists \gamma \in \Gamma)$ のとき, $\gamma$ は同型

$$\begin{array}{rcl} \gamma : U(F_1) & \to & U(F_2), \quad g \mapsto \gamma g \gamma^{-1} \\ \cup & & \cup \\ L(F_1) & \to & L(F_2) \end{array}$$

をひきおこし, $C(F_1)$ に制限すると, $\gamma|C(F_1) : C(F_1) \to C(F_2)$ を得る．また, $\Sigma_{F_2} = \gamma \cdot \Sigma_{F_1}$ が成立する．よって, $\gamma$ の $\mathfrak{S}_g$ への作用は, 同型 $\gamma : (L(F_1) \setminus \mathfrak{S}_g)_{\Sigma_{F_1}} \to$

$(L(F_2) \setminus \mathfrak{S}_g)_{\Sigma_{F_2}}$ を induce する.

$$(\Gamma \setminus \mathfrak{S}_g)^{\#} = \bigcup_{F:\text{rational}} (L(F) \setminus \mathfrak{S}_g)_{\Sigma_F}$$

とおく. この集合の上に, 次のようにして同値関係を定義する. $X_1, X_2 \in (\Gamma \setminus \mathfrak{S}_g)^{\#}$ をとり, $X_1 \in (L(F_1) \setminus \mathfrak{S}_g)_{\Sigma_{F_1}}$, $X_2 \in (L(F_2) \setminus \mathfrak{S}_g)_{\Sigma_{F_2}}$ とする. 次の 2 条件が成立するとき, $X_1 \sim X_2$ と書く. (i) rational boundary component $F$ と $\gamma \in \Gamma$ が存在して, $F_1 \subset \overline{F}$, $\gamma F_2 \subset \overline{F}$. (ii) 上の $F$ に対して, $X \in (L(F) \setminus \mathfrak{S}_g)_{\Sigma_F}$ が存在して

$$\Pi_1 : (L(F) \setminus \mathfrak{S}_g)_{\Sigma_F} \to (L(F_1) \setminus \mathfrak{S}_g)_{\Sigma_{F_1}}, \qquad \Pi_1(X) = X_1 \ ,$$
$$\Pi_{\gamma,2} : (L(F) \setminus \mathfrak{S}_g)_{\Sigma_F} \to (L(\gamma F_2) \setminus \mathfrak{S}_g)_{\Sigma_{\gamma F_2}}, \qquad \Pi_{\gamma,2}(X) = X_2 \ .$$

このとき, $\sim$ は同値関係である. $(\Gamma \setminus \mathfrak{S}_g)^{\sim} = (\Gamma \setminus \mathfrak{S}_g)^{\#}/\sim$ とおく. これが $\Gamma \setminus \mathfrak{S}_g$ の toroidal コンパクト化である.

**注意 2.2** $g \leq 3$ のとき, $\mathfrak{S}_g^*(l)$ のすべての toroidal コンパクト化は一致する.

**smoothness と projectivity**

**定義 2.5** $\Sigma = \{\Sigma_F\}_{F:\text{rational}}$ を polyhedral decomposition の $\Gamma$-admissible family とし, $\Omega = \bigcup_{F:\text{rational}} C(F)$ とおく. 次をみたす連続で凸な区分的に線形な関数 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ が存在するとき, $\Sigma$ は projective であるという.

(i) $X \neq 0 \quad \Rightarrow \quad f(X) > 0$.

(ii) 各 $\sigma^F \in \Sigma_F$ に対して, $U(F)$ 上の線形形式 $l$ が存在して, (a) $C(F)$ 上で $l \geq f$, (b) $\sigma^F = \{X \in \overline{C}(F) \mid l(X) = f(X)\}$.

(iii) $f(\Gamma \cap \Omega) \subset \mathbb{Z}$.

(iv) $f$ は $\Gamma$-不変.

次の結果が知られている.

**定理 2.3** $\Sigma = \{\Sigma_F\}_{F:\text{rational}}$ を polyhedral decomposition の $\Gamma$-admissible family とする.

(1) 各 $\sigma^F \in \Sigma_F$ が $L(F) = U(F) \cap \Gamma$ の $\mathbb{Z}$-基底の一部によって生成されている（このとき, $\Sigma$ は regular であるという）ならば, $\mathfrak{S}_g^*(l)^{\sim}$ は smooth.

(2) $\Sigma$ が projective ならば, $\mathfrak{S}_g^*(l)^{\sim}$ は projective.

**注意 2.3** 1. 任意の Γ-admissible family Σ に対して, Σ の細分 Σ′ があって, Σ′ は regular となる. このとき Σ′ からつくられる toroidal コンパクト化は, Σ からつくられるものの blow-up である.

2. reduction theory から得られる projective な Γ-admissible family がある. これは central cone decomposition と呼ばれている.

3. 1, 2 より, $\mathfrak{S}_g^*(l)^\sim$ が smooth, projective になるような Γ-admissible family Σ が存在する.

### 2.2.3 Delony-Voronoi 分解

$\mathfrak{Y}_g^+$ : $g$ 次正値 2 次形式全体のなす集合

$\overline{\mathfrak{Y}}_g^+$ : $g$ 次半正値 2 次形式全体のなす集合の凸包

$y \in \mathfrak{Y}_g^+$ をとり, ベクトル空間 $E = \mathbb{R}^g$ の距離 $|\ \ |_y$ を

$$|\alpha - \beta|_y^2 = (\alpha - \beta) y^t (\alpha - \beta)$$

によって定義する. $E$ の中の整ベクトル全体の集合を $E_{\mathbb{Z}}$ と書く.

**定義 2.6** ある $\alpha \in E$ からの距離が最小であるような整ベクトルの集合 $a_0, \ldots, a_r \in E_{\mathbb{Z}}$ の閉包 $D(a_0, \ldots, a_r)$ を $y$ に関する Delony cell という. $a_0, \ldots, a_r$ のみたす条件を書くと次のようになる：

i) $\forall i,\ |a_i - \alpha|_y = \min_{\xi \in E_{\mathbb{Z}}} |\xi - \alpha|_y$

ii) $\forall \xi \neq a_i,\ |a_i - \alpha|_y < |\xi - \alpha|_y$

Delony cell の face は Delony cell であり, 2 つの Delony cell の共通部分も Delony cell である.

**定義 2.7** Delony cell 全体の定める $E$ の polyhedral decomposition を Delony 分解という.

$y_1,\ y_2 \in \mathfrak{Y}_g^+$ が $E$ の同一の Delony 分解を与えるとき, それらは同値であるといい, $y_1 \sim y_2$ と書く. $\{y' \in \mathfrak{Y}_g^+ \mid y' \sim y\}$ の閉包を $\Sigma(y)$ と書き, $y$ に伴う Delony-Voronoi cone と呼ぶ.

**定義 2.8** Delony-Voronoi cone 全体は $\overline{\mathfrak{Y}}_g^+$ の cone 分解を定めるが, それを $g$ 次 Delony-Voronoi 分解という.

**Delony-Voronoi 分解の性質**　a)　各 Delony-Voronoi cone は有限個の半正値整 2 次形式で生成される.

b)　Delony-Voronoi cone の face は Delony-Voronoi cone.　2 つの Delony-Voronoi cone の共通部分も Delony-Voronoi cone.

c)　$GL(g,\mathbb{Z})$ は $\overline{\mathcal{Y}}_g^+$ へ

$$(u,y) \mapsto {}^t uyu \qquad (y \in \overline{\mathcal{Y}}_g^+,\ u \in GL(g,\mathbb{Z}))$$

によって作用し, Delony-Voronoi 分解はこの作用で不変.

d)　Delony-Voronoi 分解の $GL(g,\mathbb{Z})$ を法とする類の数は有限.

e)　$g' < g$ ならば, 自然な埋め込み

$$\overline{\mathcal{Y}}_{g'}^+ \to \overline{\mathcal{Y}}_g^+, \quad y' \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y' \end{pmatrix}$$

によって, $\overline{\mathcal{Y}}_g^+$ の Delony-Voronoi 分解は $\overline{\mathcal{Y}}_{g'}^+$ の Delony-Voronoi 分解をひきおこす.

**例 2.2** (1) $\sigma_2$ を

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

によって生成される $\overline{\mathcal{Y}}_2^+$ の中の cone とする. $\sigma_2$ とその face の $GL(2,\mathbb{Z})$ の作用による像全体の集合は 2 次の Delony-Voronoi 分解である.

(2) $\sigma_3$ を

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

によって生成される $\overline{\mathcal{Y}}_3^+$ の中の cone とする. そのとき, $\sigma_3$ とその face の $GL(3,\mathbb{Z})$ による作用の像全体の集合は 3 次 Delony-Voronoi decomposition である.

**定理 2.4**　$g$ 次 Delony-Voronoi decomposition は $\mathcal{Y}_g^+$ の $GL(g,\mathbb{Z})$-admissible polyhedral decomposition である.

#### 2.2.4 Voronoi コンパクト化

**定義 2.9** Delony-Voronoi decomposition に対する toroidal コンパクト化を Voronoi コンパクト化と呼び, $\widetilde{\mathfrak{S}}_g^*(l)$ と書く.

Voronoi コンパクト化 $\widetilde{\mathfrak{S}}_g^*(l)$ は次の性質をもつ.

(1) $\widetilde{\mathfrak{S}}_g^*(l)$ の各点に対して, polarized stable quasi-abelian variety と呼ばれる polarized projective variety が対応する.

(2) projective である（cf. V. Alexeev, preprint, `math.AG/9905103`）

(3) $g \le 4,\ l \ge 3$ のとき, smooth である.

(4) $Sp(g, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$ は $\widetilde{\mathfrak{S}}_g^*(l)$ に作用し, $s : \widetilde{\mathfrak{S}}_g^*(l) \to \overline{\mathfrak{S}}_g^*(l)$ と両立している.

(5) (i) $l \ge 3$, (ii) $g = l = 2$, のいずれかが成り立つとき, $\widetilde{\mathfrak{S}}_g^*(l)$ は単連結.

**boundary の構造** $2 \le g \le 4$ のとき, $\Delta(g) = \widetilde{\mathfrak{S}}_g^*(l) - \mathfrak{S}_g^*(l)$ について次のことが知られている. $\Delta(g) = \cup_{i \in I} D_i$ と既約分解する.

(i) 各 $D_i$ は $\overline{\Gamma' \setminus (\mathfrak{S}_{g-1} \times \mathbb{C}^{g-1})}$ と同型である. ただし, $\Gamma'$ は半直積 $\Gamma_{g-1}(l) \times (l\mathbb{Z})^{2(g-1)}$ であり, $\Gamma'$ は $\mathfrak{S}_{g-1} \times \mathbb{C}^{g-1}$ へ

$$\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, (a,b)\right)(Z_1, Z_2) = \left((AZ_1+B)(CZ_1+D)^{-1}, (aZ_1+Z_2+b)(CZ_1+D)^{-1}\right)$$
$$\text{for} \quad \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_{g-1}(l), \quad (a,b) \in (l\mathbb{Z})^{2(g-1)}$$

によって作用する. また, $\overline{\Gamma' \setminus (\mathfrak{S}_{g-1} \times \mathbb{C}^{g-1})}$ は $\Gamma_g(l)$-admissible family から induce される $\Gamma' \setminus (\mathfrak{S}_{g-1} \times \mathbb{C}^{g-1})$ のコンパクト化である.

