Koecher-Maass series on tube domains

大阪大学理学研究科・伊吹山知義

(Tomoyoshi Ibukiyama, Osaka Univ.)

Contents

1 序文

この小論では、第1種ジーゲル領域 (=tube domain) における保型形式の Koecher Maass 級数の定義と関数等式の証明を目標とする。ただし、離散群には適当な条件をつける。少なくとも筆者の知る限り、一般の tube domain で定義や関数等式を述べた文献はないので、証明は難しくはないが、一応新結果といえるであろう。証明の手段はジョルダン代数の一般論を用いて、Maass [22] の証明を一般化するもの、ないしは Selberg 理論を部分的には援用するものであり、一般論をよく理解しておかなければならないという点を除けば困難な点は少なかったが、それでもたとえば Fourier 係数の評価の部分など、文献にまったく存在しないと思われる部分もあり、すべてが容易だったわけではない。

Faraut-Koranyi [10] の本は形式的ジョルダン代数、およびそれとカテゴリカルに同値な symmetric cone (self dual homogeneous cone) についての大変わかりやすいまとめである。そのエッセンスは、これらはすべて実対称行列と正定値実対称行列のようなものだと思って取り扱えるということであって、代数的な定式化の一つの歴史的な成果なのであろう。彼らの本では係数体を実数体と複素数体に限っているが、これは記述の簡潔さの原因でもあり、大いに参考にした。

第2ー4節は、Faraut-Koranyi [10] の本よりの抜粋である。一般の標数 0 の体や代数体の場合は、Jacobson [15], Tsao [29] などを参照されたい。もちろん、初めて証明したのは彼らではないであろうが、歴史はよく知らないので歴史は彼らの本のノートなどを参照されたい。なお、 Faraut-Koranyi に述べられている命題については引用箇所を明らかにして原則として証明はつけないが、Exercise の部分や簡単に得られる系だが書かれていないものについては証明をつける。

第5節は Maass の本の定義をまねて量指標の定義を試みたものである。ここで関数等式にとって本質的な積分変換公式（一種のフーリエ変換公式）を求める。当初、この積分変換公式は Maass [22] を模倣する事により求めたので、その方法をまず書くが、ワークショップのおりに佐藤文広氏より、不変作用素の Selberg 式一般論が公式成立の根拠ではないかとの指摘を受けた。なるほど変換公式の証明は Selberg の論法で帯球関数の固有値などの計算に帰着でき、その場合には当然その部分の具体的な計算は別におこなう必要が生じるが、帯球関数が Faraut-Koranyi に既に取り扱われていることもあって、話はずっと見通しがよくなる。この方針の別証明を追加することにした。ついでに Selberg 理論の関連部分の解説を書いておいた。

なお、Maass では、量指標は正定値対称行列上の関数として定義されているが、もちろ

ん本来、cone の自己同型群の特殊な保型形式と思うのが自然であろう。すると、全体をアデーリックに書いた方がよいかもしれないと言うことにもなるが、今のところ特別のメリットも感じなかったので実数上だけで書いておいた。

第6節は、いわゆる rational tube domain 上の保型形式の話である。代数群についての仮定は十分に考えたわけではない。Karel [16] の仮定を大部分踏襲している。この節の主要結果は正則保型形式のフーリエ係数の評価であって、Koecher Maass 級数を定義するためには、その収束の証明に必要なため、避けて通れない部分である。カスプ形式でない保型形式についてのフーリエ係数の評価式というのは Siegel modular の場合を除いて一般論を見たことがなく、私自身はかなり苦労した。結局 Maass の本のようなやり方を踏襲するのをやめて、Harish-Chandra 流の moderate growth の条件と、Siegel set を用いた reduction theory を用いることにした。ついでに [1] にいくつかミスプリントがあるのを発見したので指摘しておいた。

第7節の関数等式の証明は、Maass [22] の証明を、一般の symmetric cone の道具立てで書き換えただけである。その意味では難しくないが、整理の労力程度のことはあった。また、ベクトル値で書く方が望ましいとは思ったが、一般化は理屈としては明らかであって、整理の時間の関係で省略した。

第8節は Koecher Maass 級数を用いた逆定理というのはどういう性質のものであるかについて若干のコメントを述べるにとどめた。意外にそのエッセンスが認識されていないように思ったからである。詳しくは菅野氏の解説を参照されたい。

2　形式的実ジョルダン代数と symmmetric cone

形式的実ジョルダン代数の代数的な基礎を復習する。実は分類はよく知られているが、一般論の利点は分類を使わない統一的な記述にあると思うので、あえて個別的な説明はしない。

2.1　ジョルダン代数

以下では、可換体 K 上の algebra A というのは、A が K 上のベクトル空間であり、A には積が定義されていて左右の分配法則をみたし、K の元 k と A の元 a, b について $k(ab) = (ka)b = a(kb)$ をみたすものとする。以上で特に、積に関する結合法則は仮定していない点に注意されたい。可換体 K 上のベクトル空間 V が ジョルダン代数というのは、V が K 上の algebra であって、任意の $x, y \in V$ について次の 2 つをみたすことである。

$$
\begin{aligned}
&xy = yx, \\
&x^2(xy) = x(x^2y).
\end{aligned}
$$

以後、V は K 上のベクトル空間としては有限次元の場合のみを考える。また、話を簡単にするために乗法の単位元を持つと仮定する。上の条件より V は power associative algebra（べきが矛盾なく定義される代数）になり、一つの元 x で生成される代数 $K[x]$ が可換であるので、x の最小多項式が定義される。特に V の元の最小多項式の次数には最大値があ

り、これを V のランクという。以後 V のランクを r, V の次元を n と書くことにする。$r \leq n$ は明らかであるが、一般には $r < n$ である。最小多項式の次数がランクと一致する元を regular element という。V には、個々の最小多項式とは別に、いわゆる generic な最小多項式（ふつうでいえば固有多項式のようなもの）が存在する。すなわち、λ と $x \in V$ の座標に関する多項式

$$f(\lambda; x) = \lambda^r - a_1(x)\lambda^{r-1} + a_2(x)\lambda^{r-2} - \cdots + (-1)^r a_r(x)$$

であって、各 $a_j(x)$ が x の座標についての j 次の斉次多項式であり、任意の regular element x_0 について $f(\lambda, x_0)$ が x_0 の最小多項式になり、さらに任意の V の元 x_0 について $f(x_0, x_0) = 0$ となるような $f(\lambda, x)$ が存在する。(Faraut-Koranyi は $K = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ と仮定しているが、一般は Jacobson [15] Chapter VI をみよ。) V の (regular とは限らぬ) 任意の元 x のトレースと行列式が $tr(x) = a_1(x)$ および $\det(x) = a_r(x)$ により定義される。単位元 e については $tr(e) = r$, $\det(e) = 1$ である。$x \in V$ は、ある $y \in K[x]$ について $xy = e$ となるとき invertible という。(これは x を左から V にかける「左平行移動」が線形変換として可逆という条件よりは弱い。) $\det(x) \neq 0$ と x が invertible という条件は同値である。V の可逆元の全体を $V^\times$ と書くことにする。

2.2　形式的実ジョルダン代数

以下しばらく K は実数体 $\mathbb{R}$ と仮定する。$\mathbb{R}$ 上のジョルダン代数 V が次の同値な 2 つの条件のいずれかをみたすとき形式的実、または Euclidean という。
(1) $x, y \in V$ について $x^2 + y^2 = 0$ ならば $x = y = 0$.
(2) V には正定値な内積 (u, v) があって、x, u, v について $(xu, v) = (u, xv)$ となる。
実はこの正定値な内積として、$(x, y) = \mathrm{tr}(xy)$ と取ることができる。

形式的実ジョルダン代数 V を対称行列なみに扱うために、スペクトル分解の説明をする。V の元 e_i は $e_i^2 = e_i$ のとき巾等元という。巾等元 e_i と e_j が $e_ie_j = 0$ のとき、直交するという。巾等元 e_0 が $e_0 = e_1 + e_2$ と、2 つの 0 でない直交する巾等元 e_1, e_2 の和に表せないとき、 e_0 は原始的巾等元という。e_1, ... ,e_s が互いに直交する原始的巾等元ならば、$s \leq r$ である。特に r 個からなるものを、ジョルダン座標と言う。任意の x に対して、ジョルダン座標 e_1,...,e_r を適当にとると、$x = \sum_{j=1}^r x_j e_j$ となり、$\det(x) = x_1 \cdots x_r$, $\mathrm{tr}(x) = x_1 + \cdots + x_r$ となる。これを x のスペクトル分解という。形式的実ジョルダン代数の部分集合 Ω を

$$\overline{\Omega} = \{x^2; x \in V\}$$

と定義する。$\overline{\Omega}$ の（普通の位相空間としての）内部をΩ と書くと、これは open symmetric cone (つまり non-degenerate self-dual homogeneous cone) になっている。その正確な意味は次の通りである。

1. Ω は空集合ではない。

2. Ω は convex cone（凸体）である。すなわち、任意の正の数λ, μ と $x, y \in \Omega$ に対して、$\lambda x + \mu y \in \Omega$ である。

3. self-dual である。すなわち、Ω の open dual cone

$$\Omega^* = \{y \in V; (x, y) > 0 \text{ for all } x \in \overline{\Omega} \backslash \{0\}\}$$

をとると、$\Omega^* = \Omega$ である。

4. Ω は homogeneous cone である。すなわち群 $G(\Omega)$（定義は後述）が推移的に作用している。

実は $\Omega = \{x^2; x \in V^\times\}$ であり、また $x \in \Omega$ というのは、x のスペクトル分解$\sum_{j=1}^r x_j e_j$ において、$x_j > 0$ $(j = 1, ..., r)$ というのと同値である。さらに$\overline{\Omega}$ は Ω の V 内での閉包でもあり、$x_j \geq 0$ と同値である。いくつか群を定義する。$GL(V)$ で普通の（実数体上の）一般線形群、また $End(V)$ で線形変換全体のなす環をあらわす。Ω の自己同型群を $G(\Omega) = \{g \in GL(V); g\Omega = \Omega\}$ と定義し、その単位元の連結成分を G とおく。$K = G \cap O(V)$ ($O(V)$ は (x, y) に関する直交群）とすると、$K = \{g \in G; ge = e\}$ である。$Aut(V)$ を V のジョルダン代数としての自己同型群とすると、$Aut(V) = G(\Omega) \cap O(V)$ であり、単位元での連結成分は $Aut(V)^0 = K$ となる。

後で必要になる重要なオペレーションを導入する。$x \in V$ に対して、V 上の左移動 $L(x)$ を $L(x)y = xy$ で定義する。もちろん $L(x) \in End(V)$ と考えている。また、$P(x) = 2L(x)^2 - L(x^2)$ と定義する。P を V の 2 次表現という。普通の対称行列における $Y \to XYX$ の一般化と思えばよい。（ただし、一般には結合法則が成り立たないので、このような簡便な表記は存在しない。）次のような公式がなりたつ。$Tr(L(x)) = (n/r)\mathrm{tr}(x)$, $P(x^{-1}) = P(x)^{-1}$, $D_u(x^{-1}) = -P(x)^{-1}u$, $Det(P(x)) = (det(x))^{2n/r}$, $\det(P(y)x) = (\det y)^2 \det(x)$. 以上で det はジョルダン代数の前に定義した「行列式」であり、Det は $GL(V)$ の元と思ったときの行列式を表す。D_u は $u \in V$ の方向微分である。ついでながら、$\det(gx) = Det(g)^{r/n} \det(x)$ である。実は $P(x)e = x^2$ であるから cone との関係で言えば

$$\Omega = \{P(x)e; x \in V^\times\}$$

であり、$x \in V^\times$ に対しては $P(x) \in G(\Omega)$ なのである。

2.3 Peirce 分解

任意の巾等元 c について、$L(c)$ の固有値 α は$\alpha = 0, 1, 1/2$ のいずれかであり、また $L(c)$ は対角化可能である。よって、それぞれの固有空間を $V(c, \alpha)$ と書くと、$V = V(c, 0) + V(c, 1) + V(c, 1/2)$ である。これを Peirce 分解と言うが、これでは粗すぎるので、もう少し細かく分解する。V の直交原始的巾等元 e_1, ...,e_r を 1 組固定する。$V_{ii} = V(e_i, 1)$, $V_{ij} = V(e_i, 1/2) \cap V(e_j, 1/2)$ とおくと、$V = \oplus_{1 \leq i \leq j \leq r} V_{ij}$（計量ベクトル空間としての直交直和）となる。この分解のことも Peirce 分解と言うことがある。ここで $V_{ii} = \mathbb{R}e_i$ であり、

また、V が単純ならば、$i < j$ について V_{ij} の次元は直交原始的巾等元の選び方によらずに一定である。以下、この次元 $\dim(V_{ij})$ を常に d と書く。　私は d についての標準的な名称があるのかどうかよく知らないが（たとえば Karel [16] では Schur index と呼ばれているが)、$dim(V) = r + dr(r-1)/2$ が明らかだから、少し無駄なパラメーターとも言えなくもない。あとで必要になる補題を証明しておく。

補題 1 *Peirce* 分解に応じて $x, y \in V$ について

$$x = \sum_{i=1}^{r} x_i e_i + \sum_{i<j} x_{ij}, \qquad y = \sum_{i=1}^{r} y_i e_i + \sum_{i<j} y_{ij},$$

$(x_i,\, y_i \in \mathbb{R},\, x_{ij},\, y_{ij} \in V_{ij}$) と書くと、次が成り立つ。

1. $tr(x) = x_1 + \cdots + x_r$. 特に $tr(x_{ij}) = 0$.
2. $x \in \Omega$ ならば $tr(x_{ij}^2) = (x_{ij}, x_{ij}) \leq 2x_i x_j$.
3. $x, y \in \Omega$ ならば、$(x_{ij}, y_{ij}) \leq tr(x)tr(y)/2$ である。さらに
$$tr(xy) \leq tr(x)tr(y) \times r(r+1)/2, \text{ であり } tr(P(x)y) \leq tr(x^2)tr(y) \times r(r+1)/2$$
でもある。
4. 任意の V *valued* な κ 次の斉次多項式 R に対して、ある正の定数 a が存在して
$$tr(R(x)) \leq a\ tr(x)^{\kappa}$$
が成り立つ。
5. V が単純なら $\det(x) \leq \prod_{i=1}^{r} x_i$. *(Hadamard* の不等式の一般化）
6. V が単純で、$x_1,\ldots,x_m \in V$、かつ $\det(x_1)\cdots\det(x_m) = 1$ のような、x_i の組に対し $tr(x_1) + \cdots + tr(x_m) \geq rm$ となる。

証明：

1. V から V_{ij} $(i \neq j)$ 成分への直交射影は $4L(e_i)L(e_j)$ で与えられる (FK p.68.) よって、$tr(4L(e_i)L(e_j)x) = 0$ を示せばよい。$tr(xy) = (x, y)$ は "associative" であったから $tr(4L(e_i)L(e_j)x) = 4tr(e_i(e_j x)) = 4(e_i, L(e_j)x) = 4(L(e_j)e_i, x) = 4(e_j e_i, x) = 4(0, x) = 0$ となる。よって、示された。

2. これは FK p.79–80 の exercise である。証明は次の通り。まず、$u \in V_{ij}$ とすると、V_{ij} の定義より $e_i u = e_j u = u/2$ であり、また FK p.65 より $u^2 = (u,u)(e_i+e_j)/2$ である。ここで $(u,u) = 2$ と仮定し、λ, μ を $\lambda^2+\mu^2 = 1$ なる実数とし、$c = \lambda^2 e_i + \mu^2 e_j + \lambda\mu u$ と置くと $c^2 = c$ となることが形式的な計算で確かめられる。よって $c \in \Omega$ であるが、Ω は self dual であるから、任意の Ω の元 x について $(c, x) > 0$ である。よって、c を正の定数倍して、λ, μ を任意の実数としても $tr(cx) = (c, x) \geq 0$ が成り立つ。$tr(V_{ij}) = 0$ $(i \neq j)$ より、$tr(cx) = \lambda^2 tr(x_i e_i) + \mu^2 tr(x_j e_j) + \lambda\mu(u, x_{ij}) \geq 0$ が任意の実数 λ, μ について成り立つのだから、判別式は 0 以下で、$(u, x_{ij})^2 \leq 4x_i x_j$ である。$u = \sqrt{2}x_{ij}/||x_{ij}||$ とすると、$(u,u) = 2$ となり、これから、$(x_{ij}, x_{ij}) \leq 2x_i x_j$ となる。

3. 内積に関するふつうのシュワルツの不等式より $|(x_{ij}, y_{ij})| \leq ||x_{ij}||\cdot||y_{ij}||$ であり、(2) よりこれは $2\sqrt{x_i x_j y_i y_j}$ 以下であるが、相加相乗平均により $(x_i + x_j)(y_i + y_j)/2$ 以下でもあり、これはあきらかに $tr(x)tr(y)/2$ 以下でもある。また、$tr(xy) = \sum_{i=1}^r x_i y_i + \sum_{i<j} tr(x_{ij} y_{ij})$ となるので、$tr(xy) \leq r(r+1)tr(x)tr(y)/2$ である。また、定義より $\mathrm{tr}(P(x)y) = 2\mathrm{tr}(x(xy)) - \mathrm{tr}(x^2 y)$ であるが、トレースの結合性より、$\mathrm{tr}(P(x)y) = \mathrm{tr}(x^2 y)$ となり、前に帰着する。

4. $R(x) = x^\kappa$ の時だけ示せばよい。$tr(x^{\kappa_1} x^{\kappa_2}) \leq Ctr(x^{\kappa_1})tr(x^{\kappa_2})$ （C は正定数）となるのは（3）の通りである。以下帰納法で示される。

5. これは FK p.121 の Exercise である。証明は、いわゆる triangular group の元を用いて $x = t(u)e$ とかける (FK p.113。) FK p.114 より、$\det(t(u)e) = u_1^2 \cdots u_r^2$ であるが、x の $\{c_i\}$ に関する Peirce 分解をもちいて x, u の $V(c_i, 1)$ 成分を $x_i c_i, u_i c_i$ と書けば、$(x|c_i) = x_i$ は明らかであり、また FK p.113 より、 $u_i^2 \leq x_i$ となる。

6. x_i などをスペクトル分解して考えれば、$\prod_{i=1}^m \det(x_i) = \prod_{i=1}^{rm} \lambda_i = 1$, $\sum_{i=1}^m \mathrm{tr}(x_i) = \sum_{i=1}^{rm} \lambda_i$ となる正の実数 λ_i $(1 \leq i \leq rm)$ がある。ここで相加相乗平均の不等式を用いれば、題意は明らか。q.e.d.