(ii) すべての $D_i$ たちは

$$\overline{\Gamma' \setminus (\mathfrak{S}_{g-1} \times \mathbb{C}^{g-1})} - \Gamma' \setminus (\mathfrak{S}_{g-1} \times \mathbb{C}^{g-1})$$

に沿って交わっている.

$g = 2$ の場合： $s : \widetilde{\mathfrak{S}}_2^*(l) \to \overline{\mathfrak{S}}_g^*(l)$ を $D_i$ に制限したものを再び $s$ と書くと, projection $s : D_i \to B_i,\ \ B_i \cong \overline{\mathfrak{S}}_1^*(l)$ を得る. $s$ によって, $D_i$ は level $l$ の elliptic modular surface になる. つまり, general fiber は level $l$ structure をもつ楕円曲線で, $B_i$ の cusp 上で singular fiber をもつ. 各 singular fiber は self-intersection number が $-2$ となる $l$ 個の有理曲線から成り, $l$ 角形のように交わっている.

$l=1,\ 2$ の場合には, $s$ の general fiber は楕円曲線を自然な involution $x \mapsto -x$ で割って得られる有理曲線である. それ故, この曲線は Kummer curve と呼ばれている. singular fiber は $B_i$ の cusp 上にある. $l=2$ のとき, 各 singular fiber は self-intersection number が $-1$ の有理曲線が 2 つ transversal に交わった形をしている. $l=1$ のとき, singular fiber はただ 1 つであり, self-intersection number が 0 の有理曲線が 1 つのみから成る. $l=1,\ 2$ の場合の $D_i$ は, level $l$ の Kummer modular surface と呼ばれている.

**注意 2.4** ($\mathfrak{S}_g^*(l)$ の分類)　本節の内容とは関係ないが, $\mathfrak{S}_g^*(l)$ の分類について知られていることを紹介する.

$X$ を複素数体上の $n$ 次元 variety とする. $X$ と birational な smooth complete variety $\widetilde{X}$ に対して, 環 $R(\widetilde{X}) = \bigoplus_{N=0}^{\infty} \Gamma(\widetilde{X}, (\Omega_{\widetilde{X}}^n)^{\otimes N})$ を考える.

$$\kappa(X) = \begin{cases} -\infty & (\text{trans.deg}_{\mathbb{C}}\ R(\widetilde{X}) = 0) \\ \text{trans.deg}_{\mathbb{C}}\ R(\widetilde{X}) - 1 & (\text{trans.deg}_{\mathbb{C}}\ R(\widetilde{X}) > 0) \end{cases}$$

とおくと, これは $\widetilde{X}$ の選び方によらずに $X$ に対して一意に決まる. $\kappa(X)$ を $X$ の Kodaira 次元という. $\kappa(X) = -\infty$ のとき, $X$ を rational, $\kappa(X) = n$ のとき, $X$ を general type という. また, dominant rational map $\mathbb{P}^n \to \widetilde{X}$ が存在するとき $X$ を unirational と呼ぶ. rational⇒unirational である.

$\mathfrak{S}_g^*(l)$ について次のことが知られている.

1. 次の $g,\ l \geq l_0$ に対して $\mathfrak{S}_g^*(l)$ は general type:

| $g$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | $\geq 7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $l_0$ | 4 | 3 | 2 | 2 | 2 | 1 |

$g=2,\ l \geq 4$ の場合を Yamazaki, $g \geq 9$ の場合を Tai, $g \geq 8$ の場合を Freitag, $g \geq 7$ の場合を Mumford が証明している.

2. 次は unirational: $\mathfrak{S}_4^*(1)$ (Clemens), $\mathfrak{S}_5^*(1)$ (Donagi, Mori-Mukai, Verra).

3. 次は rational: $\mathfrak{S}_2^*(l)$ ($l \leq 3$), $\mathfrak{S}_3^*(1)$ (Katsylo), $\mathfrak{S}_3^*(2)$ (van Geeman, Dolgachev-Ortland).

$\mathfrak{S}_6^*(1)$ については何も分かっていない.

## 2.3 Theta constants

$m',\ m'' \in \mathbb{Z}^g$ をとって $m = (m', m'') \in \mathbb{Z}^{2g}$ とおく．$(\tau, z) \in \mathfrak{S}_g \times \mathbb{C}^g$ に対して

$$\theta_m(\tau, z) = \sum_{p \in \mathbb{Z}^g} \mathbf{e}\left[\frac{1}{2}\left(p + \frac{m'}{2}\right)\tau^t\left(p + \frac{m'}{2}\right) + \left(p + \frac{m'}{2}\right)^t\left(z + \frac{m''}{2}\right)\right]$$

とおく．ただし, $\mathbf{e}[x] = \exp(2\pi i x)$ とする．この級数は $\mathfrak{S}_g \times \mathbb{C}^g$ の各コンパクト部分集合上で絶対一様収束する．$\theta_m(\tau, z)$ を characteristic $m$ の theta function, $\theta_m(\tau) := \theta_m(\tau, 0)$ を characteristic $m$ の theta constant と呼ぶ．$\theta_m(\tau)$ は $m$ mod 2 にのみ依存し,

$$\theta_m(\tau) \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad m'^t m'' = \text{奇数}$$

が成立する．よって各 $g$ に対して, 全部で $2^{g-1}(2^g + 1)$ 個の theta constant が存在する．特に $g = 2,\ 3$ のとき, それぞれ 10, 36 個の theta constant がある．

**定義 2.10**　$\tau \in \mathfrak{S}_g$ とする．$\tau$ が $\Gamma_g(1)$ に関して

$$\begin{pmatrix} \tau_1 & 0 \\ 0 & \tau_2 \end{pmatrix} \qquad (\tau_1 \in \mathfrak{S}_{g'},\ \tau_2 \in \mathfrak{S}_{g''} \quad (g' + g'' = g,\ 0 < g' < g))$$

の形の点と同値のとき, $\tau$ は reducible であるという．

**定理 2.5** (Hammond, Igusa)　$g = 2$ の場合, 10 個の theta constant の 2 乗の積を $\chi_{10}$ と書くと $\chi_{10} \in S_{10}(\Gamma_2(1))$ となり,

$$\tau \in \mathfrak{S}_2 \text{は reducible} \quad \Leftrightarrow \quad \chi_{10}(\tau) = 0.$$

**定理 2.6** (Igusa)　$g = 3$ の場合, 36 個の theta constant の積を $\chi_{18}$ と書き, 36 個の theta constant の 8 乗の第 35 基本対称式を $\Sigma_{140}$ と書くと, $\chi_{18} \in S_{18}(\Gamma_3(1)),\ \Sigma_{140} \in S_{140}(\Gamma_3(1))$ であり,

$$\tau \in \mathfrak{S}_3 \text{は reducible} \quad \Leftrightarrow \quad \chi_{18}(\tau) = \Sigma_{140}(\tau) = 0.$$

## 2.4 定理 2.1 の証明

### 2.4.1 Step 1

$g = 2$ とし, $n = g(g+1)/2$ とする．$L_g$ は $\mathfrak{S}_g^*(l)$ 上の line bundle で $\mathfrak{S}_g$ 上の保型因子:

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \mapsto \det(CZ + D) \qquad (M \in Sp(g, \mathbb{Z}),\ Z \in \mathfrak{S}_g)$$

によって定義されるものとする．$\overline{L}_g$ を $L_g$ の $\overline{\mathfrak{S}}^*_g(l)$ への延長とし，$\widetilde{L}_g = s^*\overline{L}_g$ とおく．$\widetilde{\mathfrak{S}}^*_g(l)$ の canonical bundle を $K$ と書く．そのとき，$K = (g+1)\widetilde{L}_g - \Delta(g)$ が成立する（$l \geq 3$ ならば，一般の $g$ について成立する）．また，この式より

$$\begin{aligned} c_1(\widetilde{L}_g) &= \frac{1}{g+1}(c_1(K) + \Delta(g)) \\ &= \frac{1}{g+1}(-c_1 + \Delta(g)) \qquad (\text{命題 } 1.1) \\ &= -\frac{1}{g+1}\overline{c}_1 \end{aligned}$$

となる（これも任意の $g$ に対して成立する）．

$k > g+1$ ならば，

$$\begin{aligned} k\widetilde{L}_g - \Delta(g) &= s^*((k-g-1)\overline{L}_g) + (g+1)\widetilde{L}_g - \Delta(g) \\ &= s^*((k-g-1)\overline{L}_g) + K \end{aligned}$$

となり，$(k-g-1)\overline{L}_g$ は ample である．故に消滅定理より，任意の $p > 0$ に対して，$H^p(\widetilde{\mathfrak{S}}^*_g(l), \mathcal{O}(k\widetilde{L}_g - \Delta(g))) = 0$ となる．よって

$$\dim S_k(\Gamma_g(l)) = \chi(\widetilde{\mathfrak{S}}^*_g(l), \mathcal{O}(k\widetilde{L}_g - \Delta(g))).$$

Riemann-Roch-Hirzebruch の定理を用いて，

$$\begin{aligned} \chi(\widetilde{\mathfrak{S}}^*_2(l), \mathcal{O}(k\widetilde{L}_2 - \Delta(2))) &= (3!)^{-1}(k\widetilde{L}_2 - \Delta(2))^3 + (2!)^{-1}2^{-1}c_1(k\widetilde{L}_2 - \Delta(2))^2 \\ &\quad +(12)^{-1}(c_2 + c_1^2)(k\widetilde{L}_2 - \Delta(2)) + (24)^{-1}c_2c_1, \\ \chi(\widetilde{\mathfrak{S}}^*_3(l), \mathcal{O}(k\widetilde{L}_3 - \Delta(3))) &= (6!)^{-1}(k\widetilde{L}_3 - \Delta(3))^6 + (5!)^{-1}2^{-1}c_1(\widetilde{L}_3 - \Delta(3))^5 \\ &\quad +(4!)^{-1}(12)^{-1}(c_2 + c_1^2)(\widetilde{L}_3 - \Delta(3))^4 \\ &\quad +(3!)^{-1}(24)^{-1}c_2c_1(\widetilde{L}_3 - \Delta(3))^3 \\ &\quad +(2!)^{-1}(720)^{-1}(-c_4 + c_3c_1 + 3c_2^2 + 4c_2c_1^2 - c_1^4)(\widetilde{L}_3 - \Delta(3))^2 \\ &\quad +(1440)^{-1}(-c_4c_1 + c_3c_1^2 + 3c_2^2c_1 - c_2c_1^3)(\widetilde{L}_3 - \Delta(3)) \\ &\quad +(60480)^{-1}(2c_6 - 2c_5c_1 - 9c_4c_2 - 5c_4c_1^2 - c_3^2 \\ &\quad +11c_3c_2c_1 + 5c_3c_1^3 + 10c_2^3 + 11c_2^2c_1^2 - 12c_2c_1^4 + 2c_1^6) \end{aligned}$$

となる．$c_j = \sum_{k=0}^{j} \overline{c}_{j-k}\Delta_k(g)$ と $\widetilde{L}_g = -\frac{1}{g+1}\overline{c}_1$ を代入すると，$\dim S_k(\Gamma_2(l))$ は次のようになる．

$$2^{-3}3^{-4}(-4k^3\overline{c}_1^3 + 18k^2\overline{c}_1^3 - 18k\overline{c}_1^3 - 18k\overline{c}_1\overline{c}_2 + 27\overline{c}_1\overline{c}_2) \tag{1}$$
$$+2^{-3}3^{-2}(-2k^2\overline{c}_1^2 + 6k\overline{c}_1^2 - 3\overline{c}_1^2 - 3\overline{c}_2)\Delta_1(2) \tag{2}$$
$$+2^{-3}3^{-2}(-2k+3)\overline{c}_1(\Delta_1(2)^2 + \Delta_2(2)) \tag{3}$$
$$-2^{-3}3^{-1}\Delta_1(2)\Delta_2(2) + (0)\Delta_1(2)^3. \tag{4}$$

$\dim S_k(\Gamma_3(l))$ についてはより複雑な形になるので省略する.

### 2.4.2 Step 2

上の各行に対して, 次の方法を用いる.

(1) Hirzebruch-Mumford の比例定理を使う.

$\mathfrak{S}_2$ に対して, 定数 $d$ と多項式 $P$ が一意に存在して (1) の行 $= d \cdot P(k-1)$ となる. $P(k-1) = (2k-2)(2k-3)(2k-4)$ であることが知られている (Hirzebruch). 両辺の $k^3$ の係数を比較して, $2^3 d = -2^{-1}3^{-4}\overline{c}_1^3$. Hirzebruch によると,

$$\overline{c}_1^n[\widetilde{\mathfrak{S}}_g^*(l)] = (-1)^n \pi^{-n}(g+1)^n n! 2^{-\frac{g(g+3)}{2}} \mathrm{vol}(\mathfrak{S}_g^*(l)). \tag{5}$$

これに

$$[\Gamma_g(1) : \Gamma_g(l)] = l^{g(2g+1)} \prod_{p|l} \prod_{1 \le h \le g} (1 - p^{-2h}) \tag{6}$$

と $\mathrm{vol}(\mathfrak{S}_2^*(1)) = 2^{-1}3^{-3}5^{-1}\pi^3$ を代入して, $d = 2^{-10}3^{-3}5^{-1}l^{10}\prod_{p|l}(1-p^{-2})(1-p^{-4})$ となる.

$g=3$ の場合 : (5), (6) と $\mathrm{vol}(\mathfrak{S}_3^*(1)) = 3^{-6}5^{-2}7^{-1}\pi^6$ を使って同様の計算を行なう.

(2) この行は消える.

**補題 2.1** (Tsushima) $\overline{X}$ を複素多様体, $X$ は $\overline{X}$ の開集合で, $\Delta = \overline{X} - X$ は $\overline{X}$ の因子で simple normal crossing であるものとする. $\overline{D} \subset \overline{X} - X$

は既約因子で, $\{D_i\}_{i\geq 1}$ を $\overline{X}-X$ に含まれる他の既約因子の集合とし, $D=\overline{D}-\cup_{i\geq 1}D_i$ とおく. そのとき,

$$\overline{c}_j(X)|\overline{D}=\overline{c}_j(D).$$

$2\leq g\leq 4$ とする. $E\subset \widetilde{S}^*_g(l)-\mathfrak{S}^*_g(l)$ を既約因子とすると, $E$ は $\overline{\mathfrak{S}}^*_{g-1}(l)$ 上の fiber 空間になる. この fibering は, $s:\widetilde{\mathfrak{S}}^*_{g-1}(l)\to\overline{\mathfrak{S}}^*_{g-1}(l)$ を通って分解して, morphism $\pi:E\to\widetilde{\mathfrak{S}}^*_{g-1}(l)$ を得る. 上の補題より次が成立する.

**定理 2.7** (Tsushima) 各 $j\geq 0$ に対して, $\widetilde{\mathfrak{S}}^*_{g-1}(l)$ 上の cohomology 類 $e_j$ が存在して,

$$\overline{c}_j(g)|E=\pi^*(e_j).$$

$E$ を $\Delta(2)$ の既約成分とする. そのとき $E$ は楕円曲面である: $\pi:E\to\widetilde{\mathfrak{S}}^*_1(l)$. 上の定理より, 任意の $\overline{c}_j$ に対して, $\widetilde{\mathfrak{S}}^*_1(l)$ の cohomology 類 $e_j$ が存在して, $\overline{c}_j|E=\pi^*(e_j)$ が成立する. $\overline{c}_1^2E[\widetilde{\mathfrak{S}}^*_2(l)]=(\overline{c}_1|E)^2[E]=\pi^*(e_1^2)[E]$ となる. $e_1^2=0$ であるから, $\overline{c}_1^2E[\widetilde{\mathfrak{S}}^*_2(l)]=0$. よって, $\overline{c}_1^2\Delta_1(2)=0$. 同様に $\overline{c}_2\Delta_1(2)=0$ も成立する.

$g=3$ の場合 : $E$ を $\Delta(3)$ の既約成分とする. そのとき $E$ は $\widetilde{\mathfrak{S}}^*_2(l)$ 上の fiber space である. $\pi$ をその fibering とする. そのとき上の定理より, 任意の $\overline{c}_j$ に対して, $\widetilde{\mathfrak{S}}^*_2(l)$ の cohomology 類 $e_j$ が存在して, $\overline{c}_j|E=\pi^*(e_j)$ となる. 例えば, $\overline{c}_1^5\Delta(3)=\overline{c}_5\Delta(3)=0$ が成立する.

**注意 2.5** $\overline{c}_1\Delta_1(2)=0$ について : $\overline{c}_1\Delta_1(2)$ は $k^2$ の係数として現れるが, §1 の系 1.2 より, $k^2$ の項は現れないから $\overline{c}_1\Delta_1(2)=0$. $g=3$ の場合にも同様のことが起きる.

(4) の第 1 項
$E$ を $\Delta(2)$ の既約成分とし, $\pi:E\to\widetilde{\mathfrak{S}}^*_1(l)$ をその fibering とする. $\widetilde{\mathfrak{S}}^*_1(l)$ 上の cusp $p$ の逆像 $\pi^{-1}(p)$ は $l$ 個の有理曲線から成り, 各有理曲線 $C$ の self-intersection number は $-2$ である. $C$ は $\Delta(2)$ のある 2 つの既約成分 $E,\ E'$ の交わりである. 故に

$$EE'^2[\widetilde{\mathfrak{S}}^*_2(l)]=(E'|E)^2[E]=C^2[E]=-2.$$

$\widetilde{\mathfrak{S}}^*_2(l)$ は 1 次の cusp を $\frac{1}{2}l^4\prod_{p|l}(1-p^{-4})$ 個, $\widetilde{\mathfrak{S}}^*_1(l)$ は $\frac{1}{2}l^2\prod_{p|l}(1-p^{-2})$ 個の cusp をもつ. したがって, 3 つの既約成分の交わりとして表される点の

数は $\frac{1}{12}l^7\prod_{p|l}(1-p^{-2})(1-p^{-4})$ 個である．また，2 つの既約成分の交わりとして表される曲線の数は $\frac{1}{8}l^7\prod_{p|l}(1-p^{-2})(1-p^{-4})$ 個である．よって,

$$\begin{aligned}\Delta_1(2)\Delta_2(2) &= \sum_{i<j}(E_iE_j^2+E_i^2E_j)+3\sum_{i<j<k}E_iE_jE_k \\ &= -\frac{1}{4}l^7\prod_{p|l}(1-p^{-2})(1-p^{-4}).\end{aligned}$$

$g=3$ の場合： $T=(\mathbb{C}^*)^n$ とし, $X$ を $T$ の nonsingular torus embedding とする．$X-T=\cup_{i\in I}D_i$ と既約分解とする．$\gamma_i$ を $D_i$ に対応する $\mathbb{R}^n$ の中の 1 次元 cone とし, $\boldsymbol{a}_i=(a_{i1},\ldots,a_{in})\in\gamma_i$ を primitive vector とする（$\boldsymbol{a}_i$ が primitive とは, $a_{i1},\ldots,a_{in}$ が整数で互いに素になること）．そのとき, 次が成立する.

**定理 2.8** (Tsushima)

$$\sum_i a_{ij}\cdot D_i\sim 0 \qquad (j=1,\ldots,n).$$

ここに $\sim$ は線形同値を表す.

$\widetilde{\mathfrak{S}}_3^*(l)$ は torus embedding を貼り合わせて作られていて既約因子 $E_1,\ E_2,\ E_3\in\widetilde{\mathfrak{S}}_3^*(l)-\mathfrak{S}_3^*(l)$ について, $E_1\cap E_2\cap E_3$ がある 1 つの torus embedding に含まれるための必要十分条件は $s(E_1\cap E_2\cap E_3)$ は 0 次元であるから, そのような因子を定理の式の両辺に 5 個かけて, intersection number が計算できる. 例えば, $E_1^2E_2^2E_3^2,\ E_1^3E_2^2E_3,\ E_1^4E_2E_3$ などがわかる.

$g=2$ のときも同様のことが言えて, $E_1^2E_2$ が計算できる.

(3) 次の結果を用いる：

**命題 2.1** (Tsushima)　$2\le g\le 4$ とし, $E$ を $\Delta(2)$ の既約因子とする．$\pi:E\to\widetilde{\mathfrak{S}}_{g-1}^*(l)$ は fibering で, $i:E\hookrightarrow\widetilde{\mathfrak{S}}_g^*(l)$ は包含写像とする．すると

$$i^*(c(\Omega_{\widetilde{\mathfrak{S}}_g^*(l)}(\log\Delta(g))))=\pi^*(c(\Omega_{\widetilde{\mathfrak{S}}_{g-1}^*(l)}(\log\Delta(g-1)))\cdot c(\widetilde{L}_{g-1}))$$

が成立する.

$\overline{c}_1 = -3\widetilde{L}_2$ より, $i^*(\overline{c}_1) = -3\pi^*(c_1(\widetilde{L}_1)$. $E$, $E'$ を $\Delta(2)$ の既約成分とするとき, $\overline{c}_1 EE'[\widetilde{\mathfrak{S}}_2^*(l)] = -3\pi^*(c_1(\widetilde{L}_1))[E\cap E']$. ここで, $\pi(E\cap E') = q$ は点ゆえ, $\overline{c}_1 EE'[\widetilde{\mathfrak{S}}_2^*(l)] = 0$. よって, $\overline{c}_1 E^2[\widetilde{\mathfrak{S}}_2^*(l)]$ を計算すれば十分である. $c_1([E\cap E'])i^*(E)[E] = E'E^2[\widetilde{\mathfrak{S}}_2^*(l)] = -2$ である. $[q]$ を $\widetilde{\mathfrak{S}}_1^*(l)$ 上の line bundle とすると, $\pi^*(c_1([q]))i^*(E)[E] = \sum_{i=1}^{l} c_1([E_i\cap E])i^*(E)[E] = -2l$. 故に $\overline{c}_1 E^2[\widetilde{\mathfrak{S}}_2^*(l)] = -3\pi^*(c_1(\widetilde{L}_1))i^*(E)[E] = 6l\cdot\deg(\widetilde{L}_1)$. ここで, $\mathrm{vol}(\Gamma_1(1)\setminus\mathfrak{S}_1) = \pi/3$ より, $\deg(\widetilde{L}_1) = \frac{1}{24}l^3\prod_{p|l}(1-p^{-2})$. したがって, $\overline{c}_1\Delta_1(2)^2[\widetilde{\mathfrak{S}}_2^*(l)] = \overline{c}_(\sum_i E_i^2)[\widetilde{\mathfrak{S}}_2^*(l)] = \frac{1}{8}l^8\prod_{p|l}(1-p^{-2})(1-p^{-4})$.