2.4 代数体上の形式的実ジョルダン代数

代数体に限らず、任意の（少なくとも標数 0 の）体上でも、Peirce 分解は同様にできる。すなわち V が体 k 上のジョルダン代数として、簡単のために k は実数体の部分体で $V \otimes \mathbb{R}$ が formally real としておこう（実際はここまで必要ないが、我々の使う状況だとこれで十分なので。）このとき、V における直交巾等元の極大系 $e_1, \ldots, e_s$（よって和は単位元）をとると、V_{ij} を前と同様に $L(e_k)$ の固有値 $(\delta_{ik} + \delta_{jk})/2$ に対する同時固有空間とすれば、$V = \sum_{i=1}^s V_{ii} \oplus \sum_{i<j} V_{ij}$ であり、積の行き先などはまえと同様である。一般に e_i は、$\mathbb{R}$ までテンソルすると原始的ではなくなるかもしれないし、V_{ii} は 1 次元とは限らない。いずれにせよ、テンソル $\mathbb{R}$ して考えてみれば、たいていのことは想像がつく。

ついでであるから、代数体上のジョルダン代数の具体的な実現をみるために、記号を導入する。一般に A を標数が 2 でない体 K 上の（結合的とは限らない）algebra とする。J

を A の involution すなわち位数 2 の A の逆同型とする。A 内の J に関する対称元の集合を

$$\mathcal{H}(A,J) = \{x \in \mathcal{H}(A,J); x = Jx\}$$

と表すことにする。$x \cdot y = (xy + yx)/2$ とおく。一般には $\mathcal{H}(A,J)$ はジョルダン代数にはならないが、構成の手段を与える。以下 5 種類のジョルダン代数を与えよう。その前に 1 つあまり標準的でない algebra を説明しておく。W を標数が 2 でない体 K 上の有限次ベクトル空間とし、f を W 上の非退化対称双 1 次形式とする。$V(W,f) = K \oplus W$ とおいて、$V(W,f)$ の元の積を $(k_1,w_1)\cdot(k_2,w_2) = (k_1k_2 + f(w_1,w_2), k_1w_2 + k_2w_1)$ と定義すると、これはジョルダン代数になる。

以下では F は総実代数体とする。次の 4 つの行列を考えよう。

1. $A = M_m(F)$.
2. $A = M_m(\mathcal{D})$, $\mathcal{D}$ は F 上の $2s^2$ 次元の cyclic division algebra で、第 2 種の正定値 involution を持つもの。
3. $A = M_m(D)$, D は F 上の central division quaternion algebra,
4. $A = M_m(\mathcal{O})$, $\mathcal{O}$ は F 上の central division octanion algebra.

以上の用語は標準的だと思うので解説はしない。ただし $M_m(A)$ は algebra A 上の m 次の行列のなす環をあらわす。$F, \mathcal{D}, D, \mathcal{O}$ には標準的な正定値の involution (main involution $*$) があり、これより、行列環上でも involution $x \to^t x^*$ が引き起こされる。これをもとにして、任意の $g \in GL(A)$ に対して、少なくとも A が結合的ならば、$g^{-1}\,{}^t x^* g$ なる involution が考えられる。(結合的でなくても g に適当な制限をつければ可能である。) これをここでは J_g と書こう。

命題 1 *V を(実数体上の)単純形式的実ジョルダン代数とし、F を総実代数体とする。このとき V の F-form V_F は次のどれかで得られる。*

1. $\mathcal{H}(M_m(\mathcal{D}), J_d)$
2. $\mathcal{H}(M_m(F), J_d)$
3. $\mathcal{H}(M_m(D), J_d)$
4. $V(W,f)$, W は F 上のベクトル空間
5. $\mathcal{H}(M_3(\mathcal{O}), J_d)$

ただし、以上で記号は前の通りであり、 involution J_d は、対角行列 $d = diag(d_1, ..., d_m)$ (各 $d_i \in F$ は総正な元)に対して決まる involution とした。

一般にも、中心的単純ジョルダン代数は、rank が 1 ならば、1 次元のものに限り（これはそもそも閉体上で決して自明ではない, cf. Jacobson, Proc. N. A. S. 42, 1956）、rank が 2 ならば、みな上記の非退化 2 次形式からくる代数であり、rank が 3 以上なら involution を持つ中心的「単純」結合代数（ここで単純というのは involution 不変なイデアルのないこと）の対称元、または例外型のジョルダン代数になる。(cf. [15] p. 203 Theorem 8, p. 210 Theorem 11.)

3 Symmetric cone のガンマ関数

3.1 三角群

実対称行列は、実上三角行列 g を用いて、$g\,{}^t g$ と表される。これの一般化を復習する。V のジョルダン座標 e_1, ... ,e_r を一つ固定し、$x = \sum_{j=1}^{r} x_j e_j + \sum_{j<k} x_{jk}$ と書く。添え字の集合 $\{(i,j); 1 \leq i,j \leq r\}$ に辞書式順序を入れておく。さて、x によらない $\lambda_{ij} > 0$ について、G の元 t で、

$$\begin{aligned}(tx_{kl})_{ij} &= 0 \text{ if } (i,j) < (k,l) \\ (tx_{ij})_{ij} &= \lambda_{ij} x_{ij}\end{aligned}$$

となるもの全体の集合を T とする。T は群であり、これを三角群と呼ぶ。さらに、上で $\lambda_{ij} = 1$ となる元全体は正規部分群をなし、これを N と書く。また、$A = \{P(a); a = \sum_{j=1}^{r} a_j e_j\}$ とおくと、$T = AN = NA$, $G = TK = NAK$ であり、これは岩沢分解の特殊例である。特に

$$V_+ = \{u = \sum_{j=1} u_j e_j + \sum_{j<k} u_{jk} \in V; u_j > 0\ (1 \leq j \leq r)\}$$

とすると V_+ から T への全単射 t が存在して、単位元 e について $x = t(u)e$ とおくとき、

$$\begin{aligned}x_j &= u_j^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{j-1} ||u_{kj}||^2 \\ x_{jk} &= u_j u_{jk} + 2\sum_{l=1}^{j-1} u_{lj} u_{lk}\end{aligned}$$

となる。（これでは写像 t の説明にはなっていないが、省略する。FK p.106–113 を参照されたい。）dx, du を V 上の内積に関するルベーグ測度とすると $dx = 2^r \prod_{j=1}^{r} u_j^{d(r-j)+1} du$ となる。

ちなみに、T の元は、V を行列表示するとき、本当に三角行列で実現できる。正確に記述するには $G(\Omega)$ の Lie 環などで述べるのが望ましいであろう。これは §7 で必要があって少し触れることになる。

3.2　ガンマ関数の定義と公式

通常のガンマ関数 $\Gamma(s)$ の一般化として、symmetric cone のガンマ関数を考える。この節では、V は単純実形式的ジョルダン代数とする。V のジョルダン座標 $e_1, \ldots, e_r$ を一つ固定し、巾等元 $e^{(j)} = e_1 + \cdots + e_j$ についての固有空間 $V^{(j)} = V(e^{(j)}, 1)$ を考える。$x \in V$ について、V を $e^{(j)}$ について Peirce 分解し、（すなわち $V = V^{(j)} + V(e^{(j)}, 0) + V(e^{(j)}, 1/2)$ と分解し）x の $V^{(j)}$ 成分の、$V^{(j)}$ 内でのノルム（主小行列式）を $\Delta_j(x)$ と書くことにする。特に $j = r$ の時、r を省略して $\Delta_r(x) = \Delta(x)$ と書く。$\Delta(x) = \det(x)$ である。多重添え字 $s = (s_1, \ldots, s_r) \in \mathbb{C}^r$ に対して

$$\Delta_s(x) = \Delta_1(x)^{s_1 - s_2} \Delta_1(x)^{s_2 - s_3} \cdots \Delta_r(x)^{s_r}$$

とおく。

命題 2 *cone* のガンマ関数 $\Gamma_\Omega(s)$ を

$$\Gamma_\Omega(s) = \int_\Omega e^{-tr(x)} \Delta_s(x) \Delta(x)^{-n/r} dx$$

と定義するとき、

$$\Gamma_\Omega(s) = (2\pi)^{(n-r)/2} \prod_{j=1}^{r} \Gamma(s_j - (j-1)\frac{d}{2})$$

となる。

ここで $\Delta(x)^{-n/r} dx$ は Ω 上の G 不変測度である。証明は FK p.123. 特に 1 つの変数 λ についても$\lambda = (\lambda, , \ldots, \lambda)$ とみなして、$\Gamma_\Omega(\lambda)$ を上と同様に定義する。いかでは大抵は、このようなガンマ関数を扱うことになる。ここから派生する解析的な公式は数多くあり、いずれもそれなりに重要であるが、あとで使用しないので省略する。なお、dx の取り方は内積 $tr(xy)$ によって、測度のサイズを決めているわけであるが、たとえば対称行列で、

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

に当たるもののノルムは、計算してみればわかるとおり $\sqrt{2}$ になる。このため、たとえば対称行列の空間で、通常の行列表示における成分についてルベーグ測度 dx_{ij} をとって積 $\prod_{i \le j} dx_{ij}$ をとったものとは、測度が少しかわっている。このため公式に現れる定数も少しずつずれているので注意が必要である。

3.3　積分の収束

積分の収束条件を与える次の命題をあげておく。この命題と証明は FK p.132 によるが、以下で基本的に重要なので（FK では Scwartz 空間の元に対してという、言葉上は下と異なる記述がしてあるので）証明を与えておく。

命題 3 $\phi(x)$ を形式的実な単純ジョルダン代数 V の *symmetric cone* Ω 上の連続関数で、任意の正の数 N に対して $|\phi(x)| \leq tr(x)^{-N}$ が成り立つものとする。このとき、$Re(s) > d(r-1)/2$ となる任意の $s \in \mathbb{C}$ について、積分

$$T_s(\phi) = \int_\Omega \phi(x) det(x)^{s-n/r} dx$$

は絶対収束する。ここで dx は内積 $tr(xy)$ に関する直交座標系での V のルベーグ測度である。

証明：ジョルダン座標系を一つ固定し、それについて V_+ より三角群 T への上への同型 t を決めておく。$x = t(u)e$ として積分の座標変換を行うと、

$$T_s(\phi) = \int_{V_+} \phi(t(u)e)(u_1 \cdots u_r)^{2s} 2^r \prod_{j=1}^{r} u_j^{-d(j-1)-1} du$$

となる。また、

$$\mathrm{tr}(x) = \sum_{j=1}^{r} u_j^2 + \frac{1}{2} \sum_{j<k} ||u_{jk}||$$

である。相加相乗平均の不等式より

$$\frac{1}{2} r(r+1) (\prod_{j=1}^{r} (1+u_j) \prod_{j<k} (1+||u_{jk}||))^{2/r(r+1)} \leq \sum_{j=1}^{r} (1+u_j) + \sum_{j<k} (1+||u_{jk}||)$$

であるが、一般に a が十分大ならば $1 + a < a^2/2$ であるから、任意の $N > 0$ に対してある正の定数 C が存在して、$u_j, ||u_{jk}||$ 十分大で

$$|\phi(t(u)e)| \leq C \prod_{j=1}^{r} (1+u_j)^{-N} \prod_{j<k} (1+||u_{jk}||)^{-N}$$

となる。積分は $Re(s) > d(r-1)/2$ ならば、原点の近くで収束しているのは明らかだから、u_j、$||u_{jk}||$ が十分大の所のみが問題であるが、上の不等式より $T_s(\phi)$ の収束は $N > m + b$ で積分

$$\int_{\mathbb{R}^m} z^b (1+||z||)^{-N} dz$$

が収束することに帰着する。q.e.d.

注意：T_s はつまりは、tempered distribution になる。

4 Symmetric cone の不変微分作用素

この節は FK p. 290–298 に基づく。（対称行列のときにに限れば、Maass [22] にも述べられているが、FK の単純明快さに比較すると極端にわかりにくい。）以下では V は単純形式的実ジョルダン代数とする。V の座標 $(x_1, ..., x_n)$ を適当に固定して、$\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ について

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} = \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^{\alpha_j}$$

と書く。Ω 上の関数に対する、C^∞ 級の関数を係数に持つ微分作用素

$$D = \sum_{|\alpha| \le N} a_\alpha(x) \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha}$$

を考える。D に対して、

$$\sigma_D(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \le N} a_\alpha(x) \xi^\alpha$$

$(\xi^\alpha = \prod_{j=1}^{n} \xi_j^{\alpha_j})$ を D のシンボルという。一方、Ω 上の　C^∞ 関数 f と G の元 g に対して、作用 $(\tau(g)f)(x) = f(g^{-1}x)$ を考える。任意の $g \in G$ について$\tau(g)D = D\tau(g)$ のとき、D を不変微分作用素という。不変微分作用素全体のなす環を $\mathcal{D}(\Omega)$ と書く。実は C^∞ 係数の不変微分作用素は、多項式係数になることがわかり、従ってシンボルは x と ξ の多項式になる。$g \in G$ に対して、g^* で内積に関する adjoint（すなわち $(gx, y) = (x, g^*y)$ ）とすると、D が不変であるための必要十分条件は、任意の $g \in G$ について$\sigma_D(gx, \xi) = \sigma_D(x, g^*\xi)$ となることである。また、この条件を満たす x と ξ の多項式の空間 $P(V \times V)^G$ と不変微分作用素の空間は、加群としては同型である。（環としては同型ではない。）また、$P(V)^K$ を ξ に関する K 不変な多項式の環とすると、$p(x, \xi) \in P(V \times V)^G$ に $p(e, \xi) \in P(V)^K$ を対応させることにより、$P(V \times V)^G$ と $P(V)^K$ は環同型になる。よって、

$$\det(\lambda e - \xi) = \lambda^r - a_1(\xi)\lambda^{r-1} + \cdots + (-1)^r a_r(\xi)$$

を generic な「固有多項式」とすると、各 $a_i(x)$ は K 不変であるが$\sigma_{M_j}(e, \xi) = a_j(\xi)$ となる、不変微分作用素 M_j が定まることになる。特に、$M_r = \det(x)\det(\frac{\partial}{\partial x})$ である。また、M_j $(j = 1,...,r)$ は $\mathcal{D}(\Omega)$ の環としての生成元である。さて、これとは異なる生成元を与えておく。任意の複素数 s に対して、Ω 上の微分作用素を

$$D_s = \det(x)^s M_r \det(x)^{-s}$$

とおく。これは、もう少し正確に言えば

$$D_s f(x) = \det(x)^{s+1}(\det(\frac{\partial}{\partial x})(\det(x)^{-s} f(x)))$$

という意味である。$x \in \Omega$ ならば、$\det(x) > 0$ であるから、$\det(x)^s$ は「普通」に定義すればよい。これを一見しただけでは、不変微分作用素であることがそれほど自明という訳でもないが、実は非負整数 k に対して

$$(\alpha)_{<k>} = \prod_{i=1}^{k}(\alpha - \frac{d}{2}(i-1))$$

とおくとき

$$D_\alpha = \sum_{k=0}^{r}(\alpha)_{<k>}M_{r-k}$$

が成り立っているので不変であることがわかる。ただしここで $M_0 = id$ とおいた。さらには、$D_{jd/2}$ $(j = 0,...,r-1)$ も $\mathcal{D}(\Omega)$ の生成元である。$\Delta_s(x)$ は $\mathcal{D}(\Omega)$ の同時固有関数であり、結果的に $\mathcal{D}(\Omega)$ が可換環であることもわかる（可換なことは一般論でもわかるが。）

さて、$u(x)$ が $\mathcal{D}(\Omega)$ の同時固有関数ならば、M_k の同時固有関数でもあり、$D_s u(x) = f(s)u(x)$ となる s の monic な r 次多項式が存在するのは前の公式をよく見ればわかる。

最後にあとで大切になる adjoint operator を考察する。$D \in \mathcal{D}(\Omega)$ に対して、Ω 上の C^∞ 関数 f, g でサポートがコンパクトなものに対して、

$$\int_\Omega (Df(x))\overline{g(x)}\det(x)^{-n/r}dx = \int_\Omega f(x)\overline{D^* g(x)}\det(x)^{-n/r}dx$$

となるような微分作用素 D^* を D の adjoint という。実は D に対して、D^* を具体的に与えることができる。(cf. FK p. 207). すなわち、σ を $\sigma(x) = x^{-1}$ というΩ 上の作用とし、$D^\sigma f = (D(f \circ \sigma)) \circ \sigma$ と定義すると、実は

$$D^* = D^\sigma$$

である。さらには

$$D^*_\alpha = (-1)^r D_\beta$$

ただし、$\beta = d(r-1)/2 - \alpha$ と非常に具体的に求まる。

ここでサポートがコンパクトと仮定したことにより、積分の収束が自動的になっているが、f, g の取る範囲を単に積分が収束する関数というところまで広げることには無理がある。すなわちここでの証明の根拠は Stokes の定理であって、コンパクトサポートという事実は、変形した関数の境界上での積分が消えるという点にも用いている。しかし、たとえば $||x|| \to \infty$ で f が急減少で、g が緩増加な関数であれば、境界を十分遠くにとることで、境界上の積分は結局 0 に収束し、たとえコンパクトサポートでなくても adjoint は同様の微分作用素で得られることになる。よって、後で述べる量指標などにこの adjoint operator を適用できることになる。

5　Symmetric cone の量指標

5.1　量指標の定義と積分変換公式

任意の形式的実ジョルダン代数は単純ジョルダン代数の直和に一意的に表される (FK p.54。) 話を見やすくするために、単純成分を意識して書くことにする。V を形式的実な単純ジョルダン代数とし、$V^m = V \times \cdots \times V$ 上の量指標を考えたい。Ω を V の positive elements に対応する symmetric cone とする。$G = \{g \in GL(V); g\Omega = \Omega\}$ とし、$(G \cap SL(V))^m$ 内の、$\mathrm{vol}(\Gamma\backslash(G \cap SL(V))^m)$ が有限な離散群Γ を指定しておく。（このあたりの設定は目的に応じて適当に変えればよいので一番一般的には述べない。）$\mathcal{D}(\Omega^m)$ で、Ω^m の各成分についての不変微分作用素で生成される環を表す。(ρ, W) を G^m の有理表現としておく。W の $\rho(G^m)$ 不変な内積を (u,v) $(u,v \in W)$ と書く。また、$||w|| = (w,w)^{1/2}$ $(w \in W)$ とおく。

定義 1 Ω^m 上の *W-valued* な C^∞ 関数 $u(Y_1,...,Y_m)$ が次の条件を満たすときに、Γ に関する量指標と呼ぶ。

(1)　$u(\gamma(Y_1,...,Y_m)) = \rho(\gamma)(u(Y_1,...,Y_m))$.
(2)　$Du = \lambda(D)u$, *for all* $D \in \mathcal{D}(\Omega)$ *for some constant* $\lambda(D)$.
(3)　$u(cY_1,...,cY_m) = u(Y_1,...,Y_m)$ *for any constant* c.
(4)　$||u(Y_1,...,Y_m)|| < C(\sum_{i=1}^m tr(Y_i))^\kappa$ *for all* $Y = (Y_1,...,Y_m) \in \Omega^m$ *with* $\prod_{i=1}^m \det(Y_i) = 1$ *for some positive constant* C *and* κ.