$g=3$ の場合： 同様の計算を行なう. $D$ を $\Delta(2)$ の既約因子とすると, fibering $\pi : E\to\widetilde{\mathfrak{S}}_2^*(l)$ による逆像 $\pi^{-1}(D)$ は $l$ 個の 4 次元の多様体が 2 つずつ交わって輪になっている. この 4 次元多様体, および 2 つの 4 次元多様体の交わりはそれぞれ $E\cap E'$, $E\cap E'\cap E''$ と表される. ただし, $E$, $E'$, $E''$ は $\Delta(3)$ の既約因子である. chohomology 類 $D^3$ を $D$ 上の外の点としてとっておいて, $\pi^*(D)$ が $E\cap E'$, $E\cap E'\cap E''$ と交わらないようにする. そして, $\pi^*(D)EE'E''$, $\pi^*(D)E^2E'$, $\pi^*(D)E^2E'E''$ などを計算していく.

(4) の第 2 項：theta constant に関する Igusa の結果 2.3 を使う.
$g=2$ の場合： 係数が 0 であるから, 計算する必要はない. しかし, Yamazaki は対数的 Chern 類を使わなかったためにこの事実に気づかなかった.

$g=3$ の場合： $E^6$, $\overline{c}_2E^4$ などの intersection number が残っているため, もっと他の relation を見つける必要がある. そのために $g=2$ の場合の Yamazaki の方法によって relation を見つける. $I$, $J$ をそれぞれ $\chi_{18}$, $\Sigma_{140}$ の零点集合とし, $\overline{I}$, $\overline{J}$ をそれぞれの $\widetilde{\mathfrak{S}}_3^*(l)$ における閉包とすると, $18\widetilde{L}_3\sim\widetilde{I}+2l\Delta(3), 140\widetilde{L}_3\sim\widetilde{J}+15l\Delta(3)$. ただし, $\sim$ は線形同値を意味する. 各 $g=2,\ 3$ に対して, $R_g = \Gamma_g(l)\setminus\{\mathfrak{S}_g\text{の reducible points}\}$ とおき, $\overline{R_g}$ を $R_g$ の $\widetilde{\mathfrak{S}}_g^*(l)$ における閉包とする. $\widetilde{\mathfrak{S}}_3^*(l) - \mathfrak{S}_3^*(l) = \cup_{i\in I}E_i$ と既約分解して, $\pi_i : E_i\to\widetilde{\mathfrak{S}}_2^*(l)$ を fibering とする. $R(\Delta(3)) = \cup_{i\in I}\pi_i^{-1}(\overline{R_2})$ とおく. $\overline{I}$, $\overline{J}$ は, $\overline{R_3}$, $R(\Delta(3))$ で support をもつということが言え, $n_1$, $n_2$ をそれぞれ $\overline{I}$, $\overline{J}$ の $\overline{R_3}$, $R(\Delta(3))$ での multiplicity とすると $\overline{I}\cdot\overline{J} = n_1\overline{R_3}+n_2R(\Delta(3))$ が成立する. よって

$$(18\widetilde{L}_3 - 2l\Delta(3))(140\widetilde{L}_3 - 15l\Delta(3)) = n_1\overline{R_3} + n_2R(\Delta(3)).$$

$n_1$, $n_2$ を計算して, $R(\Delta(3))$ を有理同値なものにとりかえて次を得る：

**定理 2.9** (Tsushima)

$$(3\Delta_1(3)^2+\Delta_2(3))l^2 = 24\overline{R_3}+60l\overline{L}_3\Delta_1(3)-252\widetilde{L}_3^2.$$

これまでに出てきた結果と組み合せて, 残りの intersection number が計算できる.

$g = 2$ の場合で係数が 0 であることに気づかない場合, $\Delta(2)$ の既約因子 $E$ に対して, $E^3$ を計算する必要がある. Igusa の結果より, $10\widetilde{L}_2 \sim 2\overline{R_2}+l\Delta(2)$ が成立する. 両辺に $E^2$ をかけて計算すると $E^3[\widetilde{\mathfrak{S}}_2^*(l)]$ が分かり,

$$E^3[\widetilde{\mathfrak{S}}_2^*(l)] = \frac{1}{6}l^3\prod_{p|l}(1-p^{-2})$$

を得る.

## 2.5 定理 2.2 の証明

$G(l) = \Gamma_2(1)/(\pm 1)\Gamma_2(l)$ とおく.

### 2.5.1 Step 1

任意の $g \in G(l)$ について, $g$ の fixed point set $X^g$ の既約成分を分類する.

Gottschling と Ueno は, $\mathfrak{S}_2^*(l)$ に含まれる既約成分を分類した. $\Delta(2)$ に含まれる既約成分に関しては, $SL(2,\mathbb{Z})$ の $\widetilde{\mathfrak{S}}_1^*(l)$ における固定点を求める. 次に各固定点 $p$ に対して, $s^{-1}(p)$ の中の fixed point set を求める. 全部で 25 種類の既約成分がある. $\Phi_\alpha \quad (1 \le \alpha \le 25)$.

### 2.5.2 Step 2

$\tau(g)$ を計算するために, $\Phi_\alpha \quad (1 \le \alpha \le 25)$ と同値な $X^g$ の既約成分の数を求めなければいけない.

$C_{G(l)}(\Phi_\alpha) = \{g \in G(l) \mid gx = x \quad (\forall x \in \Phi_\alpha)\}$,

$N_{G(l)}(\Phi_\alpha) = \{g \in G(l) \mid g\Phi_\alpha = \Phi_\alpha\}$ とおく.

$g \in C_{G(l)}(\Phi_\alpha)$ をとる. $\Phi_\alpha$ が $X^g$ の既約成分のとき, $g$ を $C_{G(l)}(\Phi_\alpha)$ の proper element と呼ぶ. $C_{G(l)}^p(\Phi_\alpha)$ を $C_{G(l)}(\Phi_\alpha)$ の proper element 全体のなす集合とする.

$\Phi_\alpha$ と同値な $X^g$ の既約成分に対して, $X^\varphi$ $(\exists\varphi \in C^p_{G(l)}(\Phi_\alpha))$ の中の $\Phi_\alpha$ が対応している. $C_{G(l)}(\varphi)$ を $\varphi$ の $G(l)$ における中心化群とする. $X^g$ の既約成分で $\varphi$ が作用する $\Phi_\alpha$ に対応するものの個数は

$$n(\varphi) = \frac{|C_{G(l)}(\varphi)|}{|C_{G(l)}(\varphi) \cap N_{G(l)}(\Phi_\alpha)|}$$

である. 写像 $N_{G(l)}(\Phi_\alpha) \to C_{G(l)}(\Phi_\alpha), \quad g \to g^{-1}\varphi g$ から, 単射

$$N_{G(l)}(\Phi_\alpha)/(C_{G(l)}(\varphi) \cap N_{G(l)}(\Phi_\alpha)) \to C_{G(l)}(\Phi_\alpha)$$

が得られる. この写像の像は

$$\{\varphi' \in C^p_{G(l)}(\Phi_\alpha) \mid \varphi' \text{ は } N_{G(l)}(\Phi_\alpha) \text{ の中で} \varphi \text{ と共役}\}$$

である. この集合の元の個数を $e(\varphi)$ とすると, $n(\varphi) = \frac{|C_{G(l)}(\varphi)|}{|N_{G(l)}(\Phi_\alpha)|} \cdot e(\varphi)$ である. $\equiv$ を $N_{G(l)}(\Phi_\alpha)$ における共役による同値関係とする. $\varphi' \equiv \varphi$ ならば, $\tau(\varphi', \Phi_\alpha)) = \tau(\varphi, \Phi_\alpha)$. よって

$$\begin{aligned}
\tau(g) &= \sum_{\alpha=1}^{25} \sum_{\substack{\varphi \in C^p_{G(l)}(\Phi_\alpha)/\equiv, \\ \varphi \sim g}} \frac{|C_{G(l)}(\varphi)|}{|N_{G(l)}(\Phi_\alpha)|} \cdot e(\varphi) \cdot \tau(\varphi, \Phi_\alpha) \\
&= \sum_{\alpha=1}^{25} \sum_{\substack{\varphi \in C^p_{G(l)}(\Phi_\alpha), \\ \varphi \sim g}} \frac{|C_{G(l)}(\varphi)|}{|N_{G(l)}(\Phi_\alpha)|} \cdot \tau(\varphi, \Phi_\alpha).
\end{aligned}$$

### 2.5.3 Step 3

$l \geq 3$ とする. $\Gamma$ は $\Gamma_2(1)$ の部分群で $\Gamma_2(l)$ を含むものとする. $G(\Gamma) = (\pm1)\Gamma/(\pm1)\Gamma_2(l)$ とおく. $G(\Gamma)$ は対 $(\widetilde{\mathfrak{S}}^*_2(l), k\widetilde{L}_2 - \Delta(2))$ に作用する. また, $S_k(\Gamma_2(l))$ にも

$$(M \cdot f)(MZ) = f(Z)\det(CZ+D)^k \qquad \left(M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in (\pm1)\Gamma,\ f \in S_k(\Gamma_2(l))\right)$$

によって作用する. $g_1, \ldots, g_h$ を $G(\Gamma)$ の共役類の完全代表系とする. $k \geq 4$ ならば,

$$
\begin{aligned}
\dim S_k(\Gamma) &= \dim S_k(\Gamma_2(l))^{G(\Gamma)} \\
&= \dim H^0(\widetilde{\mathfrak{S}}_2^*(l), \mathcal{O}(k\widetilde{L}_2 - \Delta(2)))^{G(\Gamma)} \\
&= \sum_{p\geq 0}(-1)^p \dim H^p(\widetilde{\mathfrak{S}}_2^*(l), \mathcal{O}(k\widetilde{L}_2 - \Delta(2)))^{G(\Gamma)} \qquad \text{(消滅定理)} \\
&= \frac{1}{|G(\Gamma)|}\sum_{g\in G(\Gamma)} \tau(g) \qquad \text{(Theorem 1.9)} \\
&= \sum_{i=1}^{h} \frac{1}{|C_{G(\Gamma)}(g_i)|}\tau(g_i) \\
&= \sum_{i=1}^{h} \frac{1}{|C_{G(\Gamma)}(g_i)|}\sum_{\alpha=1}^{25} \sum_{\varphi\in C^p_{G(l)}(\Phi_\alpha), \varphi\sim g_i} \frac{|C_{G(l)}(\varphi)|}{|N_{G(l)}(\Phi_\alpha)|}\cdot \tau(\varphi, \Phi_\alpha).
\end{aligned}
$$

$|C_{G(\Gamma)}(g_i)|$, $|C_{G(l)}(\varphi)|$, $|N_{G(l)}(\Phi_\alpha)|$, $\tau(\varphi, \Phi_\alpha)$ については, 論文の中で計算されている. 特に $\tau(\varphi, \Phi_\alpha)$ に関しては, $\Phi_\alpha$ が座標軸に平行でないなら, 変数変換して座標軸に平行になるようにして計算しやすい形に直してから値を求めている.