この条件のうち、（４）は一見不思議な条件である。なぜなら、左辺は Γ 不変なのに $\sum_{i=1}^m \mathrm{tr}(Y_i)$ はΓ 不変ではないからである。この条件はもともとは保型形式の一般的な増大度条件から来ているのだが、保型形式につける条件がそもそもこのような形になっている。従って、右辺が（Γ 同値な Y の中で）いつ最小になるかは気になるところだが、これはいわゆる Siegel Set からとればいいのである。

　たとえば Harish-Chandra の保型形式の定義 ([11]) によれば、この定義が G 上の Γ に関するある種の保型形式の空間を与えているのは明らかである。実は条件 (4) は、たとえば [22] ではもっと強く任意の u の高階偏微分が同じように押さえられると言うことまで仮定しているし、このような条件は成り立たないと理論に差し支えが生じるのであるが、実際は見かけ上弱い条件 (4) の条件から、偏微分に関する評価も得られる（保型形式の一般論。cf. Harish-Chandra [11]）以下では面倒を避けるために、全文を通じて、**量指標はすべて $\mathbb{C}$ valued と仮定する。**

補題 2 もし u が量指標ならば、$\hat{u}(Y_1,...,Y_m) = u(Y_1^{-1},...,Y_m^{-1})$ とおくと、 $\hat{u}$ も量指標である。

　証明 : 定義の条件（１）（３）はあきらかである。成分 Y_i に関する不変微分作用素を $D = D(Y_i)$ というように書くことにする。u は D^σ も不変微分作用素だったから、これにについても固有関数になる。すなわち $D^\sigma u = (D(u \cdot \sigma)) \cdot \sigma = \lambda u$ である。ここ

で、 σ は　もともと Y_i を Y_i^{-1} に変え、その他の変数はそのままに保つ写像であるから、$(D(u(Y_1, ..., Y_i^{-1}, ..., Y_m)) = \lambda u(Y_1, ..., Y_i^{-1}, ..., Y_m)$ でもある。しかし、今 D は Y_i のみに関する偏微分作用素だから、上の式で、他の Y_j を Y_j^{-1} に変えてもかまわない。すなわち、$\hat{u}$ は D^σ の同時固有関数であり、不変微分作用素は D^σ でも張られるから、定義の条件（２）は確かめられた。増大度の条件は次を示せばよい。適当な正の定数 a, b をとると、$\prod_{i=1}^m \det(Y_i) = 1$ なる任意の Y について

$$\sum_{i=1}^m tr(Y_i^{-1}) < a(\sum_{i=1}^m tr(Y_i))^b$$

がなりたつ。
証明は次の通り。まず、$x \in V$ についての任意の斉次多項式 $R(x)$ を固定すると、$x \in \Omega$ の任意の元について $tr(R(x)) < a(tr(x))^b$ となる、正定数 a, b が存在する。（前節の結果）ところが、$x \in V$ に対し、$x^{-1} = \det(x)^{-1}Q(x)$ (Q は V valued の多項式で、各座標成分について斉次）となる。(FK p.31) また、$\det(x) \leq x_1 \cdots x_r$ である。さて、$\prod_{i=1}^r \det(Y_i) = 1$ ならば

$$\sum_{i=1}^r tr(Y_i^{-1}) = \sum_{i=1}^r \det(Y_i)^{-1} tr(Q(Y_i)) \sum_{i=1}^r tr(Q(Y_i)) \prod_{j \neq i} \det(Y_j)$$

であり、Hadamard の不等式から、容易に $\det(Y_i) \leq (\mathrm{tr}(Y_i))^r$ がわかり、$\mathrm{tr}(Q(Y_i))$ も $\mathrm{tr}(Y_i)$ のべきで押さえられるので、望む結果が得られたことになる。 q.e.d.

次に量指標の一般的な積分変換公式を与えよう。

この公式は関数等式の証明にとって基本的である。証明のポイントは離散群とは関係なく、$u(Y)$ が不変微分作用素の固有関数でかつ適当な増大条件を満たすという点にある。

まずいくつか記号を説明する。上記のように、u を Ω^m 上の量指標とする。$Y = (Y_1, ..., Y_m)$, $T = (T_1, ..., T_m) \in \Omega^m$ とし、$dv_i = \det(Y_i)^{-n/r} dY_i$ (dY_i は 内積 $(x, y) = tr(xy)$ に関する普通のルベーグ測度）とする。$g \in G$ の V の線形変換としての行列式を $\mathrm{Det}(g)$ と書くと、$\det(gx) = \mathrm{Det}(g)^{r/n} \det(x)$ であるから、dv_i は G 不変測度である。また、記号を簡単にするために $x = (x_1, ..., x_m) \in V^m$ に対して $\det(x) = \prod_{i=1}^m \det(x_i)$, $\mathrm{tr}(x) = \sum_{i=1}^m \mathrm{tr}(x_i)$ と書く。不変微分作用素 $D \in \mathcal{D}(\Omega)$ に対して、これを Ω^m の i 番目の変数に関する作用素とみなすとき、これを明示するために $D(Y_i)$ と書くことにする。たとえば、$M_r(Y_i) = \det(Y_i) \det(\frac{\partial}{\partial Y_i})$ であり、$D_s(Y_i) = \det(Y_i)^s M_r(Y_i) \det(Y_i)^{-s}$ である。前と同様、これの（dv_i に関する）dual operator を $\hat{D}(Y_i)$ と書く。たとえば、$\hat{D}_s(Y_i) = (-1)^r D_{d(r-1)/2-s}(Y_i)$ であった。以下、簡単のために、$\mathcal{D}_s = \prod_{i=1}^m D_s(Y_i)$, $\hat{\mathcal{D}}_s = \prod_{i=1}^m \hat{D}_s(Y_i)$, $\mathcal{M}_r = \prod_{i=1}^m M_r(Y_i)$ と書く。u は量指標、従って固有関数であるから、$\hat{D}_s(Y_i) u = (-1)^r f_i(s) u$ となる、r 次の monic polynomial が存在する。$\hat{D}_s u = (-1)^{rm} f(s) u$, すなわち、$f(s) = f_1(s) \cdots f_m(s)$ とおく。$f(s) = 0$ の根を $\alpha_1, ..., \alpha_{rm}$ とする。すなわち $f(s) = \prod_{i=1}^{rm} (x - \alpha_i)$.

命題 4 記号と仮定を前の通りとして、次を得る。

$$\int_{\Omega^m} u(Y) e^{-tr(TY)} \det(Y)^s dv_1 \cdots dv_m = (2\pi)^{(n-r)m/2} \det(T)^{-s} u(T_1^{-1}, ..., T_m^{-1}) \prod_{i=1}^{rm} \Gamma(s - \alpha_i).$$

5.2 積分変換公式の証明：Maass の方針

前節の積分変換公式は V が実対称行列の空間で、$m=1$ の場合は、Maass [22] p. 94 による。この節で述べる一般の場合の証明はこれをジョルダン代数の道具立てのなかで、注意深く模倣したものである。次節でより見通しのよい Selberg 流の別証明を述べる。

この節の証明はそれなりに長いので、いくつかのステップにわける。記号を

$$\hat{J}_s(T,u) = \int_{\Omega^m} u(Y)e^{-\mathrm{tr}(TY)}\det(Y)^s dv_1,\cdots dv_m$$

と定める。（Maass [22] p.85 の記号で言えば $\hat{J}_s(T,u) = J(T^{-1},u)$ である。混乱するといけないので記号を変えた。）

step 1: T **を消してしまうこと。**
$u_1(Y) = u(P(T^{-1/2}Y)) = u(P(T_1^{-1/2})Y_1,...,P(T_m^{-1/2})Y_m)$ と置く。このとき、u_1 も量指標の解析的条件 (2) (3) (4) を満たし、

$$\hat{J}_s(T,u) = \det(T)^{-s}\hat{J}_s(e,u_1). \tag{1}$$

であることを示す。ここで e は V^m の単位元、すなわち各 V の単位元の和である。

証明

- u_1 も量指標の定義の (2) (3) (4) を満たすこと。
  $P(x)$ $(x\in V)$ は G の元であるから、不変微分作用素の不変性より u_1 も相変わらず固有関数である。よって (2) はよい。(3) はあきらか。(4) は一般論より $\mathrm{tr}(P(x)y)$ が $\mathrm{tr}(y)$ の $\mathrm{tr}(x^2)$ の y によらない定数倍で押さえられることより、あきらか。
- $P(x)$ で測度は不変であり、また、定義より容易に $\mathrm{tr}(T_iY_i) = \mathrm{tr}(P(T_i^{1/2})Y_i)$, $P(x^{-1}) = P(x)^{-1}$ (FK p.32)、また $x\in\Omega$ について、$\det(P(x^{-1/2})y) = \det(x)^{-1}\det(y)$ (FK p.52) より、$\hat{J}_s(T,u)$ において、$Y_i \to P(T^{-1/2})Y_i$ と変数変換すれば、望みの式が得られる。q.e.d.

step 2: 収束性 これは前節の命題より明らかである。すなわち、任意の正の実数 N に対して、$e^{-\mathrm{tr}(Y)} < C(\mathrm{tr}(Y))^{-N}$ であり、また、相加相乗平均より

$$m(\mathrm{tr}(Y_1)\cdots\mathrm{tr}(Y_m))^{1/m} \le \mathrm{tr}(Y)$$

であるから、前節の命題の ϕ の条件を各変数について満たし、$Re(s) > d(r-1)/2$ で収束する。

step3: 周期性
次のように置く。
$$H(s,u_1)=\frac{\hat{J}_s(e,u_1)}{\prod_{i=1}^{rm}\Gamma(s-\alpha_i)}.$$
このとき、
$$H(s+1,u_1)=H(s,u_1)$$
となる。
証明：まず、T,Y を共に変数と思って、次のトリックを考える。
$$\mathcal{M}_r(T)e^{-\mathrm{tr}(TY)}=(-1)^{rm}\det(T)\det(Y)e^{-\mathrm{tr}(TY)}=\mathcal{M}_r(Y)e^{-\mathrm{tr}(TY)}.$$
まずこの式の前半より
$$\mathcal{M}_r(T)\hat{J}_s(T,u)=(-1)^{rm}\det(T)\hat{J}_{s+1}(T,u)$$
である。後半を用いると、微分作用素の adjoint の具体形
$$\hat{\mathcal{D}}_s=(-1)^{rm}\det(Y)^{d(r-1)/2-s}\mathcal{M}_r\det(Y)^{s-d(r-1)/2}=\det(Y)^{-s}\hat{\mathcal{M}}_r\det(Y)^s$$
を用いて、
$$\begin{aligned}\mathcal{M}_r(T)\hat{J}_s(T,u) &= \int_{\Omega^m}u(Y)\det(Y)^s(\mathcal{M}_r(Y)e^{-\mathrm{tr}(TY)})dv\\ &= \int_{\Omega^m}(\hat{\mathcal{M}}_r(Y)(\det(Y)^s)u(Y))e^{-\mathrm{tr}(TY)}dv\\ &= \int_{\Omega^m}\det(Y)^s(\hat{\mathcal{D}}_s u(Y))e^{-\mathrm{tr}(TY)}dv\\ &= (-1)^{rm}f(s)\int_{\Omega^m}\det(Y)^s u(Y)e^{-\mathrm{tr}(TY)}dv\\ &= (-1)^{rm}f(s)\hat{J}_s(T,u)\end{aligned}$$
となる。すなわち、$\det(T)\hat{J}_{s+1}(T,u)=f(s)\hat{J}_s(T,u)$ であり、$f(s)\hat{J}_s(e,u_1)=\hat{J}_{s+1}(e,u_1)$。
また、$s-\alpha_i=\Gamma(s-\alpha_i+1)/\Gamma(s-\alpha_i)$ だから、$H(s,u_1)$ の周期性は証明された。

step4: 値の確定 (1) 実部と虚部に分けて、$s=\sigma+it$ と書くとき、t によらずに$\sigma\to\infty$ で $H(s,u_1)$ が一定の値に近づき、その結果もともと $H(s,u_1)$ は正則で周期的だから、定数になる。これを計算する。

- まず積分を少し変形する。$Y=tW$, $W=(W_1,...,W_m)$, $t=(\det(T))^{1/rm}$ と変数変換すると $dv=t^{-1}dt\,dv^1$、dv^1 は $\det(Y)=1$ 上の不変測度、と書けるのはあきらかである。よって、

$$I(s,u_1)=\int_{\Omega^m,\det(W)=1}\frac{u_1(W)}{\mathrm{tr}(W)^{rms}}dv_1$$

と置くと、定義により $u_1(Y)=u_1(W)$ であることと、通常のガンマ関数の定義より

$$\int_{t=0}^{\infty}t^{rms-1}e^{-t\mathrm{tr}(W)}dt=\mathrm{tr}(W)^{-rms}\Gamma(rms)$$

であることを用いて

$$\hat{J}_s(e,u_1)=\Gamma(rms)I(s,u_1)$$

となる。ここで特に 1 を Ω 上で恒等的に 1 となる量指標とすれば、$\hat{D}_s 1=(\prod_{j=1}^r(s-d(j-1)/2))^m 1$ であり、また

$$\hat{J}_s(e,1)=(2\pi)^{(n-r)m/2}\Gamma_\Omega(s)^m=(2\pi)^{(n-r)m/2}\prod_{j=1}^r\Gamma(s-d(j-1)/2)^m$$

であることより、

$$H(s,1)=(2\pi)^{(n-r)m/2}$$

となる。

- 次の式を証明する。

$$\lim_{\sigma\to\infty}\frac{I(s,u_1)}{I(s,1)}=u_1(e).$$

まず、$u_1(e)=0$ の場合に帰着することを言う。積分 $I(s,u_1)$ に関する限りは $\det(Y)=1$ のところで考えればよいから、$\mathrm{tr}(Y)\geq rm(\det(Y)^{1/rm}=rm$ となる。よって $|u_1(e)|\leq C\mathrm{tr}(Y)$ となる正の定数 C が存在する。よって、$|u_1(Y)-u_1(e)|\leq a\mathrm{tr}(Y)^b$ となる $a,b>0$ が存在するから、以下 $u_1(e)=0$, $|u_1(Y)|\leq a\mathrm{tr}(Y)^b$ と仮定して証明してよい。さて、$\det(Y)=1$ とすれば、$\mathrm{tr}(Y)\geq rm$ であって、もし $\mathrm{tr}(Y)=rm$ ならば、$Y=e$ であるはずだから、$\det(Y)=1$ の条件下で $tr(Y)$ が rm に近づくと Y は e に近づくと Maass には書いてある。なるほどそのようだが、私は直感的に納得するほど解析学は得意ではないので細かく証明する。主張は

任意の $\epsilon>0$ に対して、ある δ が存在して、$\mathrm{tr}(Y)<rm+\delta$ ならば $||T-e||<\epsilon$ である。

これはスペクトル分解して考えておけば、次の補題から示される。

補題 3 $\lambda_i > 0$ $(i = 1, ..., k)$ が $\prod_{i=1}^k \lambda_i = 1$ を見たすように動くとき、任意の ϵ に対して、ある δ があって、$\sum_{i=1}^k(\lambda_i - 1) < \delta$ ならば $(\sum_{i=1}^k(\lambda_i - 1)^2)^{1/2} < \epsilon$ である。

証明：$k = 1$ ならばあきらかだから、$k > 1$ とする。積が 1 という条件下で $\sum_{j=2}^k(\lambda_j) \geq (k-1)(\prod_{j=2}^k \lambda_j)^{1/(k-1)} = (k-1)\lambda_1^{-1/(k-1)}$ より、$\sum_{j=1}^k(\lambda_j - 1) < \delta$ ならば $f(x) = x - k + (k-1)x^{-1/(k-1)}$ とおくとき、$f(\lambda_1) < \delta$ である。$f(1) = 0$, $f'(x) = 1 - x^{k/(k-1)}$ $f'(1) = 0$ である。よって $f(x)$ は $x > 0$ の範囲で $x = 1$ で極小であり、逆関数は $0 < x < 1$ と $1 < x$ のそれぞれの範囲で一価連続な関数である。よって、任意の $\epsilon_1 > 0$ に対し $f(x) < \delta$ ならば $|x - 1| < \epsilon$ となるような δ が存在する。よって、対称性より $\sum_{j=1}^k(\lambda - 1) < \delta$ ならば $|\lambda_j - 1| < \epsilon_1$ $(j = 1,...,k)$, よって $(\sum_{j=1}^k(\lambda_j - 1)^2)^{1/2} < k\epsilon_1$. q.e.d.