## 2.6 参考文献


[1] I. Nakamura, On moduli of stable quasi-abelian varieties, Nagoya Math. J., **58** (1975), 149-214.

[2] Y. Namikawa, A new compactification of the Siegel space and degeneration of abelian varieties, I. II, Math. Ann., **221** (1976), 97-141, 201-241.

[3] Y. Namikawa, Toroidal Compactification of Siegel Spaces, Lecture Notes in Math. **812**, Springer, 1980.

[4] R. Tsushima, On dimension formulae for Siegel modular forms, Adv. Stud. Pure Math., **15** (1989), 41-64.

[5] T. Yamazaki, On Siegel modular forms of degree two, Amer. J. Math., **98** (1976), 39-53.

# 3 Hilbert 保型形式の次元公式

Hilbert cusp forms のなすベクトル空間の次元公式として, weight が 2 より大きい場合は Shimizu により, weight が 2 の場合は Freitag, Ishikawa により与えられている. この節では彼らの次元公式を使って full modular 群に関する cusp forms の次元の計算方法を解説する. 最後に, 代数幾何学による次元公式について述べる.

## 3.1 Shimizu の次元公式

$n$ を 1 より大きい自然数とする. $K$ を $n$ 次総実代数体とする. すると $K$ から $\mathbb{R}$ への $n$ 個の埋め込み $K \hookrightarrow \mathbb{R},\quad x \mapsto x^{(i)} \quad (i = 1, \ldots, n)$ が存在する. $\mathfrak{o}_K$ を $K$ の整数環とする. $G = SL_2(\mathfrak{o}_K)$ を $K$ の Hilbert modular 群と呼ぶ. 複素上半平面を $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ で表す. そのとき, $G$ は $H$ の $n$ 個の直積 $H^n$ に以下のように作用する: $z = (z_1, \ldots, z_n) \in H^n$ と $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$ に対して,

$$g \cdot z = \left( \frac{a^{(1)} z_1 + b^{(1)}}{c^{(1)} z_1 + d^{(1)}}, \ldots, \frac{a^{(n)} z_n + b^{(n)}}{c^{(n)} z_n + d^{(n)}} \right).$$

$k$ を正の整数とする. また, $GL^+(2, K)$ を $K$ の元を成分とする 2 次行列で行列式が正なもの全体のなす群とする. $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL^+(2, K)$ と $H^n$ 上の正則関数 $f$ に対して,

$$f|_{2k} g := \prod_{i=1}^{n} (c^{(i)} z_i + d^{(i)})^{-2k} f(g \cdot z)$$

とおく.

**定義 3.1** 正則関数 $f : H^n \to \mathbb{C}$ が $G$ に関する weight $2k$ の Hilbert modular form とは

$$f|_{2k} g = f \quad (\forall g \in G)$$

が成立することである.

$\mathbb{P}^1(K) = K \cup \infty$ とおく. $G$ は $\mathbb{P}^1(K)$ へ 1 次分数変換によって作用する. そのとき, 各 orbit を $G$ の cusp という. $\sigma = \alpha/\beta \in \mathbb{P}^1(K)$ をとる. ただし, $\alpha,\ \beta \in \mathfrak{o}_K$ であるようにとっておく. $\sigma$ に $\mathfrak{o}_K \alpha + \mathfrak{o}_K \beta$ を対応させることで, $\mathbb{P}^1(K)$ から $K$

の ideal 類群 $Cl_K$ への全単射が得られる．したがって, $G$ の cusp の数は $K$ の類数に等しい．

$A_{2k}(G)$ を $G$ に関する weight $2k$ の Hilbert modular forms のなすベクトル空間とする．任意の $\sigma \in \mathbb{P}^1(K)$ に対して, $g_\sigma \cdot \sigma = \infty$ となる $GL^+(2, K)$ の元 $g_\sigma$ が存在する．$f \in A_{2k}(G)$ を任意にとると, $K$ の中の rank $n$ の $\mathbb{Z}$-加群 $M$ が存在して $f|_{2k}g_\sigma$ を次のように Fourier 展開することができる:

$$f|_{2k}g_\sigma = \sum_{\nu \in M^\vee} a_\nu \mathbf{e}(\mathrm{Tr}(\nu z)).$$

ここに, $M^\vee = \{\lambda \in K \mid \mathrm{Tr}(\lambda\mu) \in \mathbb{Z} \ (\forall \mu \in M)\}$, $\mathbf{e}(\quad) = \exp(2\pi i \quad)$, $\mathrm{Tr}(\nu z) = \sum_{i=1}^n \nu^{(i)} z_i$ である．$a_\nu \neq 0$ ならば, $\nu = 0$ または $\nu$ は総正（つまり $\nu^{(i)} > 0 \ (i = 1, \ldots, n)$）であることが知られている．

**定義 3.2** $f \in A_{2k}(G)$ とする．$G$ の各 *cusp* の代表元 $\sigma$ をとって, $f|_{2k}g_\sigma$ を *Fourier* 展開して $a_0 = 0$ が成立するとき, $f$ は *cusp form* と呼ばれる．

$G$ に関する weight $2k$ の Hilbert cusp forms のなすベクトル空間を $S_{2k}(G)$ で表す．$h_K$ を $K$ の類数とすると, $G$ の cusp の数は $h_K$ であるから,

$$\dim A_{2k}(G) = \dim S_{2k}(G) + h_K$$

となる．次は Shimizu の次元公式と呼ばれる結果である．

**定理 3.1** (Shimizu [12]) $k \geq 2$ のとき,

$$\dim S_{2k}(G) = \frac{(-1)^n(2k-1)^n}{2^{n-1}} \cdot \zeta_K(-1) + \sum_\tau a(\tau)\gamma_k(\tau) + w$$

が成立する．ここに, $\zeta_K$ は Dedekind zeta 関数で, 和 $\sum_\tau$ は $G$ の elliptic fixed point のすべての type $\tau$ の上を動くものとする．$a(\tau)$ は type $\tau$ の elliptic fixed point の $G$-同値類の数である．$\tau = (r; q_1, \ldots, q_n)$ のとき,

$$\gamma_k(\tau) := \frac{1}{r} \sum_{\zeta^r = 1, \zeta \neq 1} \prod_{i=1}^n \frac{\zeta^{kq_i}}{1 - \zeta^{q_i}}$$

とする．

最初の項は identity からの contribution, 2 番目の項は elliptic fixed point からの contribution, そして最後の項 $w$ は cusp からの contribution である．$K$ が norm が負の unit を持てば $w = 0$ である, ことを Shimizu は証明している．

**注意 3.1** $G$ の合同部分群 $\Gamma$ に対する次元公式も似た形をしている. 大雑把に言えば, 第一項に指数 $[G:\Gamma]$ がつくだけである.

$Y_G$ を $G\backslash H^n$ の toroidal smooth コンパクト化とし, $\chi(G)$ を $Y_G$ の構造層 $\mathcal{O}_{Y_G}$ の Euler-Poincaré 標数とする: $\chi(G)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \dim H^i(Y_G,\mathcal{O}_{Y_G})$.

$\dim S_{2k}(G)$ を $k$ の多項式と見なす.

**定理 3.2** (Freitag [2]) $\dim S_{2k}(G)$ の定数項は $\chi(G)$, すなわち

$$\chi(G)=\frac{1}{2^{n-1}}\cdot\zeta_K(-1)+\sum_{\tau}a(\tau)\gamma_0(\tau)+w.$$

**注意 3.2** *(1)* $n=2$ の場合に, Hammond ([5]) も上記の定理を独立に証明している.

*(2)* 上記の定理は一般の $\mathbb{Q}$-rank 1 の場合に拡張されている (Satake). 3.4 も参照されたい. boundary が 0 次元ということが証明に使われている. しかし, Siegel 保型形式の場合に対してはまだ証明されていないように思われる.

さて,

$$\dim S_2(G)=\dim H^n(Y_G,\mathcal{O}_{Y_G})=(-1)^n(\chi(G)-1)$$

という結果が知られているから, 次の定理を得る.

**定理 3.3**

$$\dim S_2(G)=(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n-1}}\cdot\zeta_K(-1)+\sum_{\tau}a(\tau)\gamma_0(\tau)+w-1\right)$$

## 3.2 $\dim S_2(G)$ の計算

### 3.2.1 $n=2$ の場合

$K=\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ ($D$ は平方因子なし) と書く.

この場合,

$$\dim S_2(G)=\frac{1}{2}\cdot\zeta_K(-1)+\sum_{\tau}a(\tau)\gamma_0(\tau)+w-1$$

となる. Ishikawa ([8], [9]) も Arthur の結果 ([1]) からこの結果を得ていることを注意する.

計算方法

- identity からの contribution: Siegel の公式

$$\zeta_K(-1) = \frac{1}{60} \sum_{b\in\mathbb{Z}, b^2<d_K, b^2\equiv d_K(4)} \sigma_1\left(\frac{d_K - b^2}{4}\right)$$

  を使う．ここに，$d_K$ は $K$ の判別式，そして $n \in \mathbb{N}$ に対して $\sigma_1(n) = \sum_{m|n,m>0} m$ とおいている．

- elliptic fixed point からの contribution: Prestel ([10]) は $a(\tau)$ を計算している．

**Prestel の方法**　Prestel は [10] の中で，elliptic fixed points の同値類を数える問題に取り組んでいる．彼の方法は，elliptic fixed point の集合と $K' \cap M_2(\mathfrak{o}_K)$ という形の order の共役類の集合の間に 1 対 1 対応を作るというものである．ここで，$K'$ は $K$ のある総虚 2 次拡大である．この対応によって，自明でない作用をもつ $M$ によって固定される elliptic fixed point は，order $K[M] \cap M_2(\mathfrak{o}_K)$ に写される．Shimizu は [12] の中で，order の共役類の個数に関する公式を与えているが，Prestel はそれを使って，上のタイプの order でトレース $s$，行列式 $n$ の elliptic matrix を含むものの共役類の数 $l(s,n)$ の公式を与えている．より詳しく述べると次のようになる：$K' = K(\sqrt{s^2-4n})$ とし，$U_K$，$U_{K'}$，$h_K$，$h_{K'}$ をそれぞれの単数群，類数とする．$\delta$ を $K'$ の $K$ 上の相対判別式として，$\mathfrak{a}_0$ を $\mathfrak{a}_0^2\delta = (s^2-4n)$ となる $\mathfrak{o}_K$ の ideal とする．$\mathfrak{a}_0$ は (1) $\mathfrak{a}_0^2|(s^2-4n)$ (2) $\mathfrak{a}_0^2|(c^2-cs+n)$ $(\exists c \in \mathfrak{o}_K)$ をみたす $\mathfrak{o}_K$ の最小な ideal として特徴づけられる．このとき，トレース $s$，行列式 $n$ の elliptic element $M$ を含む $K'$ の任意の order $\mathcal{O}$ に対し，ある $\mathfrak{a}|\mathfrak{a}_0$ と上の (2) をみたす $c$ が存在して，$\mathcal{O} = \mathfrak{o}_K \oplus \mathfrak{a}_0^{-1}\mathfrak{a}(M-c)$ が成立する．$w(\mathfrak{a})$ を $\mathcal{O}$ に対応する elliptic fixed point の位数とし，$\mathfrak{o}_K$ の素 ideal $\mathfrak{p}$ に対して，$\left(\frac{K'}{\mathfrak{p}}\right)$ を Artin 記号とすると次の公式が成立する．