よって、$u_1(e) = 0$ と仮定すると、任意の $\epsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ があって、$\mathrm{tr}(W) < rm(1 + \delta)$ ならば $|u_1(e)| < \epsilon$ である。よって

$$\left| \int_{\substack{\det(W)=1, W \in \Omega^m \\ \mathrm{tr}(W) \leq rm(1+\delta)}} \frac{u_1(W)}{\mathrm{tr}(W)^{rms}} dv_1 \right| < \epsilon I(s, 1)$$

である。一方、$\det(W) = 1$ については $|u_1(W)| \leq C\mathrm{tr}(W)^\kappa$ であったから、$\mathrm{tr}(W) \geq rm(1 + \delta)$ ならば $Re(s) > 2\kappa/rm$ となる s については

$$\mathrm{tr}(W)^{\kappa - rms} = \mathrm{tr}(W)^{\kappa - rmRe(s)/2}\mathrm{tr}(W)^{-rmRe(s)/2} \leq \mathrm{tr}(W)^{-rmRe(s)/2}$$

である。すなわち

$$\left| \int_{\substack{\det(W)=1, W\Omega^m \\ \mathrm{tr}(W) \geq rm(1+\delta)}} \frac{u_1(W)}{\mathrm{tr}(W)^{rms}} dv_1 \right| < C_2(rm(1+\delta))^{-rmRe(s)/2} I(Re(s)/2, 1)$$

となる。ここで

$$I(Re(s), 1) = \Gamma(rms)^{-1}\hat{J}_s(e, 1) = \Gamma(rms)^{-1}(2\pi)^{(n-r)m/2}\prod_{j=1}^r \Gamma(s - d(j-1)/2)^m$$

であった。ここで Stirling の公式を応用する。Stirling の公式にはいろいろな書き方があるが、ここでは

$$\Gamma(s - \alpha) \sim z^{z-\alpha-1/2}e^{-z}\sqrt{2\pi} \qquad (|\arg(z)| < \pi,\ |z| \to \infty)$$

を用いる。（証明はたとえば、$\lim_{|z|\to\infty} e^{-alog(z)}\Gamma(z+a)/\Gamma(z) = 1$, と $\Gamma(z) \sim z^{z-1/2}e^{-z}\sqrt{2\pi}$ などを組み合わせればよい。Whittaker-Watson [30] または Magnus-Oberhettinger [25] など。）

これによって、

$$\frac{I(Re(s),1)}{I(Re(s)/2,1)} \sim 2^{\frac{rm-1}{2}+\frac{mdr(r-1)}{4}}(rm)^{\frac{rmRe(s)}{2}} \qquad (Re(s)\to\infty)$$

である。よって $Re(s)$ 十分大のところで

$$\left|\frac{I(s,u_1)}{I(s,1)}\right| < \epsilon + C_3(1+\delta)^{-rmRe(s)/2}$$

となり、従って

$$\lim_{Re(s)\to\infty}\frac{I(s,u_1)}{I(s,1)} = u_1(e)$$

となる。

step 5: 値の確定 (2) $H(s,u_1)$ の周期性と step 4 の結果を組み合わせてみよう。$H(s,u_1)/H(s,1)$ の $Re(s)\to\infty$ での漸近的な挙動は前節の最後の式の応用として得られるが、$H(s,1) = (2\pi)^{(n-r)m/2}$ より、これは $H(s,u_1)$ 自身の漸近挙動も与える。具体的には以下に書く。s を固定しておくと

$$\lim_{h\to\infty}\frac{H(s+h,u_1)}{(s+h)^{(\sum_{j=1}^{rm}\alpha_j)-\frac{mdr(r-1)}{2}}} = (2\pi)^{(n-r)m/2}u_1(e)$$

である。さて、$u_1(e)\neq 0$ と仮定すると、任意の $\epsilon>0$ に対して $Re(s)$ 十分大で

$$|u_1(e)| - \left|\frac{I(s,u_1)}{I(s,1)}\right| \leq \left|\frac{I(s,u_1)}{I(s,1)} - u_1(e)\right| < \epsilon$$

であるが、$\epsilon = |u_1(e)/2|$ ととって、

$$|H(s,u_1)| = \left|\frac{\Gamma(rms)I(s,1)}{\prod_{j=1}^{rm}\Gamma(s-\alpha_j)}\right|\left|\frac{I(s,u_1)}{I(s,1)}\right| \geq \frac{1}{2}|u_1(e)|\left|\frac{\Gamma(rms)I(s,1)}{\prod_{j=1}^{rm}\Gamma(s-\alpha_j)}\right|$$

である。ここでガンマ因子と $I(s,1)$ はいずれも $Re(s)$ 十分大でゼロにならないので、$H(s,u_1)$ もゼロではなくなる。

さて自然数 h に対して $H(s+h,u_1) = H(s,u_1)$ すなわち定数であるから、上の極限を h 自然数のところだけに制限して取って考えると、$Re(s)$ 十分大としておいて $H(s,u_1)\neq 0$ とすれば

$$\sum_{j=1}^{rm}\alpha_j = \frac{mdr(r-1)}{2}$$

のはずである。よって、$H(s, u_1) = (2\pi)^{(n-r)m/2} u_1(e)$ となる。元々の u を考えると、$u_1(e) = u(T^{-1})$ であり、u が恒等的に 0 でない限りは $u(T^{-1}) \neq 0$ となる、T は存在する。それはともかく、両辺は T の連続関数だから $u(T^{-1}) = 0$ のところでも成立する。

以上をまとめて、$H(s, u_1)$ の公式、よって $\hat{J}_s(T, u)$ の公式を得る。q.e.d.

5.3 Selberg 理論の復習

ワークショップの講演の際に佐藤文広氏より、この積分変換公式は不変微分作用素と不変積分作用素の一般論だろうとの指摘を受けた、なるほどその通りで、そのように考えると、前節のあたかもトンネルを行くがごとき強引な証明に比べると遙かに話がよくわかる。われわれの場合の証明は次節にまわし、この節では読者の便宜のために Selberg [28] の第 1 節に書かれていることを駆け足で復習したい。(私事ながら、わたしが修士入学直後に最初に伊原先生のセミナーで読んだのがこの論文であった。) 一種の解説文献として、Kubota [21] その他がある。

まず正確な式による記述は後まわしにして、要するに何をやっているのかという Selberg の一般論をざっと言葉で復習しよう。

Selberg は弱対称リーマン空間 S の不変微分作用素、および不変積分作用素の生成する不変作用素のなす環 (もう少し広くてもいいはずだが) について、一般的に次のようなことを述べている (cf. [28])。ここで、弱対称という仮定は (定義は後で述べるが)、一つには任意の不変作用素が可換になるようにするためにつけられた条件である。次に S 上の関数に対する不変微分作用素 D の全体 (有限生成) の同時固有関数 f を考える。f の固有値の集合 $\lambda(D)$ を固定しておこう。すると、$\lambda(D)$ に対応する固有空間が任意の不変作用素で不変であるのは当たり前だが、さらに強く、この固有空間の任意の元 f はいつでも任意の不変作用素 L の同時固有関数でもあって、さらにその固有値 Λ は f にはよらず $\lambda(D)$ の集合と L のみによる。すなわち $Lf = \Lambda f$ でΛ は f によらず $\lambda(D)$ で決まる。これの意味するところは大変面白い。今 L がたとえば不変積分作用素であって、Lf を計算したかったとする。ここで f が不変微分作用素の同時固有関数だった仮定する。まさに我々の設定である。このときにもし f の L に関する固有値が知りたかったら、ここでとった f について考察する必要はなく、不変微分作用素についての固有値が f と同一であるような典型的な関数 h を具体的に与えておいて、これについて L での固有値を求めておけばよい、すなわち Lh を具体的に計算すればよい、ということになる。もしもこのような典型的な関数がわかりやすい関数ならば、一般の f というような抽象的なものを扱う必要はなくなる。ここで言う典型的な関数が帯球関数と呼ばれるものである。もちろん Selberg 理論は帯球関数やその固有値、積分などを直接与えるものではないから、この部分の具体的な計算は省略できないが、それでも見通しは遙かによくなる。

以上の説明で以下の応用上の思想的エッセンスはつきていると思うが、読者の便宜のために一応正確な説明を付け加えておこう。なお、Selberg の論文は発表当時から難解な部分を含むと言われていたようであるが現在説明している部分に関しては比較的明快である。

以下は short cut であって、Selberg の論文について述べられていることについて網羅的な説明をするつもりはないので、詳しくは原論文を直接参照されたい。

以下の記号はこの原稿の他の部分とは独立のものと考えられたい。リーマン多様体 S を考え、S の リーマン計量に関する isometry の（一部の）なす群を G とする。S は連結な実解析的多様体としておき、リーマン計量も実解析的としておく。G は S 上推移的に作用していると仮定する。S は弱対称空間とする。この意味は、S の isometry μ があって、$\mu G\mu^{-1} = G$, $\mu^2 \in G$ であり、任意の x, $y \in S$ に対して、$mx = \mu y$ かつ $my = \mu x$ なる $m \in G$ が存在するということである。S 上の関数への線形作用素 L が不変であるというのは、$m \in G$ に対して、$(\lambda(m)f)(x) = f(m^{-1}x)$ とするとき、$L\lambda(m) = \lambda(m)L$ for all $m \in G$ となることである。もちろん $(Lf)(mx) = L(f(mx))$ と書いても同じであり、Selberg はむしろこのような書き方をしているが、解釈が時としてややこしい。以下では不変微分作用素と不変積分作用素から生成される線形作用素の環を考え、その元を単に不変作用素と呼ぶ。ここで微分作用素というのは普通の多様体の上の関数の（実解析的係数の）微分作用素を考えている。弱対称という仮定から不変作用素は皆可換になる（証明略。）

任意の不変部分作用素 L は、実はある固定された点 x_0 での、任意の関数 f に対する作用の値 $(Lf)(x_0)$ のみで決まっている。実際 $x = m^{-1}x_0$ とすると $(Lf)(x) = (\lambda(m)Lf)(x_0) = (L\lambda(m)f)(x_0)$ であり、関数 $\lambda(m)f$ に L を作用させて、x_0 での値を決めれば $Lf(x)$ が決まる。x_0 を固定する G の元からなる群を K とすると、K はコンパクトであるが、$(L\lambda(k)f)(x_0) = (Lf)(x_0)$ である。逆に、1 点 x_0 のまわりの関数に対する線形作用素 $\mathcal{L}$ が与えられていて、$(\mathcal{L}\lambda(k)f)(x_0) = (\mathcal{L}f)(x_0)$ がすべての $k \in K$ について成り立つなら、global な不変作用素 L をこれから $Lf(x) = (\mathcal{L}\lambda(m)f)(x_0)$ により定義することができる。もちろんこのときに L の global な形状（たとえば積分作用素か否かなど）は一般にはわからないかもしれない。しかし、たとえば微分作用素についてはもともと定義が local の張り合わせなのであるから、local から global に微分作用素のまま拡張できる。これを例示してみよう。今、S の 1 点 x_0 のまわりの local parameter を $x_1, \dots , x_n$ とし、簡単のために、multi-index $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ に対して、∂^α を x_i に関する α_i 階の偏微分の積とする。S 上の関数 f に対して、x_0 のまわりでの微分 $\partial^\alpha f$ が定義される。これは K 不変とは限らないので、積分

$$I(f, x_0)(x) = \int_K f(kx)dk = \int_K (\lambda(k^{-1})f)(x)dk$$

を考える。ただし、dk は K の Haar measure で $vol(K) = 1$ なるものとしておく。積分が x_0 の isotropy 群に関するものであることを示すために、記号に x_0 を入れている。

さて、$\partial^\alpha I(f) = \int_K \partial^\alpha(\lambda(k^{-1})f)(x)dk$ であるが、任意の $k_1 \in K$ に対して、

$$\begin{aligned} (\partial^\alpha\lambda(k_1)I(f, x_0))(x_0) &= (\int_K \partial^\alpha(\lambda(k_1k^{-1})f)(x)dk)|_{x=x_0} \\ = \int_K \partial^\alpha(\lambda(k^{-1})f)(x)dk|_{x=x_0} &= (\partial^\alpha I(f, x_0))(x_0). \end{aligned}$$

よってこの作用は x_0 で K 不変であり、$x = m^{-1}x_0$ に対し $D_\alpha f(x) = (\partial^\alpha\lambda(m)I(f, x_0))(x_0)$ と線形作用素 D_α を定義すれば、これは不変作用素であることはもちろん、微分作用素でも

ある。このような構成は帯球関数の一意性を意味する点で重要である。すなわち、今 f として、K 不変な関数 $\omega(x)$ 、すなわちすべての K について $\omega(kx)=\omega(x)$ となるものをとろう。さらに ω はすべての不変微分作用素の同時固有関数とし、さらに $\omega(x_0)=1$ とする。この 3 つの条件が満たされているとき、ω を帯球関数という。さて、帯球関数は、不変微分作用素の固有値により一意的に定まる。なぜなら、ω は不変微分作用素の固有関数だから Laplace Beltrami 作用素の固有関数で従って実解析的であり、よって x_0 でのすべての微分係数が等しければ Taylor 展開により一つに決まる。定数項は仮定より 1 である。それ以外は、K 不変性より $I(\omega,x_0)=\omega$ であるから $(\partial^\alpha\omega)(x_0)=(\partial^\alpha I(\omega,x_0))(x_0)=(D_\alpha\omega)(x_0)$ であった。ここで D_α は上の構成から得られた不変微分作用素である。よって、仮定より $D_\alpha\omega=\lambda(D_\alpha)\omega$ なる定数$\lambda(D_\alpha)$ が指定されており、$(\partial^\alpha\omega)(x_0)=\lambda(D_\alpha)\omega(x_0),$ となる。よって、ω は一意的に定まるのである。ちなみに、これも重要なことであるが、K 不変かつすべての不変微分作用素の同時固有関数であるような f について、$f(x_0)=0$ であったとすると実は $f(x)=0$ である。なぜなら f は帯球関数の条件のうちの最後のものだけ満たさないが、それ以外は同じであって、全く同じ論法により、任意の偏微分係数は $(\partial^\alpha)f(x_0)=\lambda(D_\alpha)f(x_0)=0$ であるから、実解析性より関数自身ゼロになるのである。さて、以上の応用として、ω は任意の不変作用素の固有関数でもある。実際、L が不変作用素ならば、弱対称性より、L は任意の不変微分作用素 D と可換であり、$\lambda(D)L\omega=LD\omega=DL\omega$ だから、$L\omega$ は不変微分作用素について ω と同じ固有値を持つ固有関数である（ゼロかもしれないがいちいち断るのも面倒なのでゼロも固有関数と呼ぶ。）$(L\omega)(kx)=L(\omega(kx))=L(\omega(x))=(L\omega)(x)$ より K 不変でもある。ここで $f=L\omega-(L\omega)(x_0)\omega$ とおくと、$\omega(x_0)=1$ によって、$f(x_0)=0$ である。また、f は K 不変かつ任意の不変微分作用素の同時固有関数であるから、前に示したことにより $f=0$ である。すなわち、$\Lambda=(L\omega)(x_0)$ とおけば $L\omega=\Lambda\omega$ となる。

最後に、いちばん肝心な結果を述べる。

命題 5 関数 f がすべての不変微分作用素の同時固有関数であるとすると、任意の不変作用素 L に対し、f は L の固有関数である。すなわち $Lf=\Lambda f.$ 固有値 Λ は L および f の不変微分作用素に対する固有値のみで決まり、関数 f にはよらない。

証明：$I(Lf,x_0)=LI(f,x_0)$ だが、後者は K 不変かつすべての微分作用素の同時固有関数であるから、$LI(f,x_0)=\Lambda I(f,x_0)$ となる Λ が存在する。Λ は $I(f,x_0)(x_0)=0$ ならばゼロであり、$I(f,x_0)(x_0)\neq 0$ ならば帯球関数での L の作用から決まる。他の点での帯球関数は G で ω を写して決まるのであるから、どの点でも Λ は皆同じである。よって、任意の x_0 について、共通の Λ があって $I(Lf,x_0)=LI(f,x_0)=\Lambda I(f,x_0)$ であるが、これらの x_0 での値は、$I(Lf,x_0)(x_0)=Lf(x_0)$ および $I(f,x_0)(x_0)=f(x_0)$ によって、$Lf(x_0)=\Lambda f(x_0)$ である。これが任意の x_0 について成り立つから、$Lf=\Lambda f$ である。証明終わり。

5.4 積分変換公式の証明：Selberg 流

以下はわれわれが直接目的とするところの積分変換公式を Selberg 流の方針で証明したらどうなるかの説明である。帯球関数の定義はわれわれの場合、次の通りである。まず、V

を simple Jordan algebra とし、Ω をその中の symmetric cone とする。(V として、いきなり simple でないものを取る行き方もあるであろうが、ここでは定式化の細部の美しさにはこだわらないことにする。) Ω の計量は内積でいれ、$\mu(x) = x^{-1}$ とすれば、これは対称空間（よって弱対称）である。Ω^m をとっても同様である。ϕ を Ω 上の C^∞ 関数とし、K を $\{g \in GL(V); ge = e\}$ の 1 の連結成分とする。次の 3 つの性質を満たすとき、ϕ を Ω 上の（e における）帯球関数 (zonal spherical function) という。

1. $\phi(kx) = \phi(x)$,
2. $D\phi = \chi(D)\phi$ ($D \in D(\Omega)$, $\chi(D) \in \mathbb{C}$).
3. $\phi(e) = 1$.

$\chi(D)$ はもちろん $D(\Omega)$ 上の character になる。帯球関数が具体的にどのようなかたちか、また、どのような $\chi(D)$ に対し、帯球関数が存在するかなどが問題であるが、これらは FK p. 304 により解決されている。結論を述べれば、まず multi-index ρ を

$$\rho = (\rho_1, ..., \rho_r), \quad \rho_i = d(2i - r - 1)/4$$

と定義する。$\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_r) \in \mathbb{C}^r$ として、「主小行列式」の積 $\Delta_{\lambda+\rho}(x)$ を前と同様に定義する。

$$\phi_\lambda(x) = \int_K \Delta_{\lambda+\rho}(kx)dk$$

とおけば、これは e における帯球関数であり、逆に任意の帯球関数は$\phi_\lambda(x)$ の形である。また、$\phi_\lambda(x) = \phi_\mu(x)$ となるのは、μ が λ の成分の置換で得られることと同値である。各不変微分作用素に対する固有値も完全にわかる。たとえば $D_s = \det(x)^s M_r \det(x)^{-s}$ をとれば、固有値は

$$\prod_{i=1}^r (\lambda_i - s + \frac{d}{4}(r-1))$$

である。

この証明自身はそれほど易しいというわけでもないが、FK p. 304–306 に書かれているので省略する。

さて、FK では単純ジョルダン代数の場合だけ書かれているが、我々は単純でない場合も扱っている。しかし、この場合は各変数ごとに（各単純成分の単位元に関する）帯球関数をとって、これを掛け合わせることで間に合わせることができる。

次にわれわれのあつかう不変積分作用素を見よう。$s \in \mathbb{C}$ として、Ω^m 上の関数 f に対して

$$L_s f(X) = \int_{\Omega^m} e^{-tr(YX^{-1})} \det(Y)^s \det(X)^{-s} \det(X)^{-n/r} dX$$

とおく。ただし $\det(X)$ は前と同様、$X = (X_1, ..., X_m)$ に対して、$\prod_{i=1}^m \det(X_i)$ という意味である。ここで $\det(X)^{-n/r}dX$ は Ω^m の不変測度であるから、積分核は $k(X,Y) =$

$e^{-tr(YX^{-1})}\det(Y)^s\det(X)^{-s}$ である。$g \in G$ の内積 $(x,y) = tr(xy)$ に関する adjoint を g^* と書けば、$(gX)^{-1} = (g^*)^{-1}X^{-1}$ (FK p. 57) であるから

$$tr((gY)(gX)^{-1}) = (gY,(gX)^{-1}) = (gY,(g^*)^{-1}X^{-1}) = (Y, g^*(g^*)^{-1}X^{-1}) = tr(YX^{-1})$$

であり、$\det(gX) = Det(g)^{r/n}\det(X)$ などから、$k(gX,gY) = k(X,Y)$ である。すなわち、積分核は point pair invariant であり、L は不変積分作用素である。ついでながら、上記の積分核は次のように記述する方が理論的にはわかりやすい。Ω 上の関数 h_1 を

$$h_1(X) = e^{-tr(X^{-1})}\det(X)^{-s}$$

と定義する。$h_1(x)$ は K 不変な関数である。ここで

$$h_1(P(X^{1/2})Y^{-1}) = e^{-tr(P(X^{-1/2})Y)}\det(P(X^{1/2})Y^{-1})^{-s} = k(X,Y)$$

となる。

量指標は、前節の Selberg の一般論により、L の固有関数である。

次にこの固有値を求めよう。これも前節により、帯球関数について求めておけばよい。これを求めるには $\phi_\lambda(x)$ について具体的に積分を実行することになるが、これもすでに FK によりわかっている。（FK は単純ジョルダン代数の場合のみに求めているがわれわれのばあいはこれを掛け合わせたものにすぎない。）FK の p.308–309 にならって、少し一般論を復習しよう。ここで FK は spherical Fourier transform なるものを定義している。これは帯球関数を character のかわりに用いた一種の Mellin 変換のようなものである。一般に f, h を K 不変な Ω 上の関数として、convolution product を

$$f*h(x) = \int_\Omega f(y)h(P(x^{1/2}Y^{-1})\det(y)^{-n/r}dy$$

と定義する。これは $\Omega = G/K$ とみなして、G 上の関数と見なしたときの通常の convolution product と一致している。$f*h = h*f$　でもある。さて、積分が絶対収束するような $\lambda \in \mathbb{C}^r$ について

$$\hat{f}(\lambda) = \int_\Omega \phi_\lambda(x^{-1})f(x)\det(x)^{-n/r}dx$$

とおくとき、帯球関数 $\phi_\lambda(x)$ について

$$\phi_\lambda * f = \hat{f}(\lambda)\phi_\lambda$$

となる。$\hat{f}(\lambda)$ と f の spherical Fourier transform と呼ぶ。まえに述べた $k(X,Y)$ と h_1 の関係より、$f = h_1$ とおけば

$$\phi_\lambda * h_1 = L\phi_\lambda$$

である。このときの $\hat{h}_1(\lambda)$ の値は、ガンマ関数の定義と公式からすぐわかって、

$$\hat{h}_1(\lambda) = \Gamma_\Omega(\lambda+\rho+s)$$

である（以上 FK loc.cit.) 主小行列式への不変微分作用素の作用はよく知られていて、

$$\hat{D}_s\phi_\lambda(x) = (-1)^r \prod_{i=1}^{r}(s+\lambda_i - \frac{d(r-1)}{4})\phi_\lambda(x)$$

となる (FK p. 296–298, p.304.) この固有値を前のように $(-1)^r f_1(s) = (-1)^r \prod_{j=1}^{r}(s-\alpha_j)$ とおくと、（順序は適当に入れ替えて）$\alpha_j = d(r-1)/4 - \lambda_j$ であり、

$$\Gamma(s-\alpha_j) = \Gamma(s+\lambda_j - d(r-1)/4) = \Gamma(s+\lambda_j+\rho_j - \frac{d(j-1)}{2})$$

となる。一方で、公式により

$$\Gamma_\Omega(\lambda+\rho+s) = (2\pi)^{(n-r)/2}\prod_{j=1}^{r}\Gamma(s+\lambda+\rho-\frac{d(j-1)}{2})$$

である。さて、我々が求めたい積分変換公式ではΩ^m で考えていたが、不変積分作用素は各変数 Y_i にたいする上記の積分作用素 $L_s(Y_i)$ の合成（繰り返し）でえられ、帯球関数も、単に各変数に関するものの積をとればよいから、結局、$\hat{D}_s(Y_i)u(Y) = (-1)^r f_i(s)u(Y)$ となる量指標に対して、

$$\prod_{i=1}^{m} L_s(Y_i)u(Y) = (2\pi)^{(n-r)m/2}\prod_{i=1}^{rm}\Gamma(s-\alpha_i)u(X)$$

となるのである。ここで X を X^{-1} にかえて、かつ $\det(X)^s$ を右辺に移項すれば、望みの積分変換公式そのものになる。かくして、Selberg 変換の話の枠内にきれいにおさまってしまった。

6 Tube domain の保型形式

6.1 群の作用と保型因子

まず tube domain の復習をする。主として Karel [16] を参照した。V を実ベクトル空間とし、$V_{\mathbb{C}}$ をその複素化とする。V 内の non degenerate open convex cone Ω をとる。このとき $D = V + i\Omega$ を $V_{\mathbb{C}}$ 内の領域とみなして、これを tube domain または第 1 種ジーゲル領域という。一般に tube domain は有界領域と正則同値である。ここでは有界対称領域と正則同値なもののみを考える。すると、自然に V は形式的実ジョルダン代数の構造をもち、Ω は V 内の symmetric cone としてよい。以下この設定で考える。G を $\mathbb{Q}$ 上定義されていると代数群で、実 Lie 群としての連結成分 $G(\mathbb{R})^0$ を中心で割ったものが D から D への双正則写像の最大連結成分になる半単純代数群とする。さらに G を almost $\mathbb{Q}$ simple（すなわち任意の proper normal $\mathbb{Q}$ subgroup が有限群）かつ simply connected と仮定する。G を simply connected と仮定したので、$G(\mathbb{R})^0 = G(\mathbb{R})$ となる。(cf. [5] p. 273 Corollaire 4.7)

フーリエ展開が十分できるようにするために、特に次を仮定する。

(*) G は、0 次元カスプに対応する $\mathbb{Q}$ 上定義された極大 parabolic 部分群 P をもつ。（特に D を保つ affine 変換全体が P から得られるとしておく。）

これは、それなりに強い条件であるが、この条件がないと、たとえば極端な場合、離散群は cocompact で、フーリエ展開がまったくなかったりするわけであるから、理論はかなり違った展開になるはずであり、除外するのはそれほど不自然とはいえない。

G の $\mathbb{Q}$ 上の maximal split torus のひとつを T とする。G の T に関する $\mathbb{Q}$ 上の相対ルートシステムは C 型である。適当な順序をいれれば、P は short simple roots の集合 Θ に対応していて、T の subtorus で Θ がその上で trivial なもののうち極大なものを T_Θ として、Z_Θ をその centralizer とすると P の Levi 成分が Z_Θ にとれる。P の unipotent radical を U とする。U は abelian であり、V が自然に U の Lie 環とみなせる。というか abelian であるから、同一視してもかまわない。

G の絶対概単純直和成分をとって、G' とする。G は総実代数体 k 上定義され、$G = R_{k/\mathbb{Q}}(G')$ である。G の $\mathbb{R}$ 上の分解に応じて、D は既約成分の直和に分解する。もちろん U も k に共役な体上定義された単純なジョルダン代数の直和になるが、これらはみな同型である。これには、仮定 (*) を用いている。さて、$z \in D$ に対して $z \to -z^{-1}$ (z^{-1} はジョルダン代数としての逆元）が対称空間の geodesic symmetry を与える。これは正則であって、当然 $G^{ad}(R)^0$ （G の adjoint group) から来ているが、さらに $G^{ad}(\mathbb{Q})$ から来ていることもわかっている。この元を$\iota^\# \in G^{ad}(\mathbb{Q})$ とする。$e \in U(\mathbb{R})$ を $U(\mathbb{R})$ のジョルダン代数としての単位元とする。これは同時に $G(\mathbb{Q})$ の元でもある。よって $G^{ad}(\mathbb{Q})$ を G の内部自己同型の群と思えば、$\iota^\#(e) \in G(\mathbb{Q})$ が定義されるが、$w = e\iota^\#(e)e \in G(\mathbb{Q})$ とおくと、$\iota^\# = int(w)$ （$int(w)$ は w による内部自己同型）となる。これには $z \in D$ に対して、$w(z) = -z^{-1}$ を示せばよい。$w = (e\iota^\#(e))e(z) = e + (\iota^\#(e))(z + e)$ であるが、$\iota^\#(e)$ は $G^{ad}(\mathbb{R})$ を $Int(G)$ と同一視しての作用だから、D への作用としては、$\iota^\# e \iota^{\#-1}$ と思って良い。$\iota^{\#-1}(z) = \iota^\#(z) = -z^{-1}$ であって、

$$(\iota^\#(e))(z + e) = \iota^\# e(-(z + e)^{-1}) = \iota^\#(e - (z + e)^{-1}) = -(e - (z + e)^{-1})^{-1}$$

であり、$w(z) = e - (e - (z + e)^{-1})^{-1}$. しかし、ジョルダン代数における逆元の定義より $z^{-1} \in \mathbb{R}[z]$, $(z + e)^{-1} \in \mathbb{R}[z + e]$ であり、これらの間では結合的であるので

$$(e+z^{-1})(e-(z+e)^{-1}) = e+z^{-1}-(e+z^{-1})(e+z)^{-1} = e+z^{-1}-z^{-1}((z+e)(e+z)^{-1}) = e$$

よって、$w(z) = -z^{-1}$ となる。

まとめると、もともとの $G(\mathbb{R})^0$ の $x \in D$ への作用は

(1) $u(x) = x + u$ $(u \in U(\mathbb{R}))$

(2) $z(x) = zxz^{-1}$ $(z \in Z_\Theta(\mathbb{R}))$

(3) $w(x) = -x^{-1}$

である。 ただし (2) において、zxz^{-1} は G 内での演算を表している。

e を適当に選ぶと $int(w)$ は T 上、逆元をとる操作になる。Z_Θ は $int(w)$ で不変になり、$wPw^{-1} = P^-$, $wUw^{-1} = U^-$ となる。ただし、P^- は P の opposite であり、U^- はその unipotent radical.

さて、$G(\mathbb{Q}) \cap G_\infty \prod_p K_p = \Gamma$ という形の（算術的）離散群を考える。ここで保型因子について復習する。P の Levi 分解で、Levi 成分 M が Q 上定義されるものがとれる。canonical automorphy factor というのは $G \times U$ から M へのある rational map $J(g, Z)$ で、D 上は regular になるようなもので、$J(g_1 g_2, Z) = J(g_1, g_2 Z)J(g_2, Z)$ が $g_i \in G^0(\mathbb{R})$, $Z \in D$ となるようなものである。通常保型因子を Harish-Chandra realization で述べてあることが多いが (cf. Satake [27]、) われわれの目的のためには最初から unbounded realization で述べておく方がわかりやすいと思うので [16] の記述に習うことにする。

$$U^- \times P \to G$$

を積の写像で定義すると、これは injective で、image が dense であることはよく知られている。いくつか簡単な事実を述べる。

1. 任意の $g \in G$ に対して、ある U の空でない Zariski open subset V があって、任意の $x \in V$ について、$gxP^- \cap U \neq \emptyset$ となる。
（証明）$g^{-1}UP^-$ は open で UP^- は dense であるから $g^{-1}UP^- \cap UP^- \neq \emptyset$ である。よって、$V = g^{-1}UP^- \cap U$ とおくと、もちろんこれも空でなく、U の開部分集合である。$x \in V$ ならば、$x \in g^{-1}UP^-$ より、$gx \in UP^-$ であり、$gxP^{-1} \cap U \neq \emptyset$ である。q.e.d.

2. $x \in V$ に対して、$gxP^- \cap U = (onepoint)$ である。（証明）$x_0 \in gxP^-$ とすると、あきらかに $x_0 P^- = gxP^-$ であり、$x_0 p = gx$ となる $p \in P^-$ が存在する。さらに $x_0 \in U$ をすると、$U \times P^- \to G$ が injective より、このような x_0, p はただ一つに決まる。q.e.d.

   以上によって、ただ一つに決まる元を $A_g(x)$ と書く。言い換えると各 $g \in G$ に対して、$A_g(x)$ なる、U から U への rational map で $gxP^- = A_g(x)P^-$ をみたすものがただ一つ定まる。$g_1 g_2 x P^- = g_1 A_{g_2}(x) P^- = A_{g_1}(A_{g_2}(x))P^-$ であるから、

3. $A_{g_1}(A_{g_2}(x)) = A_{g_1 g_2}(x)$ である。

以下で、この $A_g(x)$ と G の $D \subset U(\mathbb{C})$ への action が同一であることを見る。この意味をもう少し正確に説明しよう。今 $D = \mathbb{R}^n + i\Omega$ であるが、$D = U(\mathbb{R}) + i\Omega \subset U(\mathbb{C})$ と見なせる。$G(\mathbb{R})^0$ の D への作用がもともとどのように決まっていたのか考えてみよう。D の変換群としての $P = Z_\Theta U$ の作用を $p(x)$ と書こう。$u \in U(\mathbb{R})$ の x への作用は $u(x) = x + u$。$z \in Z_\Theta(\mathbb{R})$ ならば、$zuz^{-1} \in U(\mathbb{R})$ だが $zuz^{-1}(x) = x + zuz^{-1}$、 しかし一方で、$Z_\Theta$ の作用は $U(\mathbb{C})$ 上線形で、$uz^{-1}(x) = z^{-1}(x) + u$, $zuz^{-1}(x) = z(z^{-1}(x) + u) = x + z(u)$ であるから、$z(u) = zuz^{-1}$ である。（$z(u)$ は u を U の元と見なしたときの z のアクションであり、zuz^{-1}

は G の元としての積である。）さて、$u \in U(\mathbb{R})$ ならば、$uxP^- = (ux)P^-$ で $ux \in U$ より、$A_x(u) = u + x$ ($U(\mathbb{R})$ の演算を加法的に書けば)。また $z \in Z_\Theta(\mathbb{R})^0$ ならば、$z \in P^-$ であるから $zxP^- = zxz^{-1}(zP^-) = zxz^{-1}P^-$ より $A_z(x) = zxz^{-1}$ である。最後に w については、記号が混乱するといけないので、ジョルダン代数のなかで x^{-1} となる $U(\mathbb{C})$ の元を Jx と書くことにして、$wxP^- = (Jx)^{-1}P^-$ を示せばよい。（ここで $(Jx)^{-1}$ の inverse は、加法的に書けば $-x^{-1}$ のマイナスに相当することに注意。）$P^- = wPw^{-1}$ より、$w^{-1}(Jx)wxw \in P$ を示せばよい。$Q(x) = xw^{-1}(Jx)wxw$ とおく。$Q(x) \in Z_\Theta$ ならば $x^{-1}Q(x) \in UZ_\Theta = P$ であるからよい。このためには $Q(x)$ が D 上 linear に作用することを示すだけでよい。$y \in D$ に対して $Q(x)y = x + (x^{-1} - (x - y^{-1})^{-1})^{-1}$ である。Hua の identity によれば、x が invertible element の平方の時には $P(x)y = x + (x^{-1} - (x - y^{-1})^{-1})^{-1}$ となる。（e.g. FK p. 39 Exercise 5 (c) で、$b = -y^{-1}$, $a = x$ とおけ。）また、複素ジョルダン代数では任意の可逆元は square である。（e.g. FK p. 153 Prop. VIII.3.4) よって、いつでも $P(x)y = Q(x)y$ であり、$P(x) \in End(U)$ であったから、作用は線形である。よって $Q(x) \in Z_\Theta$. 以上より、作用は通常のものと一致した。

次に保型因子を正確に定義する。$j : G \times U \to Z_\Theta$ を $(g, x) \in G \times U$ に対して、$A_g(x)$ が regular な x に対して $gx \in A_g(x)j(g,x)U^-$ で定義する。$x \in D$ ならばもちろんいつでも定義されている。$g_1g_2x \in g_1A_{g_2}(x)j(g_2,x)U^- \in A_{g_1}(A_{g_2}(x))j(g_1, A_{g_2}(x))U^-j(g_2,x)U^- = A_{g_1g_2}(x)j(g_1, A_{g_2}(x))j(g_2,x)U^-$ であるから $j(g_1g_2, x) = j(g_1, g_2(x))j(g_2, x)$ である。とくに $g \in U$ ならば $j(g,x) = 1$ であり、$g \in Z_\Theta$ ならば $gx = gxg^{-1}g$ から $j(g,x) = g$ である。w については、上で見たように $j(w, Z)$ は D 上では $P(Z)$ を引き起こす。ただし、保型因子は一般には G の adjoint group で決まるわけでは無いので、注意が必要である。実際、$P(Z)$ が等しくても $J(w, Z)$ が異なることは当然ある。（たとえば単に保型因子ということならば $Sp(n, \mathbb{R})$ などで $\det(CZ + D)^k$ は k がなんであっても保型因子である。ここで $C = 1_n$, $D = 0$ なる元をとれば $\det(Z)^k$ と $\det(-Z)^k$ は kn が奇数ならば当然異なる。この場合はこのような保型因子に対応する保型形式はないわけだが、それでも保型因子は定義されるわけである。）