**定理 3.4** (Prestel)

$$l(s,n) = \frac{[U_K : U_K^2]h_{K'}}{2[U_{K'} : U_K]h_K} \sum_{\mathfrak{a}|\mathfrak{a}_0} w(\mathfrak{a}) N_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a}) \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{a}} \left(1 - \left(\frac{K'}{\mathfrak{p}}\right) N_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p}^{-1})\right). \tag{7}$$

これを用いて実2次体の場合に, elliptic fixed points の同値類の数が求められている.

elliptic fixed point からの contribution は

$$a(D)h(-D)+b(D)h(-3D)+c(D)$$

と表せる. ここに, $a(D), b(D), c(D)$ は下記の表のように与えられる. $h(-D), h(-3D)$ はそれぞれ $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{-3D})$, の類数である.

| $D$ | $D\equiv 1(4)$ | $D\equiv 2(4)$ $D\neq 2$ | $D\equiv 3(8)$ $D\neq 3$ | $D\equiv 7(8)$ | $D=2$ | $D=3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $8a(D)$ | 1 | 3 | 10 | 4 | 5 | 3 |

| $D$ | $D\equiv 1,2(3)$ | $D\equiv 3(9)$ $D\neq 3$ | $D\equiv 6(9)$ | $D=3$ |
|---|---|---|---|---|
| $24b(D)$ | 4 | 16 | 8 | 17 |

| $D$ | $D=5$ | $D\neq 5$ |
|---|---|---|
| $5c(D)$ | 2 | 0 |

$a(D)h(-D)$ は位数2の elliptic fixed point からの contribution, $b(D)h(-3D)$ は位数3の elliptic fixed point からの contribution, $c(D)$ は位数5の elliptic fixed point からの contribution である.

- cusp からの contribution: Hammond-Hirzebruch ([6]) によれば, the parabolic contribution $w$ は

$$w=\begin{cases} 0 & K\text{ は負のノルムの unit をもつかまたは }D\text{ は mod 4 で 3 と合同なる素因数をもたないとき} \\ -4\sum_{(d_1,d_2)}\frac{h(d_1)h(d_2)}{w(d_1)w(d_2)} & \text{その他} \end{cases}$$

と表せる. ここに $\sum$ は, $d_K = d_1 d_2$ なる虚 2 次体の判別式対 $(d_1, d_2)$ 全体の上を動く. $h(d_i)$ は $\mathbb{Q}(\sqrt{d_i})$ の類数で, $w(d_i)$ は $\mathbb{Q}(\sqrt{d_i})$ の単数群の位数である $(i = 1,\ 2)$.

この結果の後半の証明は次のように行う. $Cl_K$ を $K$ の ideal 類群, $Cl_K^+$ を $K$ の狭義 ideal 類群とする. 自然な写像 $Cl_K \to Cl_K^+$ の kernel を $P$ とおく. $\mathfrak{o}_K$ は $-1$ のノルムの unit をもたないから, $K^* \to \{\pm 1\}$, $\lambda \mapsto \mathrm{sgn}\ N(\lambda)$ は $(\lambda)$ にのみ依存するから, 準同型 $\tau : P \to \{\pm\}$ が定義できる. $Cl_K^+$ の指標 $\chi$ で, $\chi|P = \tau$ となるものを norm-signature character という. そのような $\chi$ に対して, $L(s, \chi) = \sum_{\mathfrak{a}:\text{整 ideal}} \chi(\mathfrak{a}) N(\mathfrak{a})^{-s}$ と定める. $A \in Cl_K$ に対して, $L(s, \chi, A) = \sum_{\substack{\mathfrak{a}:\text{整 ideal} \\ \mathfrak{a} \in A}} \chi(\mathfrak{a}) N(\mathfrak{a})^{-s}$ とおく. $A \in Cl_K$ に対して, $A^2 \in Cl_K^+$ とみなす. $\chi_1, \ldots, \chi_r$ を real norm-signature character 全体とすると,

$$\sum_{A \in Cl_K} \chi^*(A^2) L(s, \chi, A^2) = \sum_{j=1}^{r} L(s, \chi_j) \tag{8}$$

が成立する. ただし, $\chi^*$ は $\chi$ の複素共役である. さて, cusp 全体と $Cl_K$ の間に 1 対 1 対応があり, Shimizu によれば $A \in Cl_K$ に対応する cusp からの contribution $w_A$ は $w_A = -\pi^{-2}\sqrt{d_K}\chi^*(A^2)L(1, \chi, A^2)$ と表せる. 故に (6) より, $w = -\pi^{-2}\sqrt{d_K}\sum_{j=1}^{r} L(1, \chi_j)$. 各 real norm-signature character $\chi$ は, 判別式の分解 $d_K = d_1 d_2$ と対応していて, $L(s, \chi) = L(s, \chi_{d_1}) L(s, \chi_{d_2})$ となる. ここで, $L(1, \chi_{d_i}) = \frac{2\pi h(d_i)}{\sqrt{|d_i|} w(d_i)}$ であることがよく知られている. これらの結果より上記の結果が従う.

### 3.2.2 $n = 3$ の場合: Galois な場合

$K$ を Galois な総実 3 次体とする. このとき, 次が成立する.

$$\dim S_2(G) = -\frac{1}{4}\zeta_K(-1) - \sum_{r \geq 2} \frac{r-1}{r} a_r + 1$$

となる. ここに, $a_r$ は位数 $r$ の elliptic fixed points の $G$-同値類の個数である.

Weisser の結果を紹介する. $C(f)$ を $\mathbb{Q}$ に 1 の原始 $f$ 乗根を添加して得られる体とする. $K \subset C(f)$ なる最小の整数 $f$ を $K$ の conductor と呼ぶ. $a_r$ に関して, Weisser は次を示した.

**定理 3.5** (Weisser)

(1) $3 \nmid f$ ならば, $a_2 = 4h(-1),\ a_3 = 4h(-3)$,

(2) $3|f,\ f \neq 9$ ならば, $a_2 = 4h(-1),\ a_3 = 16h(-3)$,

(3) $f = 7$ ならば, $a_2 = a_3 = a_7 = 4$ で, $f = 9$ ならば, $a_2 = a_3 = a_9 = 4$.

その他の $r$ に対して, $a_r = 0$. ここに, $h(-a) = h_{K(\sqrt{-a})}/h_K$.

証明には Prestel の公式 (7) を使っている. この定理より, $h(-1),\ h(-3)$ が計算できれば $a_r$ が計算できる. さらに, $\zeta_K(-1)$ がわかれば $\dim S_2(G)$ が計算できる. Weisser の目的は, Galois な総実 3 次体 $K$ に対する Hilbert modular variety の arithmetic genus $\chi(G)$ を求めることである. 論文の中で, $K$ の conductor が 1009 以下の場合に, $\chi(G)$ の値を与えている. Weisser に従って, $h(-1),\ h(-3),\ \zeta_K(-1)$ の計算方法を解説しよう.

**Weisser の方法**　$K'$ を総虚 abel 体, $K$ をその最大実部分体とする. $K' \subset C(r)$ なる $C(r)$ をとる. $\chi$ を mod $r$ の Dirichlet 指標とすると, $\mathrm{Gal}(C(r)/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^\times$ より, $\chi$ を $\mathrm{Gal}(C(r)/\mathbb{Q})$ の指標と見なせる. ここで有限群 $G$ の指標群を $G^\wedge$ と書くことにする. $\theta \in \mathrm{Gal}(C(r)/\mathbb{Q})^\wedge$ を $X := \mathrm{Gal}(C(r)/K')^\perp$ の生成元となるようにとる. そのとき, $K,\ K'$ の解析的類数公式を使うと

$$\frac{h_{K'}}{h_K} = wq \prod_{\chi \in X, \chi(-1)=-1} \left( \frac{\sum_{i=1}^{f_\chi - 1} \chi(i) i}{-2 f_\chi} \right)$$

を得る. ここで使った記号を説明する. $U_{K'},\ U_K$ はそれぞれ $K',\ K$ の単数群, $W$ は $U_{K'}$ に含まれる 1 のべき根全体のなす群とするとき, $w = |W|,\ q = [U_{K'} : WU_K]$ で, $f_\chi$ は $\chi$ の導手. これを $\theta$ で書き表すと,

$$\frac{h_{K'}}{h_K} = wq \left( \sum_{i=1}^{f_\theta - 1} \frac{\theta(i) i}{-2 f_\theta} \right) \left( \sum_{i=1}^{f_{\theta^3} - 1} \frac{\theta^3(i) i}{-2 f_{\theta^3}} \right) \left( \sum_{i=1}^{f_{\theta^5} - 1} \frac{\theta^5(i) i}{-2 f_{\theta^5}} \right)$$

となる. $K'$ が $K(\sqrt{-1})$ または $K(\sqrt{-3})$ のとき, $wq \left( \sum_{i=1}^{f_{\theta^3}-1} \frac{\theta^3(i) i}{-2 f_{\theta^3}} \right) = 1$ を示して, Weisser は次の公式を得た：相対類数 $h(-1),\ h(-3)$ は

$$\frac{h_{K'}}{h_K} = \left| \sum_{i=1}^{f_\theta - 1} \frac{\theta(i) i}{2 f_\theta} \right|^2 \tag{9}$$

によって計算できる.

$\zeta_K(-1)$ について： 上と同様に $\theta \in \mathrm{Gal}(C(f)/\mathbb{Q})^\wedge$ を $\mathrm{Gal}(C(f)/K)^\perp$ の生成元になるようにとる. そのとき, 次の公式が成立する:

$$\zeta_K(-1) = -\frac{1}{12}\left|\sum_{i=1}^{f_\theta-1}\frac{\theta(i)i^2}{2f_\theta}\right|^2. \tag{10}$$

### 3.2.3　$n=3$ の場合：non-Galois な場合

Grundman は Weisser の結果を一般化して次の定理を証明した.

**定理 3.6** (Grundman)　$K$ を総実 3 次体とする.

(1)　$d_K \neq 49,\ 81$ の場合：

(i)　$2 \nmid d_K$ ならば, $a_2 = h(-1)$.