(ρ, V_0) が Z_Θ の表現であるとき、保型因子 $\rho(j(g, Z))$ が定義される。ρ としては、Z_Θ の $\mathbb{Q}$ 上定義された代数的なキャラクターのみを考えることにしよう。これは、たとえば Hilbert modular などでは、mixed weight は考えないことを意味している。この仮定が無いと、$\det(T)$ などが rational とは言えないことになって、困難な感じがするから、除外するのである。任意の $\gamma \in \Gamma$ に対して $f(\gamma Z) = \rho(j(\gamma, Z))f(Z)$ となる V_0 valued な D 上の正則写像を保型形式と呼ぶ。たとえば、$Hom(Z'_\Theta, G_m)$ は無限巡回群であり、これの生成元 χ' をとれば、共役の積 χ をとることで、Z_Θ 上の保型因子が自然に定められる。これが通常の det にあたるものである。これの k 乗上できまる保型因子を「重さ k」と言うことにする。とくに群の作用の関数行列式に当たるものは、$k = 2n/r$ のときである (Karel [16] p. 90). 実は χ^2 で決まる保型因子は簡単に記述できて

$$\chi^2(g) = \det(A_g(e))$$

となることが知られている。（これの「平方根」が指標であると言うところには G が単連結という仮定を使用している。[16] p. 89）$j(w, Z)$ については、$j(w, Z)(e) = P(Z)e$ であっ

たから、$\chi^2(j(w,Z)) = \det(Z)^2$ である。よって $\chi(j(w,Z)) = \epsilon\det(Z)$ ($\epsilon = \pm 1$) となる。ここで、$\epsilon = -1$ なる例があるのかどうか、私にはよくわからない。

ゼロでない保型形式が存在するためには $\chi^k(j(g,Z))$ はΓ の中心 $Z(\Gamma)$ 上、1 でないと困るので、以下これは常に仮定する。もし $w \in \Gamma$ ならば、$w^2 \in Z(\Gamma)$ である。よって、$\chi(j(w^2,Z)) = 1$. 一方、$j(w^2,Z) = j(w,-Z^{-1})j(w,Z)$ である。もともと $Z \to -Z^{-1}$ の関数行列式は $DetP(Z) = \det(z)^{2n/r}$ であるから、$\chi^k(j(w,z)) = \epsilon^k\det(z)^k$ となる。よって、$\epsilon^2\det(Z)^k\det(-Z^{-1})^k = 1$. つまり $\epsilon^2 = (-1)^{krm}$ である。$\epsilon^2 = 1$ であったから、もし $w \in \Gamma$ ならばゼロでない保型形式が存在するためには、$(-1)^{rmk} = 1$ が必要である。しかしたとえば $Z(\Gamma)$ 上 trivial という仮定から$\epsilon = 1$ になるのかどうか、私にははっきりわからなかった。（常識的な例では皆 $\epsilon = 1$ である。反例はあるのかどうかよくわからない。）あとでは簡単のため、$\epsilon = 1$ と仮定する。（仮定しなくても関数等式にϵ をつければいいのだが、気が向かないので。）

U を P の unipotent radical とすると、P が 0 次元カスプに対応しているという仮定より、U は abelian であり、また、形式的実ジョルダン代数の構造を持つのだった。U の正定値な内積を (x,y) とする。$\Lambda' = U \cap \Gamma$ とおき、Λ を Λ' の dual lattice、すなわち、$\Lambda = \{x \in U(\mathbb{R}); tr(xy) \in \mathbb{Z} \text{ for all } y \in \Lambda'\}$ とする。f が Γ に対する保型形式なら、任意の $S \in \Lambda'$ について

$$f(Z+S) = f(Z)$$

である。よって、

$$f(Z) = \sum_{T\in\Lambda} a(T)e^{2\pi i(TZ)}$$

とフーリエ展開される。Koecher principle により、$T \in \Lambda \cap \overline{\Omega}$ (バーは closure) でなければ、$a(T) = 0$ となる。

6.2 Fourier 級数の評価

記号を前節の通りとする。また、保型形式は $\mathbb{C}$ valued のものだけを考える。よって $a(T) \in \mathbb{C}$ である。Koecher-Maass 級数の収束を言うためには、フーリエ係数 $a(T)$ の評価が必要になる。たとえば通常のジーゲル保型形式であれば、重さ k の保型形式に対して、

$$a(T) = O(\det(T)^k)$$

が成り立つ。これは 1 変数保型形式では、cusp form だけ証明してアイゼンシュタイン級数は具体的な形から明らか、といってお茶をにごしている本も多いが、実際は $(cz+d)^{-k}$ を評価すれば、全く簡単に統一的な証明が得られる (e.g. [31], [14] など。) 一般のジーゲル保型形式では、実は評価はそれほどあっさりとは得られない。この証明について、本質的に Maass [22] と異なるものを私は見たことがない。証明法は、離散群の具体的な形にきわめて依存しており、一般化するのには、かなり困難を感じる。（もちろん、よく似た表示の群で、類似の論法を取るのはすぐにできるが、なかなか一般論にならない。）一方で、一般の保型形式の増大度評価の条件としては、Harish-Chandra によるものが一般的で、これ

は非常に精密ではないが（また、正則保型形式がこの増大度条件を満たすこと自身、Siegel set に関する、一種の基本領域の考察を含むものであって、全然 trivial な結果とは言えないが）粗い評価をするには役に立つ。すなわち、$O(\det(T)^k)$ のような詳しい評価はよくわからないのだが、以下のような命題が成り立つことがわかる。

命題 6 $a(T)$ を $\mathbb{C}$ *valued* な保型形式のフーリエ係数とするとき、ある正の数 C と l が存在して、任意の $T \in \Lambda \cap \Omega^m$ に対して、

$$|a(T)| \leq C \det(T)^l$$

となる。

以下この節の終わりまで、この命題の証明を行う。実はこの証明は、かなり苦労してしまった。

保型形式の増大度: $Z = X + iY \in D$ とし、X が有界領域を動くとすると、ある正の定数 $C > 0$ と $\kappa > 0$, $l_0 > 0$ があって、

$$|f(Z)| < C \det(Y)^{-l_0}(Tr(Y) + Tr(Y^{-1}))^{\kappa}$$

となる。これを示そう。

フーリエ係数は保型形式に指数関数をかけたものを実部について有界な範囲で積分して得られるのだから、保型形式の評価が問題になる。われわれが欲しいのは $|f(Z)|$ $(Z \in D)$ の評価であるが、有界対称領域を離散群でわったものの境界では、そこの局所座標で書けば有界と言うだけであって、たとえ基本領域だけ考えても、$|f(Z)|$ 自身が基本領域全体で有界という保証はない。フーリエ展開できることより、$Y \geq \epsilon e$ のような領域で有界になるにすぎない。（よって基本領域がたまたまこのような領域に含まれていればそこでは有界になる。）これを D 全体（といっても実部は有界という条件下）で評価するために、Harich-Chandra の条件を使う。（この条件は正則という条件よりかなり弱いので評価は一見悪くなるが、細部を正確に見ればもっと精密な評価ができるであろう。今は深入りしない。）

Borel [3] などから必要事項を復習する。まず、$g \in G(\mathbb{R})^0$ に対して、

$$F(g) = f(g \cdot ie)j(g, i)^{-1}$$

とおく。F は左 Γ 不変であり、適当な $C > 0$, $\kappa > 0$ に対し増大度条件

$$|F(g)| \leq C||g||^{\kappa}$$

を満たす。ただし、ここで $||g||$ は、$G \in GL(N, \mathbb{C})$ なる埋め込みを適当に取り、$\mathbb{C}^N$ に K 不変な内積を入れた時、$||g|| = Tr(g^*g)$ と定義される。ここで g^* はこの内積に関する dual であり、この定義は本質的に埋め込みにはよらない（$||g||$ は他の埋め込みの

「ノルム」の巾のオーダーで押さえられる。）しかし、埋め込み方によって、$||g||^\kappa$ の κ は変わるかもしれないので、この意味では非常に精密な議論をするのには向いていないとも言える。さて、どんな埋め込みでも良いから $||g||$ をひとつ具体的に計算したい。これは $||g|| = Tr(Ad(wg^{-1}w^{-1})Ad(g))$ で与えられる。ただし $Int(w)$ は前節の通りで、Cartan involution になるのであった。$g(ie) = X + iY$ にすればよいのだから、g は D のアフィン変換としてよく、$Z = P(Y^{1/2})(ie) + X$ である。しかし、$||g||$ の計算をある程度きちんと行う必要がある。X は有界としているから、つけなくても定数倍しか異ならず、$P(Y^{1/2})$ のノルムだけ求めればよい。$wP(Y^{1/2})w^{-1} = P(Y^{-1/2})$ である。G の Lie 環上での Adjoint action を求めるのに、Cartan subgroup に制限する。(FK p.211, 212)

$$R = \{t = \sum_{j=1}^{r} t_j c_j ; t_j \in \mathbb{R}\}$$

として、$(t_1, ..., t_m) \in R^m$ に対して、$\sum_{k=1}^{m} ||P(t_k)||$ を考える。Cartan involution でひねると $P(t_k^{-1})$ がでる。G の Lie 環は FK p.211 に記述があるが、作用は適当な基底について $1, t_j, t_j^{-1}, (t_j t_k)^{1/2}, (t_j t_k)^{-1/2}, (t_j t_k^{-1})^{1/2}$ である。すなわち、$||P(t_k)|| < C(\sum_{j=1}^{r}(t_j t_j^{-1}))^2$ としてよい。しかし Cartan 分解を考えれば、トーラス部分でわかっていれば残りはすべてわかるし、トーラス部分のトレースと全体のトレースは「同等」だから、$||P(Y^{1/2})||$ は $(Tr(Y) + Tr(Y^{-1}))$ としてよく、適当な正の数 l_0 について $j(g, i) = \det(Y)^{l_0}$ であるから、

$$|f(Z)| < c_3 \det(Y)^{-l_0}(Tr(Y) + Tr(Y^{-1}))^\kappa$$

としてよい。

簡約理論: あとで $Y = T^{-1}$ と取るつもりなのだが、$T \in \Lambda \cap \Omega^m$ に対し、Γ_Θ-orbit の代表をとる。Γ_Θ の作用で $|a(T)|$ は変わらないから、T として、いわば 2 次形式の時の “Minkowski reduced” に当たるものを取ってもよい。（しかし、ここまで実は精密な基本領域は必要ないので、かわりに Siegel set を利用するのである。後述。）このときに 2 つのことを言いたい。
(1) $Tr(T^{-1})$ は T に無関係に有界
(2) ある正の数 l があって、任意の ”reduced” な T について $Tr(T) \le C \det(T)^l$。

ここで “reduced” という言葉をいい加減に使用したが、もう少しはっきりさせるために、Borel [4] から、Siegel set 等の reduction の話を今の場合に適用する部分に限って引用する。P_0 を Z_Θ に含まれる $\mathbb{Q}$ 上の minimal parabolic subgroup とする。Z_Θ の maximal split torus S over $\mathbb{Q}$ を含むような物としておいてよい。$S^0_\mathbb{R}$ を S の $\mathbb{R}$ valued points の連結成分として、$t > 0$ に対して

$${}_{\mathbb{Q}}A_t = \{a \in S^0_\mathbb{R} ; a^\alpha \le t \ (\alpha \in_\mathbb{Q} \Delta)\}$$

とおく。ここで ${}_{\mathbb{Q}}\Delta$ は Z_Θ の roots に、P_0 に対応する順序（つまり正のルートに対応する Lie 環内の固有空間の exp として得られる unipotent subgroup と $Z(S)$ で P_0 が生成されるようなもの）をひとつ決めて、その順序に関する simple roots をとる。U_0 を P_0 の unipotent radical, $Z(S)^0$ を Z_Θ^0 内での S の centralizer, M を $\mathbb{Q}$ 上 anisotropic な maximal $\mathbb{Q}$ subgroup of $Z(S)^0$ とする。（すなわち、M が $\{1\}$ 以外に $\mathbb{Q}$-split subtorus を含まない、または $M(\mathbb{Q})$ が皆 semi-simple elements で、$\mathbb{Q}$ 上の character が trivial なものしかない。）ω を $M_{\mathbb{R}}^0 U_{0,\mathbb{R}}$ 内での単位元のコンパクト近傍とし、$t > 0$ とする。K_0 を $Z_{\Theta,\mathbb{R}}$ の極大コンパクト部分群として、

$$S_{t,\omega} = K_0 \cdot {}_{\mathbb{Q}}A_t \cdot \omega$$

とおく。これを Siegel set という。

定理 1 (e.g. Borel [4] p.90) 適当な $t > 0$ と ω と $G_{\mathbb{Q}}$ 内の有限集合 C をとると

$$Z_{\Theta,\mathbb{R}} = S_{t,\omega} \cdot C \cdot \Gamma_\Theta$$

となる。

上で積の順序には十分注意を払うべきである。そのまま$\omega \cdot_{\mathbb{Q}} A_t K_0$ と入れ替えるわけには行かないのである。順序を変えようと思ったら、逆元をとるか、転置を取るかであるが、前者は ${}_{\mathbb{Q}}A_t$ のルートの順序が変わり、後者は P_0 が opposite に変わる。いずれにしても、トーラス部分と minimal parabolic のルート系の対応関係が変わってくるのである。この順序は具体的に群を対称空間（たとえば symmetric cone) に作用させて、その作用された空間のほうで Siegel set を考えようとするときに作用の左右に関係してくる。上の定理を symmetric cone の時に詳しく解説した本として Ash et al [1] があるが、上記の点で、記述にかなり混乱がある。これについては次項で修正するとして、ここでは、説明を続けよう。

説明を容易にするために、少し記号を変える。$G_0 = Aut(V, \Omega^m)^0$ とする。意味は、cone Ω^m を不変にする V の線形自己同型群である。V や内積の $\mathbb{Q}$ structure を考えて、これは $\mathbb{Q}$-group である。Z_Θ, P_0, A 等をここでの像で考えて、像ともととを今あまり正確に記号を分けないことにする。P_0 の unipotent radical を U_0 と書く。
$Lie(G_0)$ の構造はよく知られていて、$End(V(\mathbb{R}))$ の部分 Lie 環

$$L(V(\mathbb{R})) + [L(V(\mathbb{R})), L(V(\mathbb{R}))]$$

になる (FK p.149 or Ash et al. p. 76。) ブラケットに関して Lie 環になるのは、公式 $L(x(yz) - (xy)z) = [[L(x), L(z)], L(y)]$ による。（FK p.36) ここで $End(V(\mathbb{R}))$ の部分 Lie 環として $[L(V(\mathbb{R})), L(V(\mathbb{R}))] = Der(V)$ でもあるから、演算を上の記述に沿っていれるならば、$V \oplus Der(V)$ と書いても良い。さて、ルート構造を見たい。しかし、

今は $\mathbb{Q}$ 上の構造を考えているのだから、$\mathbb{Q}$ 上の ${}_{\mathbb{Q}}A$ で決まる相対ルート系を調べるのである。今、$V(\mathbb{Q})$ の直交巾等元の極大系をひとつ固定して $e_1, \ldots, e_s$ とする。この個数は一般に $V(\mathbb{R})$ の単純成分の rank（どの成分でも同一）よりも小さいかもしれないが、A の rank に等しい。必要なら記号を少し取り替えて、$Lie(A) = \sum_{i=1}^{s} \mathbb{R} e_i$ とできる。以前のセクションでは、基礎体が $\mathbb{R}$ の時だけ、Peirce 分解を述べたが、一般の体の場合も全く同様に分解できる。すなわち、$V_{ii} = V(e_i, 1)$, $V_{ij} = V(e_i, 1/2) \cap V(e_j, 1/2)$ とおけば、$V = \sum_{i=1}^{s} V_{ii} + \sum_{i<j} V_{ij}$ であり、積なども前と同じように計算できる。$\gamma_i \in Hom(Lie(A)_{\mathbb{R}}, \mathbb{R})$ を $\gamma_i(e_j) = \delta_{ij}$ となるものと定める。ルート系を γ_i を用いて表すと、$(\gamma_i - \gamma_j)/2$ $(i \neq j)$ となることが証明できて、ルートの固有空間は $(\gamma_i - \gamma_j)/2$ に対しては次のように表示できる。

$$Lie(G)_{ij} = \{x \in V_{ij}; L(x) + 2[L(x), L(e_j)]\}$$

exp による対応する unipotent subgroup を U_{ij} と書くことにする。計算はたとえば Ash et al. [1] p. 93–96 を見よ。さて、微妙なところなので、はっきり決めなくてはならないが、われわれは単純ルート系を

$$\Delta = \{(\gamma_{i+1} - \gamma_i)/2; i = 1, \ldots, s-1\}$$

と取ることにする。これに対応する minimal $\mathbb{Q}$-parabolic を P_0 とする。これの $V(\mathbb{R})$ への作用を調べる。今、$p_\nu = e_{\nu+1} + e_{\nu+2} + \cdots + e_s$ とおく。$V(p_\nu, 1)$ の可逆元の 2 乗は、$V(p_\nu, 1)$ 内の symmetric cone だが、これを $C(p_\nu)$ と書くことにする。$C(p_\nu) \subset \overline{C}$ は明らかであって、$C(p_\nu)$ を C の rational boundary component という ($\overline{*}$ は普通の位相に関する closure である。) $\overline{C(p_{s-1})} \subset \cdots \subset \overline{C(p_1)} \subset \overline{C}$ であって、これを flag of $\mathbb{Q}$-rational boundary components という。ムードとして、flag を固定する（normalize する）のが、minimal parabolic というのは容易に想像できる。実際正確に計算すると、$i > j$ のときには、$x \in V_{ij}(\mathbb{R})$ に対して、$L(x) + 2[L(x), L(e_j)]$ の作用で $V(p_\nu, 1)$ は不変部分空間になることがわかる。exp をとっても不変なのは言うまでもない。この部分の証明は [1] では省略されているが、その結果、記述が間違っているので、ここでは、方針くらいは示唆しておこう。場合分けする。以下で $x \in V_{ij}$, $y \in V(p_\nu, 1)$ としておく。

1. $\nu + 1 \leq j < i$ の場合、$y \in V(p_\nu, 1)$, $e_i, e_j \in V(p_\nu, 1)$, $x \in V_{ij} \subset V(p_\nu, 1)$ であるから、$L(x)y + 2[L(x), L(e_j)]y = xy + 2(x(e_j y) - e_j(xy)) \in V(p_\nu, 1)$ である。

2. $j \leq \nu < i$ の場合、$e_j \in V(p_\nu, 0)$, $y \in V(p_\nu, 1)$ より、$e_j y = 0$, $xy \in V(p_\nu, 1/2)$ である。$xy \neq 0$ であるためには、$y \in V_{ik}$ $(k > \nu)$ でなければならない。このとき $xy \in V_{jk}$ になる。よって、$e_j(xy) = xy/2$, よって、$(L(x) + 2[L(x), L(e_j)])y = 0$.
3. $j < i \leq \nu$ の場合、$x \in V_{ij} \subset V(p_\nu, 0)$, $e_j \in V(p_\nu, 0)$ より、$xy = 0$, $e_j y = 0$ である。

以上によって、$V(p_\nu, 1)$ $(\nu = 1, \dots, s-1)$ はどれも$\Delta = \{(\gamma_{i+1} - \gamma_i)/2\}$ に対応する P_0 で不変である。

次にもう一つ後で必要になることを示す。V を $e_1, \dots, e_s$ で Peirce 分解したときに、$V_{11} = V(e_1, 1)$ への射影を仮に (1,1) 座標と呼ぶことにすると、任意の $v \in V$ の元への U_0 の作用で、(1,1) 座標は変わらない。（これは $V(e_1, 1)$ が空間として不変だという意味ではない。実際、不変にはならない。U_0 で写しても (1,1) 座標には前と同じものしかあらわれないということを言っている。）

証明は純粋な計算にすぎないが書いておく。Lie 環のほうで計算する。$v \in V$ を $v = v_1 + v_{1/2} + v_0$, $v_i \in V(e_1, i)$ と分解しておく。$Lie(G_0)_{ij}$ $(i > j)$ の作用を見る。

1. $j = 1$ のとき、$e_1 v_1 = v_1$, $xv_1 \in V(e_1, 1/2)$, $xv_1 \in V(e_1, 1/2)$ よって $2L(x)v_1 \in V(e_1, 1/2)$ が像である。$e_1 v_0 = 0$, $xv_0 \in V(e_1, 1/2)$ より、$xv_0 + 2(-xy/2) = 0$ が像である。また、$e_1 v_{1/2} = v_{1/2}/2$, $xv_{1/2} \in V(e_1, 1) + V(e_1, 0)$. $xv_{1/2} + 2(xv_{1/2}/2 - e_1(xv_{1/2})) = 2L(e - e_1)L(x)v_{1/2} \in V(e_1, 0)$. よって、行列表示すれば
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2L(x) & 0 & 0 \\ 0 & 2L(e-e_1)L(x) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_{1/2} \\ v_0 \end{pmatrix}$$
となる。以上で exp をとっても、v_1 座標が変わらないのはあきらか。
2. $2 \le j < i$ とする。$xv_1 = e_j v_1 = 0$ よりこの像はゼロ。$x, e_j \in V(e_1, 0)$ であるから、v_0 の像は $V(e_1, 0)$ にはいる。$xv_{1/2}$, $e_j v_{1/2}$, $e_j(xv_{1/2}) \in V(e_1, 1/2)$ である。よって行列で書くと $*$ で適当な行列を表すとして、
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_{1/2} \\ v_0 \end{pmatrix}$$
となり (1,1) 座標は exp で、保たれている。

以上をまとめて書いておく。G_0 の算術的離散群 Γ_0 をひとつ固定しておく。

命題 7 *(1)* $\Delta = \{(\gamma_{i+1} - \gamma_i)/2\}$ に対応する P_0 で各 $V(e_{\nu+1} + \cdots + e_s, 1)$ は不変である。
(2) U_0 の作用で、*Peirce* 分解における $V(e_1, 1)$ への射影は変わらない。
(3) $t > 0$ に対し、V の部分集合 $A(t) = \{\sum_{i=1}^s a_i e_i; 0 < a_i < t a_{i+1} (i=1, \dots, s)\}$ をとり、$Z(A)$ の *anisotropic subgroup* と *root (unipotent) subgroup* U_{ij} $(i > j)$ の積に含まれる *compact* 集合 ω を取る。ここで *Siegel set* $S_{\omega,t}$ を
$$S_{\omega,t} = \omega \cdot A(t)$$
と定義すると、G_0 の有限集合 F があって、$G_0 = \Gamma_0 F S_{\omega,t}$ となる。

以上で最後の主張は Borel の結果を作用させた空間のほうで見た物である。さて、上で F の部分は評価において、無視できる部分である。実際、$f \in F$ でも fT は polynomial action であるから、また、$(fT)^{-1} = (f^*)^{-1}(T^{-1})$ (f^* は内積に関する adjoint をとった) であるから、$c_1 Tr(T) < Tr(fT) < c_2 Tr(T)$, $c_1 Tr(T^{-1}) < Tr((fT)^{-1}) < c_2 Tr(T^{-1})$, となる正の定数 c_i がとれる。よって評価においては T は Siegel set からとって話を考えても良い。

ミスプリント: Ash et al. [1] は Siegel set の説明において、正確ではない部分がある。この本はこの部分でミスプリントが多く、一見 2 重に間違って、結果が正しくなったような部分もある。かなり混乱させられたので読者のためにミスプリントを指摘しておく。

- p.84 l.4, $P(a) = \{x \in G; \lim_{t\to 0} a(t)^{-1}xa(t)\ exists\}$ としないと後と整合しない。
- p.93 下 l.6, $D\epsilon_i = -\lambda_i \epsilon$
- p.95 l.2, 3, $D\epsilon_1 = -x/2$, $D\epsilon_2 = x/2$
- p.102 下 l.8–l.10, standard flag を normalize する minimal k-parabolic は simple roots $(\gamma_i - \gamma_{i+1})/2$ に対応すると書かれているが、実際には $(\gamma_{i+1} - \gamma_i)/2$ に対応する。(少なくとも対応を positive roots と minimal parabolic という普通の意味に解釈する限りは。)
- p.106 or p.107, P と対応する simple roots Δ と A_t または A^+ を定義する roots を同一に取っているのは間違いである。P が Δ に対応するのなら、A_t の定義では $-\Delta$ をとらねばならない。

かくして、p. 102 と p.107 で両方間違ったために p. 108 以降の議論は結果的に正しくなったという、偶然が生じている。(というか、たぶん結論の状況ははっきり理解していて、それに議論の細部を十分注意せずにあわせたのではないかというのが私の推察である。まあ、よくあることですが、引用するときはご注意を、、、)

トレースの評価： 以下では L を $V(\mathbb{Q})$ の lattice とし、$T \in L \cap \Omega^m$ とする。さらに $T \in S_{\omega,t}$ (Siegel set) と仮定する。

1. $Tr(T^{-1}) < c_3$ を示す。$Z(A)$ の元は、定義により A と可換なわけだから、$V(e_i, 1)$ を不変に保つ。よって、$\sum_{i=1}^s a_i e_i \in A(t)$ に ω を作用させると、$\sum_{i=1}^s a_i T_i$ (T_i はあるコンパクト集合を動く) に、U_{ij} ($i > j$) のコンパクト集合を作用させたものが、すなわち T である。さて、U_{ij} は $V(e_1, 1)$ への射影を不変に保つのだから、$a_1 T_1$ は、U_{ij} の元を作用させても変化しない。ところが $T \in L$ であるから、、$V(e_1, 1)$ の適当な座標系 (基底) で考えたときの座標はそれぞれ有理数だが、この分母は有界である。これが正の範囲で動くなら、その座標には最小値があるということになる。つまりは $tr(a_1 T_1)$ を考えると、これは正だから、$c_4 < tr(a_1 T_1)$ となる。一方 T_1 はコンパクト集合を動くだけだから、$a_1 tr(T_1) < c_5 a_1$ であっ

て、結局 $c_6 < a_1$ となる正の定数 c_6 が存在する。ということは、$a_i < ta_{i+1}$ を考慮に入れて、$c_7 < a_i$ $(i = 1,\ldots,s)$ となる。$T = u \cdot \sum_{i=1}^{s} a_i T_i$ としてよい。ただし $u \in U_0$ である。$T^{-1} = (u^*)^{-1} \sum_{i=1}^{s} a_1^{-1} T_i^{-1}$ であって、u, T_i などもコンパクト集合を動く。よって、$Tr(T^{-1}) < c_7$ とできるのである。

2. 次に、$T \in S_{\omega,t}$ ならば、$Tr(T) < c_8 \det(T)$ を言う。P_0 の作用は線形であり、$a_1e_1 + \cdots + a_se_s$ にコンパクト群を作用させれば、トレースは a_i の有界な係数による線形結合になるだけであり、よって $Tr(T) < c_9(a_1 + \cdots + a_s)$ である。$c_7 < a_i$ より、$c_{10} < \prod_{i \neq j} a_i$ となるから、$a_j < c_{10}^{-1} \prod_{i=1}^{s} a_i$ である。よって、$Tr(T) < c_{11} \prod_{i=1}^{s} a_i$. また同様に、任意の自然数 f_i に対して、$Tr(T) < c_{12} \prod_{i=1}^{s} a_i^{f_i}$ である。T は $a_1e_1 + \cdots + a_se_s$ にコンパクト群による線形変換を施して得られるのであり、$\det(gx) = Det(g)^{r/n} \det(x)$ ($Det(g)$ は線形変換としての行列式、r は $\mathbb{R}$-rank, n は次元）であったから、$Det(g)^{r/n}$ は恒に正であり、また $Det(g)$ は (上下に）有界であり、$g^{-1}T$ を考えると $\det(T) > c_{13} \det(a_1e_1 + \cdots + a_se_s) = c_{13} \prod_{i=1}^{s} a_i^{dimV(e_i,1)} > c_{14} Tr(T)$. (Karel [16] p.87 下 l.13, 14 によれば、$dimV(e_i, 1)$ は i によらずに一定だそうだが、これは証明を確認していない。また、上で使用もしなかった。)
3. 最後に、$T \in S_{\omega,t} \cap L$ ならば $Tr(T^{-1}) + Tr(T) < c_{15} \det(T)$ をいう。$Tr(T)$ については述べたし、$Tr(T^{-1})$ は有界であった。一方、$T \in L$ より a_i は下に有界だったし、$\sum_{i=1}^{s} a_i < c_{16} \det(T)$ でもあったから、$\det(T)$ は正の定数以上である。よって、$Tr(T^{-1}) < c_{17} \det(T)$ となる定数がある。

保型形式の評価： まとめると、$T \in \Lambda \cap \Omega^m$ のとき、T を適当な Γ_0 同値な元 に置き換えると、T に無関係な定数 c_{17} が存在して、$Tr(T^{-1}) + Tr(T) < c_{17} \det(T)$ が成立する。よって、$T \in \Lambda \cap \Omega^m$ について、適当な Γ_0 同値類に置き換えると、X が固定されたコンパクト集合を動くとき $|f(X + iT^{-1})| < c_{18} \det(T)^l$ となる T に無関係な正定数 c_{18}, l が存在する。これは以上をあわせると明らかである。

フーリエ係数の評価： 任意の $T \in \Lambda \cap \Omega^m$ に対して、$a(T)$ は、定義により

$$a(T) = \int_{V(\mathbb{R})/\Lambda'} f(X + iT^{-1}) e^{-2\pi Tr(TX)} dX$$

であるが、左辺の絶対値は、T を Γ_0 同値なものに置き換えても変わらず、また、このようなおきかえを適当にとれば右辺は $c_{18} \det(T)^l vol(\Lambda')$ で押さえられる。よって証明できた。

この節で、reduction theory について、必要なことのみ証明するという形で述べてきたが、あとで利用するためにもう少しすっきりした述べかたを付け加えておく。

命題 8 $Y \in S_{\omega,t}$ とし、$p \in \omega$ で $Y = p \cdot (a_1e_1 + \cdots + a_se_s)$ と書けているとすると、ある ω, t のみによる定数 c_{19}, c_{20} が存在して、

$$c_{19}(a_1e_1 + \cdots + a_se_s) < Y < c_{20}(a_1e_1 + \cdots + a_se_s)$$

となる。

証明を述べる前に、補題を書く。

補題 4 C_0 を任意の *symmetric cone* Ω のコンパクト部分集合とする。このとき C_0 のみによる正の定数 c_{21} c_{22} が存在して、任意の $x \in C_0$ の固有値 λ は $c_{21} < \lambda < c_{22}$ を満たす。

証明：C_0 の元に対する「固有多項式」(generic minimal polynomial) $f(x,\lambda)$ の係数は多項式関数だから、有界である。固有値はいつでも正だから、これが 0 に集積するとすると、$f(x,\lambda)$ の定数項 $a_r(x)$ が 0 に収束するような $x \in C_0$ の列があることになるが、C_0 コンパクトより、部分列が C_0 の中で実際に収束し、この極限の固有値は 0 を含む。これは矛盾である。よって、固有値はある正の数より大きい。一方、λ が十分大のところで、$|f(x,\lambda) - \lambda^r| < \lambda^r$ となることが容易に証明できる。すなわち、ここでは λ は固有値になり得ないわけで上から押さえられることもわかった。

Proposition の証明：flag of rational boundary components を不変にする事を用いる。p を取り替えて、$t = 1$ と仮定しても一般性を失わない。$b_1 = a_1$, $a_i = b_1 + b_2 + \cdots + b_i$ と置くことにする。$\sum_{i=1} a_i e_i = \sum_{j=1}^{s} (\sum_{i=j}^{s} b_i e_i)$ である。p を上記の和の各項に作用させると、$V(e_j + \cdots + e_s, 1)$ およびその中の symmetric cone は P_0 の作用で不変であったから、$Y = \sum_{i=1}^{s} b_i T_i$ と書ける。ここで $T_i \in (V(e_i + \cdots + e_s, 1)^{\times})^2$ である。各 T_i は ω で決まるコンパクト集合を動くから、$c_{23,i}(e_i + \cdots + e_s) < T_i < c_{24,i}(e_i + \cdots + e_s)$ となる。$c_{23.1}$ の最小値を c_{19}, $c_{24,i}$ の最大値を c_{20} と置けばよい。q.e.d.

実はこの命題を使えば、$\det(T)$ と $\prod_{i=1}^{s} a_i^{dimV(e_i,1)}$ の関係などは直ちにみえるわけである。

次のセクションで使用するために、もう少し不等式を示しておく。$Y \in S_{\omega,t}$ のときに、$Y = p \cdot Y_0$, $Y_0 = \sum_{i=1}^{s} a_i e_i$ と置くことにする。$T \in \Lambda \cap \Omega^m$ とする。

補題 5 記号を上の通りとして、

$$Tr(Y) < c_{25} Tr(Y_0) < c_{26} Tr(Y_0 T) < c_{27} Tr(YT)$$

となる、ω, Λ のみによる定数 c_i （$i = 25$, *26, 27)* がある。

証明：最初と最後の不等式は前記の命題より明らか。2 つ目は、$Tr(TY_0) = \sum_{i=1}^{s} a_i Tr(T_{ii})$（ここで T_{ii} は T の Peirce 分解における成分）であるが、$Tr(T_{ii})$ は分母が有界で、正の定数で下から押さえられているから明らか。q.e.d.

7 関数等式の証明

簡単のために保型形式は $\mathbb{C}$ valued の場合を考える。重さ k の正則保型形式 $f(Z)$ に対して、$g(Y) = f(iY)$ $(Y = (Y_1, ..., Y_m) \in \Omega^m)$ とする。離散群が $Z \to -Z^{-1} = (-Z_1^{-1}, ..., -Z_m^{-1})$

を含んでいるとし、このときの保型因子を $\det(Z)^k$ と仮定すれば、、定義より $g(Y^{-1}) = (-1)^{rm/2}\det(Y)^k g(Y)$ となる。Ω^m 上の不変微分作用素 P_k を

$$P_k = \prod_{i=1}^{m} \det(Y_i)^{-k}\hat{M}_r(Y_i)\det(Y_i)^k M_r(Y_i) = (-1)^{rm}\prod_{i=1}^{m}\mathcal{D}_k(Y_i)\mathcal{D}_0(Y_i)$$

と定義する adjoint operator の公式より、$\hat{P}_k = \det(Y)^k P_k \det(Y)^{-k}$ である。また、P_k は不変微分作用素だから、$h(Y^{-1}) = (-1)^{rm/2}\det(Y)^k h(Y)$ なる関係は保存される。Mellin 変換を定義しよう。u を Ω^m 上の量指標とする。$\Gamma_1 = \Gamma \cap Z_\Theta$ とおく。

$$\eta(s,u) = \int_{\Gamma_1\backslash\Omega^m} h(Y)\det(Y)^s\hat{u}(Y)dv$$

とおく。ここで $dv = \prod_{i=1}^{m}\det(Y_i)^{-n/r}dY_i$ であった。

まずこの積分の収束を言わねばならない。$\Gamma_0\backslash\Omega^m$ の基本領域を $\mathcal{R}$ と書く。前のセクションの定理より、任意の $T \in \Lambda \cap \Omega^m$ に対して $|a(T)| < C\det(T)^l$ としてよい。

7.1 積分の収束

上のフーリエ級数の評価のもとで、収束を証明しよう。$g(Y)$ のフーリエ展開は P_k で項別微分してよい。すなわち

$$h(Y) = \sum_T a(T)P_k e^{-2\pi Tr(TY)}$$

となる。積分も項別積分したものの収束を言うことで証明する。

step 1:量指標の部分 量指標の部分の評価は、$|\hat{u}(Y)| < c_1(\det(Y)^{-1/rm}\sum_{i=1}^{m}Tr(Y_i))^\kappa$ である。これを $Y \in \mathcal{R}$ として無理矢理 $Tr(TY)$ と関連づけてしまう。ある定数 c_{28} があって、任意の $T \in L \cap \Omega^m$ と $Y \in \mathcal{R}$ について、

$$Tr(Y) < cTr(TY)$$

となる。Y が Siegel set 内の元ならば、前のセクションで示したとおりであるが、$F \subset G_0$ を有限集合とするときに $c_{29}Tr(Y) < Tr(fY) < c_{30}Tr(fY)$ は明らかだから、$Y \in \mathcal{R}$ であるばかりでなく、Y は Siegel set の元として証明すればよい。よって結論としては、$Y \in \mathcal{R}$ について

$$|\hat{u}(Y)| < c_{31}(Tr(TY))^\kappa\det(Y)^{-\kappa/rm}$$

となる。

step 2:指数関数の部分 $P_k e^{-2\pi Tr(Y)} = p(Y)e^{-2\pi Tr(Y)}$ となる多項式 p が存在する。ここで p は V^m の適当な座標系（たとえば Peirce 分解）で考えている。$p(Y)$ の次数は P_k