(ii)　$2|d_K$ ならば, (2) の上で分岐する $\mathfrak{o}_K$ の素 ideal $\mathfrak{p}$ に対して,

$$a_2 = \begin{cases} 16h(-1) & \left(\left(\frac{K(\sqrt{-1})}{\mathfrak{p}}\right) = 1 \text{ のとき}\right) \\ 12h(-1) & \left(\left(\frac{K(\sqrt{-1})}{\mathfrak{p}}\right) = 0 \text{ のとき}\right) \\ 40h(-1) & \left(\left(\frac{K(\sqrt{-1})}{\mathfrak{p}}\right) = -1 \text{ のとき}\right) \end{cases}$$

(iii)　$3 \nmid d_K$ ならば, $a_3 = 4h(-3)$.

(iv)　$3|d_K$ ならば, (3) の上で分岐する $\mathfrak{o}_K$ の素 ideal $\mathfrak{q}$ に対して,

$$a_3 = \begin{cases} 12h(-3) & \left(\left(\frac{K(\sqrt{-3})}{\mathfrak{q}}\right) = 1 \text{ のとき}\right) \\ 16h(-1) & \left(\left(\frac{K(\sqrt{-3})}{\mathfrak{q}}\right) = 0 \text{ のとき}\right) \\ 20h(-1) & \left(\left(\frac{K(\sqrt{-3})}{\mathfrak{q}}\right) = -1 \text{ のとき}\right) \end{cases}$$

(2)　$d_K = 49$ ならば, $a_2 = a_3 = a_7 = 4$.

(3)　$d_K = 81$ ならば, $a_2 = a_3 = a_9 = 4$.

ここに $\left(\frac{K'}{\mathfrak{p}}\right)$ は Artin 記号である. 証明には Prestel の公式 (7) を使っている.

Grundman の目的は rational な Hilbert modular variety を求めることである. そのために幾何種数 $p_g$ $(= \dim S_2(G))$ が 0, すなわち $\chi(G) = 1$ となる non-Galois な $K$ を数えあげている. 判別式が小さい 28 個の non-Galois な総実 3 次体 $K$（類数は 1）のうち, 24 個が $\chi(G) = 1$（すなわち, $\dim S_2(G) = 0$）であることを示している.

**Grundman の方法**　彼女は, Shintani の結果を用いて $\zeta_K(-1)$ と相対類数を計算している.

Shintani の結果を復習しよう. $K$ を $n$ 次総実代数体, $\mathfrak{o}_K$ を $K$ の整数環, $U_K$ を $K$ の単数群, $\mathfrak{f}$ を $\mathfrak{o}_K$ の ideal, $U(\mathfrak{f})^+$ を $\mod \mathfrak{f}$ で 1 と合同であるような $\mathfrak{o}_K$ の総正な単数全体のなす群とする.

$$C_j = C_j(v_{j1}, \ldots, v_{jr(j)}) := \{t_1 v_{j1} + \cdots + t_{r(j)} v_{jr(j)} \mid t_i > 0\ \}$$

とおく. ただし, $v_{ji}$ たちは $\mathfrak{f}$ に含まれるベクトルで, $\mathbb{R}_+^n$ の中で 1 次独立なベクトルとする. $C_j$ を open simplicial cone という.

Shintani によれば, 有限添字集合 $J$ が存在して,

$$\mathbb{R}_+^n = \bigcup_{u \in U(\mathfrak{f})^+} \bigcup_{j \in J} u C_j.$$

すなわち, $U(\mathfrak{f})^+$ の $\mathbb{R}_+^n$ への作用に関する基本領域は, $\mathfrak{f}$ の中に生成元をもつ有限個の open simplicial cone の disjoint union として表せる. $n = 3$ の場合には, その基本領域を決定する explicit な方法が知られている (Thomas-Vasquez). $S$ を $K$ の任意の部分集合とする. 各 $j \in J$ に対して

$$R(j, S) = \{(x_1, \ldots, x_{r(j)}) \mid 0 < x_1, \ldots, x_{r(j)} \leq 1,\ \sum_{i=1}^{r(j)} x_i v_{ji} \in S\ \}$$

とおく. $y_1, \ldots, y_n, u$ を変数とする. 各 $j \in J$ に対して

$$L_l(y) = v_{jl}^{(1)} y_1 + \cdots + v_{jl}^{(n)} y_n \qquad (1 \leq l \leq r(j))$$

とおく. $x = (x_1, \ldots, x_{r(j)})$ を実数の組とし, 関数

$$F(u, y) = \prod_{l=1}^{r(j)} \left. \frac{e^{u x_l L_l(y)}}{e^{u L_l(y)} - 1} \right|_{y_k = 1}$$

の原点での Laurent 展開における $u^{n(m-1)}(y_1 \cdots y_{k-1} y_{k+1} \cdots y_n)^{m-1}$ の係数を $(m!)^{-n} B_m(C_j, x)^{(k)} \quad (m = 1, 2, \ldots)$ とおく. $\mathfrak{f}$ と互いに素な $\mathfrak{o}_K$ の ideal $\mathfrak{b}$ に対し,

$$\zeta_K(\mathfrak{b}, \mathfrak{f}, s) = \sum_{\mathfrak{g}} N(\mathfrak{g})^{-s}$$

とおく. ここに, $\sum$ は $\mod \mathfrak{f}$ で $\mathfrak{b}$ と同じ狭義 ideal 類に属するもの全体をわたる.

**定理 3.7** (Shintani)　$m$ を正の整数とする．そのとき

$$\zeta_K(\mathfrak{b},\mathfrak{f},1-m)=m^{-n}N(\mathfrak{b})^{m-1}\sum_{j\in J}\sum_{x\in R(j,\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{f}+1}(-1)^{r(j)}B_m(C_j,x).$$

$K'$ を $K$ の総虚 2 次拡大とする．$\mathfrak{a}_1,\ldots,\mathfrak{a}_h$ を $K$ の ideal 類群の完全代表系で整 ideal からなるものとする．$\mathrm{Reg}(K)$, $\mathrm{Reg}(K')$ はそれぞれ $K$, $K'$ の regulator, $\delta$ は $K'$ の $K$ 上の相対判別式, $\omega$ は $K'$ の中の 1 のべき根の数とする．$\chi$ を Artin 記号 $\chi(\mathfrak{a})=\left(\frac{K'}{\mathfrak{a}}\right)$　$(\mathfrak{a}\subset\mathfrak{o}_{K'})$ によって定義される 2 次指標とする．

**定理 3.8** (Shintani)　$\mathfrak{f}=\mathfrak{o}_K$ として, $\{C_j\}_{j\in J}$ をとる．そのとき

$$\begin{aligned}\frac{h_{K'}}{h_K} &= 2^{n-1}\frac{\omega\mathrm{Reg}(K)}{\mathrm{Reg}(K')[U_K:U_K^+]}\\ &\quad\times\sum_{m=1}^{h}\sum_{j\in J}\sum_{x\in R(j,(\mathfrak{a}\delta)^{-1})}\left\{\chi\left(\left(\sum_{i=1}^{r(j)}x_iv_{ji}\right)\mathfrak{a}_m\delta\right)\frac{(-1)^{r(j)}}{n}\right.\\ &\quad\left.\times\sum_{l}\left(\prod_{i=1}^{r(j)}\frac{B_{l_i}(x_i)}{l_i!}\right)T_K\left(\prod_{i=1}^{r(j)}v_{ji}^{l_i-1}\right)\right\}.\end{aligned}$$

ここに, $T_K$ はトレースで, $\sum_l$ は $l=(l_1,\ldots,l_{r(j)})\in\mathbb{Z}^{r(j)}$ で, $l_i\geq 0$, $l_1+\cdots+l_{r(j)}=r(j)$ をみたすものの上をわたる．

ここからは $n=3$ とし, Grundman の方法を紹介する．$\mathcal{B}$ を $K$ の狭義 ideal 類群の完全代表系で整 ideal からなるものとする．そのとき,

$$\zeta_K(s)=\sum_{\mathfrak{b}\in\mathcal{B}}\zeta_K(\mathfrak{b},\mathfrak{o}_K,s)$$

で, Shintani の定理より

$$\zeta_K(-1)=\frac{1}{8}\sum_{\mathfrak{b}}N(\mathfrak{b})\sum_{j\in J}\sum_{x\in R(j,\mathfrak{b}^{-1})}(-1)^{r(j)}B_2(C_j,x)$$

を得る．$R(j,\mathfrak{b}^{-1})$ については, $R(j,\mathfrak{b}^{-1})$ と $\mathbb{Z}^3$ のある部分集合との間に 1 対 1 対応があることを示して, $R(j,\mathfrak{b}^{-1})$ の点を決定するアルゴリズムを与えている．$B_2(C_j,x)$ については, Bernoulli 数と $C_j$ の生成系を使った explicit な表示を与えている．相対類数については, $K'=K(\sqrt{-1})$, $K(\sqrt{-3})$ の場合のみで十分であり, このとき $\mathrm{Reg}(K)/\mathrm{Reg}(K')=1/4$ であり, $\omega$, $[U_K:U_K^+]$ は容易に計算できる．$R(j,(\mathfrak{a}_m\delta)^{-1})$ については上記と同様にすべての点を決定することができる．また, $\chi(\bullet)$ を計算するためにいくつかの結果を証明している．Grundman の計算は, $\underline{h_K=1}$ を仮定したものであり, $h_K>1$ の場合にそのままでは適用できない．

## 3.3 $\dim S_{2k}(G)$ $(k \geq 2)$ の計算

3.1 の結果より,

$$\begin{aligned}\dim S_{2k}(G) &= \frac{1}{2^{n-1}}\{(-1)^n(2k-1)^n-1\}\zeta_K(-1)+\sum_{\tau}a(\tau)(\gamma_k(\tau)-\gamma_0(\tau)) \\ &\quad +(-1)^n\dim S_2(G)+1.\end{aligned}$$

よって $\dim S_2(G)$ が分かれば, $\dim S_{2k}(G)$ が分かる. Thomas-Vasquez は, $\dim S_{2k}(G)$ を計算して次元の母関数を計算し, $\bigoplus_{k\geq 0} A_{2k}(G)$ の環としての構造を調べている.

## 3.4 代数幾何学による次元公式

### 3.4.1 Tsushima の補題

§1 の記号を使う. $\overline{X}$ を $n$ 次元コンパクト複素多様体, $\Delta$ を $\overline{X}$ 上の reduced divisor で normal crossing なものとする. $X=\overline{X}-\Delta$ とおく. $\Delta$ を既約分解する：$\Delta=\bigcup_{i\in I} D_i$.

各 $i \in I$ に対し, $D_i$ が $n-1$ 次元 toric variety で, $D_i$ 上に induce される divisor $\sum_{j\neq i} D_i\cap D_j$ が $D_i$ の boundary になるとき, $\Delta$ を toric divisor と呼ぶ. $\overline{c}_i=\overline{c}_i(X)$ とおく. $\epsilon_i \in H^2(\overline{X},\mathbb{Z})$ を $D_i$ によって定まる cohomology 類とすると, 補題 2.1 より次が成立する.

**補題 3.1** (Tsushima) $\Delta$ が toric divisor ならば,

$$\overline{c}_k\cdot\epsilon_i=0 \qquad (i\in I,\ 1\leq k\leq n).$$

$c_i=c_i(\overline{X})$ とおく. $\mathcal{T}_i(\overline{X})=T_i(c_1,\ldots,c_i)$ となる多項式 $T_i(x_1,\ldots,x_i)$ を Todd 多項式という. Tsushima の補題より,

$$T_n(c_1,\ldots,c_n)[\overline{X}]=T_n(\overline{c}_1,\ldots,\overline{c}_n)[\overline{X}]+\kappa_n\left[\prod_{i\in I}\frac{\epsilon_i}{1-e^{-\epsilon_i}}\right].$$

$T_n(\overline{c}_1,\ldots,\overline{c}_n)[\overline{X}]$ を $\overline{X}$ の $\Delta$ に関する対数的 arithmetic genus といい, $\overline{\chi}(\overline{X},\Delta)$ と書く. 上の式の左辺は $\overline{X}$ の arithmetic genus $\chi(\mathcal{O}_{\overline{X}})$ であるから,

$$\chi(\mathcal{O}_{\overline{X}})=\overline{\chi}(\overline{X},\Delta)+\kappa_n\left[\prod_{i\in I}\frac{\epsilon_i}{1-e^{-\epsilon_i}}\right]$$

を得る.

### 3.4.2 Hilbert modular variety の arithmetic genus

$K$ は $n$ 次総実代数体とする．$\Gamma$ は $G = SL_2(\mathfrak{o}_K)$ の部分群で，$H^n$ へ自由に作用するものとする．$Y_\Gamma$ を $\Gamma \setminus H^n$ の smooth toroidal コンパクト化とする．そのとき，$\Delta = Y_\Gamma - \Gamma \setminus H^n$ は toric divisor である．$H^n$ の compact dual は $(\mathbb{P}^1)^n$ であるから，Mumford の比例定理より

$$\overline{\chi}(Y_\Gamma, \Delta) = (-1)^n \frac{\mathrm{vol}(\Gamma \setminus H^n)}{\mathrm{vol}((\mathbb{P}^1)^n)} = \frac{\mathrm{vol}(\Gamma \setminus H^n)}{2^n}.$$

ただし，volume の計算には normalized volume form

$$\omega = \left(\frac{-1}{2\pi}\right)^n \bigwedge_{i=1}^n \frac{dx_i \wedge dy_i}{y_i^2}$$

を使っている．$\Gamma$ の各 cusp $x$ に対して，特異点 $x$ を除去するときに現れる divisor たちの第 $i$ 基本対称式を $\sigma_{i,x} \in H^{2i}(Y_\Gamma, \mathbb{Z})$ と書く．すると

$$\kappa_n \left[\prod_{i \in I} \frac{\epsilon_i}{1 - e^{-\epsilon_i}}\right] = \sum_x T_n(\sigma_{1,x}, \ldots, \sigma_{n,x})[Y_\Gamma]$$

と書ける．したがって

**定理 3.9** $Y_\Gamma$ の arithmetic genus を $\chi(\Gamma)$ と書くと

$$\chi(\Gamma) = 2^{-n}\mathrm{vol}(\Gamma \setminus H^n) + \sum_x T_n(\sigma_{1,x}, \ldots, \sigma_{n,x})[Y_\Gamma].$$

### 3.4.3 次元公式

$k > 1$ とする．$L = \Omega^n(\log \Delta)$ と書く．そのとき

$$\begin{aligned}
\dim S_{2k}(\Gamma) &= \dim H^0(Y_\Gamma, \Omega^n \otimes L^{\otimes(k-1)}) \\
&= \chi(\Omega^n \otimes L^{\otimes(k-1)}) \qquad (\text{Kodaira 消滅定理}) \\
&= (-1)^n \chi(L^{\otimes(1-k)}) \qquad (\text{Serre duality}) \\
&= (-1)^n P_n((1-k)\overline{c}_1, c_1, \ldots, c_n)[Y_\Gamma] \qquad (c_1(L) = \overline{c}_1) \\
&= (-1)^n \left(P_n((1-k)\overline{c}_1, \overline{c}_1, \ldots, \overline{c}_n)[Y_\Gamma] + \sum_x T_n(\sigma_{1,x}, \ldots, \sigma_{n,x})[Y_\Gamma]\right) \\
&\qquad (\text{Tsushima の補題})
\end{aligned}$$

となる． $P(k-1)=\chi((\Omega^n_{(\mathbb{P}^1)^n})^{\otimes(1-k)})$ とおくと $P(k)=(2k+1)^n$ であり，Mumford の比例定理より

$$\begin{aligned} P_n((1-k)\bar{c}_1,\bar{c}_1,\ldots,\bar{c}_n)[Y_\Gamma] &= 2^{-n}\mathrm{vol}(\Gamma\setminus H^n)P_n((1-k)\check{c}_1,\check{c}_1,\ldots,\check{c}_n)[(\mathbb{P}^1)^n] \\ &= 2^{-n}\mathrm{vol}(\Gamma\setminus H^n)\chi((\Omega^n_{(\mathbb{P}^1)^n})^{\otimes(1-k)}) \\ &= 2^{-n}\mathrm{vol}(\Gamma\setminus H^n)P(k-1) \end{aligned}$$

である．よって

**定理 3.10** $\Gamma$ を $G$ の torsion-free な部分群とすると, $k>1$ のとき

$$\dim S_{2k}(\Gamma)=(-1)^n\left(2^{-n}\mathrm{vol}(\Gamma\setminus H^n)(2k-1)^n+\sum_x T_n(\sigma_{1,x},\ldots,\sigma_{n,x})[Y_\Gamma]\right).$$

Siegel によれば, $\mathrm{vol}(\Gamma\setminus H^n)=2\zeta_K(-1)[G:\Gamma]$ であるから, 上の次元公式と Shimizu の次元公式の main term は一致する．Shimizu の次元公式において, cusp $x$ からの contribution を $w_x$ と書くと $w=\sum_x w_x$. parabolic contribution を比較して

$$(-1)^n\sum_x T_n(\sigma_{1,x},\ldots,\sigma_{n,x})[Y_\Gamma]=\sum_x w_x$$

となるが, 実際には各 cusp $x$ ごとに contribution は一致する（cf. 織田氏の論説 [17]）：

**定理 3.11** (Ogata, Ishida) 各 cusp $x$ に対して

$$(-1)^n T_n(\sigma_{1,x},\ldots,\sigma_{n,x})[Y_\Gamma]=w_x.$$

次元公式の系として, Freitag の結果の特別な場合が得られる．

**定理 3.12** $\dim S_{2k}(\Gamma)$ を $k$ の多項式とみなすと, 定数項は $\chi(\Gamma)$.

証明． $n$ が偶数のとき, $k=0$ を代入すると定理 3.9 より $\chi(\Gamma)$ となる．$n$ が奇数のとき, $w=(-1)^n\sum_x T_n(\sigma_{1,x},\ldots,\sigma_{n,x})[Y_\Gamma]=0$ より, $k=0$ を代入すると $2^{-n}\mathrm{vol}(\Gamma\setminus H^n)=\chi(\Gamma)$ となる． □

**定理 3.13** $n=2,\ k>1$ のとき, Hilbert modular 群 $G$ について

$$\dim S_{2k}(G)=\left(\frac{2k-1}{2}\right)^2\mathrm{vol}(\Gamma\setminus H^2)+\sum_\tau a(\tau)\gamma_k(\tau)+w$$

略証： $G$ の torsion free な正規部分群 $\Gamma$ をとって, $Y_\Gamma$ 上で有限群 $G/\Gamma$ と $V = \Omega^2 \otimes L^{\otimes(k-1)}$ に正則 Lefschetz 公式を用いる．（詳細については van der Geer [3] を参照されたい.） $\square$

**注意 3.3** $n=2$ の場合は, Hirzebruch によるコンパクト化を使って boundary の部分にある fixed point set からの contribution を計算することができた．しかし, $n$ が 3 以上になるとそのようなよいコンパクト化がないので, 単数群の $\mathbb{R}_+^n$ への作用に関する基本領域を求めて, smooth コンパクト化を与えるように cone 分割して, それを用いて計算することになる．（ただ, $n$ が 4 以上の場合には, 基本領域を求めて cone 分割を与えることは難しいように思われる.）上の定理のような公式を与えることは可能であるが, 各 $G$ ごとに個別に計算しなければいけない.

## 3.5 参考文献


[1] J. Arthur, The Selberg trace formula for groups of $F$-rank one, Ann. Math., **100** (1974), 326-385.

[2] E. Freitag, Lokale und globale invarianten der Hilbertschen Modulgruppe, Invent. Math., **17** (1972), 106-134.

[3] G. van der Geer, “Hilbert Modular Surfaces”, Springer, 1988.

[4] H. G. Grundman, The arithmetic genus of Hilbert modular varieties over non-Galois cubic fields, J. Number Theory, **37** (1991), 343-365.

[5] W. Hammond, The Hilbert modular surface of a real quadratic field, Math. Ann., **200** (1973), 25-45.

[6] W. Hammond and F. Hirzebruch, $L$-series, modular imbeddings, and signatures, Math. Ann., **204** (1973), 263-270.

[7] F. Hirzebruch and G. van der Geer, “Lectures on Hilbert modular surfaces”, Les. Presses de l’Univ. de Motréal, 1981.

[8] H. Ishikawa, The trace of Hecke operators in the space of the ‘Hilbert Modular’ type cusp forms of weight two, Sci. Gen. Edu. Univ. Tokyo, **29** (1979), 1-28.

[9] H. Ishikawa, A table of the dimensions of the Hilbert modular type cusp forms over real quadratic fields, Proc. Japan Acad., **64** (1988), 84-87.

[10] A. Prestel, Die elliptischen Fixpunkte der Hilbertschen Modulgruppen, Math. Ann., **177** (1968), 181-209.

[11] I. Satake, On numerical invariants of arithmetic varieties of $\mathbb{Q}$-rank one, In: "Automorphic Forms of Several Variables, Taniguchi Symposium, Katata, 1983", Birkhäuser, 1984, pp. 353-369.

[12] H. Shimizu, On discontinuous groups operating on the product of upper half planes, Ann. Math., **77** (1963), 33-71.

[13] T. Shintani, On evaluation of zeta functions of totally real algebraic number fields at non-positive integers, J. Fac. Sci. Unv. Tokyo, **23** (1976), 393-417.

[14] E. Thomas and A. T. Vasquez, Rings of Hilbert modular forms, Compositio Math., **48** (1983), 139-165.

[15] R. Tsushima, A formula for the dimension of spaces of Siegel cusp forms of degree three, Amer. J. Math., **102** (1980), 937-977.

[16] D. Weisser, The arithmetic genus of the Hilbert modular variety and the elliptic fixed points of the Hilbert modular group, Math. Ann. **257** (1981), 9-22.

[17] T. Oda, Rank one cusp singularities and the dimension formulae, 第3回整数論オータムワークショップ, アブストラクト.