の次数を越えないから、$2rm$ 次である。よって $|p(Y)| < c_{32}(1+Tr(Y))^{2rm}$ である（ジョルダン代数の一般論で示したように、「対角成分」で Peirce 分解のどの座標成分も押さえられる。）

よって $Tr(TY) = Tr(P(T^{1/2})Y)$ および P_k が不変微分作用素であることを用いて、

$$P_k e^{-2\pi Tr(TY)} = (P_k e^{-2\pi Tr(Y')})|_{Y'=P(T^{1/2})Y} < c_{33}(1+Tr(TY))^{2rm} e^{-2\pi Tr(TY)}$$

である。$\det(TY) < c_{34} Tr(TY)^{rm}$ であり（左辺は多項式だからまえと同様の理由）、また、任意の多項式 $r(x)$ に対し $r(x)exp(-x)$ は有界であるから、

$$\det(TY)^l Tr(TY)^\kappa |P_k e^{-2\pi Tr(TY)}| < c_{35}(1+Tr(TY))^{2rm+rml+\kappa} e^{-2\pi Tr(TY)} < c_{36} e^{-\pi Tr(TY)}$$

となる。よって $Y \in \mathcal{R}$ に対して

$$|a(T)(\det Y)^s \hat{u}(Y) P_k e^{-2\pi Tr(TY)}| < c_{37} \det(Y)^{\Re(s)-l-\kappa/rm} e^{-\pi Tr(TY)}$$

となる。

step 3: 級数の評価 $T \in \Lambda \cap \Omega^m$ であるが、$T = (T_1, ..., T_m)$ で T_i は互いに共役（基礎体の埋め込みで）にとれている。Peirce 分解で考えると T の対角成分の $\mathbb{Q}$ へのトレース n_j $(j = 1, ..., r)$ を固定しておくと、すべての「座標」は有界であり、適当な j, k について $\sqrt{n_j n_k}$ の定数倍では押さえられる。よって $Tr(T^2)$ も有界であり、$\sum_{j,k} \sqrt{n_j n_k} \times 2^m r(r+1)m/2$ で押さえられるが、もともと T は lattice の元であるから、$Tr(T) \leq d$ となる T の個数は、L の基底に関する座標（すなわち整数）において係数が $c_{38}d$ で押さえられるとして良いから、全体で個数は $(2c_{38}a+1)^{nm}$ となる。あるいは $c_{39}\prod_{j=1}^r n_j^{d(r-1)m/2}$ 以下としてもよい。Y を Siegel set （ないしはそれを有限個の元で写したもの）に含まれると仮定すると「対角行列」 Y_0 を前のセクションのように定義して、任意の i $(1 \leq i \leq m)$ に対して $c_{40}Y_0 < Y_i < c_{41}Y_0$ となる。（$c_{40}Y_0 < Y < c_{41}Y_0$ と書いても同じことであるが。）よって、

$$\begin{aligned}
\sum_{T \in \Lambda \cap \Omega^m} e^{-\pi Tr(YT)} &< c_{42} \prod_{j=1}^r \sum_{d_j=1}^\infty (n_j)^{d(r-1)m/2} e^{-\pi r d_j n_j / c_{43}} \\
&< c_{44} \prod_{j=1}^r n_j^{-d(r-1)m/2} \sum_{t=1}^\infty e^{-\pi r n_j t/2c_{43}} \\
&< c_{45} \det(Y)^{-d(r-1)/2-1} e^{-\pi Tr(Y)/c_{46}} \\
&< c_{47} \det(Y)^{-n/r} e^{-\pi \det(Y)^{1/r}/c_{46}}
\end{aligned}$$

しかし積分

$$\int_{\mathcal{R}} e^{-\alpha \det(Y)^\beta} \det(Y)^s dv$$

は $\Re(s) > n/r$ で収束する。(measure を $det(Y) = 1$ の部分とそれ以外にわけて、$\det(Y) = 1$ の所では基本領域の体積有限、$t = \det(Y)$ での積分ではガンマ関数で書けるため。cf. Maass [22] p. 213.）

以上より $\Re(s)$ 十分大で、積分の収束が言えた。

7.2 Mellin 変換の具体形

積分 $\eta(s,u)$ をより具体的に表示する。$\epsilon(T) = |\{\gamma \in \Gamma_\Theta; \gamma \cdot T = T\}|$ とおく。Γ_Θ は Ω^m には離散的に働き、また、T の固定群はコンパクトだから、$\epsilon(T)$ は有限である。

$$\begin{aligned}
\eta(s,u) &= \sum_{T \in L \cap \Omega^m} \int_{\mathcal{R}} \det(Y)^s \hat{u}(Y) P_k e^{-2\pi Tr(TY)} dv \\
&= (-2\pi)^{rm} \sum_{T \in L \cap \Omega^m} a(T) \det(T) \int_{\mathcal{R}} \det(Y)^{s-k} \hat{u}(Y) \hat{\mathcal{M}}_r \det(Y)^{k+1} e^{-2\pi Tr(TY)} dv \\
&= (-2\pi)^{rm} \sum_{T \in \Gamma_\Theta \backslash L \cap \Omega^m} \frac{a(T)\det(T)}{\epsilon(T)} \times I(u)
\end{aligned}$$

ただし

$$I(u) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\Theta} \int_{\mathcal{R}} \det(Y)^{s-k} \hat{u}(Y) \hat{\mathcal{M}}_r \det(Y)^{k+1} e^{-2\pi Tr(T\gamma \cdot Y)} dv$$

とおいた。

$$\begin{aligned}
I(u) &= |Z(\Gamma_\Theta)| \int_{\Omega^m} \det(Y)^{s+1} e^{-2\pi Tr(TY)} \det(Y)^{k-s} \mathcal{M}_r \det(Y)^{s-k} \hat{u}(Y) dv \\
&= |Z(\Gamma_\Theta)| \int_{\Omega^m} \det(Y)^{s+1} e^{-2\pi Tr(TY)} \mathcal{D}_{k-s} \hat{u}(Y) dv
\end{aligned}$$

しかし、$\mathcal{D}_{k-s}$ は不変微分作用素であるから $\mathcal{D}_{k-s}\hat{u} = f(s,\hat{u})\hat{u}$ なる s についての monic な多項式 $f(s,\hat{u})$ が存在する。$\hat{\mathcal{D}}_s \hat{u} = (-1)^{rm} f(s+k-d(r-1)/2, \hat{u})\hat{u}$ であるが、$f(s+k-d(r-1)/2, \hat{u}) = 0$ の根をα_j $(j = 1, ..., rm)$ として前の節の積分公式より、

$$\begin{aligned}
\eta(s,u) &= |Z(\Gamma_\Theta)|(-2\pi)^{rm} f(s,\hat{u}) f(s+k-d(r-1)/2, \hat{u}) (2\pi)^{-(s+1)rm} (2\pi)^{(n-r)m/2} \\
&\quad \times \prod_{j=1}^{rm} \Gamma(s-\alpha_j) \sum_{T \in \Gamma_\Theta \backslash \Lambda \cap \Omega^m} \frac{a(Y)u(T)}{\epsilon(T)\det(T)^{-s}}
\end{aligned}$$

となる。簡単のために

$$D(s,u) = \sum_{T \in \Gamma_\Theta \backslash L \cap \Omega^m} \frac{a(T)u(T)}{\epsilon(T)\det(T)^{-s}}$$

とおき、これを $f(Z)$ に付随する、量指標 $u(Y)$ つきの Koecher-Maass 級数と呼ぶことにすると、

$$\eta(s,u) = |Z(\Gamma_\Theta)|(-1)^{rm}(2\pi)^{(n-r)m/2}(2\pi)^{-rms}\prod_{j=1}^{rm}\Gamma(s-\alpha_j)D(s,u)$$

となる。ここでガンマ因子は u によることには注意すべきである。たとえば、u を $\hat{u}$ にとりかえるとどうなるか、見てみよう。$\hat{u}$ に対 α_j を $\hat{\alpha_j}$ と書く。すなわち、

$$\eta(s,u) = |Z(\Gamma_\Theta)|(-1)^{rm}(2\pi)^{(n-r)m/2}(2\pi)^{-rms}\prod_{j=1}^{rm}\Gamma(s-\hat{\alpha_j})D(s,u)$$

ここで α_j と $\hat{\alpha_j}$ の関係を求めておく。D^σ の定義より、、

$$(\hat{D}_s u)(Y) = (D_s u)(Y^{-1}) = f(k-s,\hat{u})\hat{u}(Y^{-1}) = f(k-s,\hat{u})u(Y)$$

である。よって、順序を適当につけかえて、

$$k-\hat{\alpha_j} = \alpha_j + k - \frac{d(r-1)}{2}$$

となる。すなわち、$\alpha_j + \hat{\alpha_j} = d(r-1)/2$ である。前に示したように

$$\sum_{j=1}^{rm}\alpha_j = \frac{mdr(r-1)}{2}$$

であったが、Maass [22] にもコメントしてあるように、上述の関係式はこの関係式によく一致している。（ついつい同じコメントをいれたくなるところで、、、）

7.3 関数等式

$\mathcal{D}_s$ の不変性より

$$\begin{aligned} f(s,\hat{u})u(Y) &= (\mathcal{D}_{k-s}\hat{u})(Y^{-1}) \\ &= (\mathcal{D}(Y^{-1})_{k-s}u)(Y) \\ &= \hat{\mathcal{D}}_{k-s}(Y)u \\ &= \mathcal{D}_{d(r-1)/2+s-k}u(Y) = (-1)^{rm}f(2k-s-d(r-1)/2,u)u(Y) \end{aligned}$$

よって、$f(s,\hat{u}) = (-1)^{rm}f(2k-s-d(r-1)/2,u)$ である。すなわち、

$$\begin{aligned} & f(s,\hat{u})f(s+k-d(r-1)/2,\hat{u}) \\ =\ & f(2k-s-d(r-1)/2,u)f(2k-(s+k-d(r-1)/2)-d(r-1)/2,u) \\ =\ & f(2k-s-d(r-1)/2,u)f(k-s,u). \end{aligned}$$

これを用いて関数等式を示す。ここで f は重さ k としているから $f(iY)=\epsilon\det(iY)^k f(iY)$ であるが、保型因子は$\epsilon=1$ をみたしていると仮定する。（こうなっていなければ関数等式に ϵ がつくだけで、ほとんどなんの変わりもないが 1 でない例があると思う理由もないので。）

$$
\begin{aligned}
\eta(s,u) &= \int_{\mathcal{R}} h(Y)\det(Y)^s\hat{u}(Y)dv \\
&= \int_{\mathcal{R}\ \det(Y)\le 1} h(Y)\det(Y)^s\hat{u}(Y)dv + \int_{\mathcal{R}\ \det(Y)\le 1} h(Y^{-1})\det(Y)^{-s}u(Y)dv \\
&= \int_{\mathcal{R}\ \det(Y)\le 1} h(Y)\det(Y)^s\hat{u}(Y)dv + \int_{\mathcal{R}\ \det(Y)\le 1} (-1)^{rmk/2}h(Y)\det(Y)^{k-s}\hat{u}(Y)dv
\end{aligned}
$$

よって、$\eta(k-s,u)=(-1)^{rmk/2}\eta(s,\hat{u})$ は明らかであり、また $\eta(s,u)$ 自身は、s についての整関数（entire function）である。ここで $\xi(s,u)=(2\pi)^{-srm}\prod_{j=1}^{rm}\Gamma(s-\alpha_j)D(s,u)$ とおけば、

定理 2 $\xi(s,u)$ は全 s 平面に有理型に解析接続され関数等式

$$\xi(k-s,u)=(-1)^{rmk/2}\xi(s,\hat{u})$$

を満たす。さらに $f(s,\hat{u})D(s,u)$ は *entire* であり、$D(s,u)$ はたかだか $s=\alpha_j+k-d(r-1)/2$ で極を持つ。

上記で極の位数はよくわからない。$a(T)$ の増大度については、ある（正の） l で $|a(T)|=O(\det(T)^l)$ でありさえすればよく、l が具体的にいくつであるかということはなにも使っていない。

8　逆定理についての注意

逆定理については、単純な注意を述べるにとどめる。Mellin 変換と逆 Mellin 変換を用いて、逆定理を記述するには、とりあえず Mellin 変換とは、あくまで 1 変数の積分だということをまず念頭に入れるべきである。すると、積分変換はたとえば $t=\det(Y)^e$ (e は適当な巾）で行うしかなく、$f(iY)$ の Mellin 変換は、数ではなくて $\det(W)=1$ 上の関数になる。この Mellin 変換 $f_s(W)$ が、s について「適当な」関数等式を満たせば、という意味はつまりは $s\to k-s$ としたとき、 W の関数として、$f_{k-s}(W^{-1})=f_s(W)$ などとなっていれば、逆変換により、$Z\to -Z^{-1}$ についての保型性が思い出せることになる。しかし、もちろんこれでは、$f_s(W)$ が何のことかわからないから、使いようがない。よって、W の空間を Γ_0 で割った空間上の L^2 space でのスペクトル分解で、$f_s(W)$ と記述することが問題になる。もし正確にスペクトルがわかっていれば、（適当な増大条件の下で）$f_s(W)$ とそのスペクトルを与える関数との内積をとる。これはもはや s だけの関数である。一般にス

ペクトル分解を与える関数は正確にはわかっていないと思う。しかし、保型形式で L^2 が近似できるのなら、目的にもよるが、逆定理を述べるだけならばスペクトル分解を正確に記述する必要はなく、たとえば保型形式が L^2 内で L^2 の意味で dense ならばよい。この保型形式との内積が、量指標（＝保型形式）つきの Koecher-Maass series である。これらの Dirichlet 級数が関数等式を満たすと言うことが逆定理の仮定になる。以上のようなスタイルは意外にはっきりと認識されていない。たとえば、Bump [8] §1.7 では、逆定理を用いた、Doi-Naganuma lifting の証明がなされているが、その記述の仕方は、いきなり y_1, y_2 についての（1 変数の）Mellin 変換を取るというもので、量指標をつける仕掛けも一見神秘的に見えてしまう。しかし、上述のような視点から書き直せばいっそう見やすくなる。すなわち $y_1 y_2 = t$ とそれ以外で積分を分けて、$\Gamma_0 \backslash \{(y_1, y_2); y_1 y_2 = 1\}$ 上の L^2 空間で「基底」をとれば自然に通常の量指標が出てくるのであり、これと内積をとるのもまったく自然なことになるのである。

さて、以上のような観点から見れば、Tube domain に作用する離散群が affine 変換と $Z \to -Z^{-1}$ から生成されているならば、逆定理を述べるのは（増大度条件の付け方について少し問題がある点をのぞけば）まったく単純なことになってしまう。これについては、担当ではないので詳しくは述べない。菅野氏の項を参照されたい。

References

[1] A. Ash, D. Mumford, M. Rapoport, Y.Tai, *Smooth compactification of locally symmetric varieties, Lie groups: history, frontiers and applications Vol. IV, Math Sci Press, Brookline (1975).*

[2] W. L. Baily and A. Borel, Compactification of arithmetic quotients of bounded symmetric domains, Ann. Math.

[3] A. Borel, Introduction to automorphic forms, A. M. S. Proc. Symp. Pure Math. Vol. IX, Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups, ed. A. Borel and G. D. Mostow, A. M. S. Providence, Rhode Island, (1966),199–210.

[4] A. Borel, *Introduction aux groupes arithmétiques, Hermann, Boulevard Saint-Germain Paris VI.*

[5] A. Borel and J. Tits, Complément à l'article :<< Groupe reductif >>, Publ. Math. IHES No. 41(1972), 253–276.

[6] S. Böcherer, Bemerkungen über die Dirichletreihen von Koecher und Maass, Mathematica Gottingensis Schriftreihe des SFB, Geometrie und Analysis, Heft 68, 1986.

[7] H. Braun and M. Koecher, *Jordan Algebren, Die Grundlehren Math. Wissenschaften, Band 128. Springer 1966, Berlin, Heidelberg, New York.*

[8] D. Bump, *Automorphic forms and representations, Cambridge Studies in Advanced Math. 55, Cambridge Univ. Press, Cambridge, New York, Melbourne, 1997*

[9] W. Duke and Ö. Imamoḡlu, A converse Theorem and the Saito-Kurokawa Lift, International Mathematics Research Notices 7 (1996), 347–355.

[10] J. Faraut and A. Korányi, **cited as FK** *Analysis on Symmetric Cones, Oxford Science Publications*, Clarendon Press, Oxford 1994.

[11] Harish-Chandra, *Automorphic forms on semisimple Lie groups*, Springer Lecture Notes in Math. 62, (1968), Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

[12] T. Ibukiyama and H. Katsurada, An explicit form of Koecher-Maass series associated with Siegel Eisenstein series, preprint.

[13] T. Ibukiyama and H. Saito, On zeta functions associated to symmetric matrices, I: Amer. J. Math. 117(1995), 1097-1155; II: MPI preprint series 97-37; III: Nagoya Math. J. 146(1997), 149–183.

[14] T. Ibukiyama, A survey on the new proof of Saito-Kurokawa lifting after Duke and Imamoglu, Proceeding of The fifth summer school on number theory: Siegel modular forms (1997), 134–176.

[15] N. Jacobson, *Structure and representations of Jordan algebras*, AMS Colloquium Publication Vol.XXXIX, 1968, AMS Providence, Rhode Island.

[16] M. L. Karel, Eisenstein series on tube domain, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 62(1992), 81–116.

[17] H. Klingen, *Introductory lectures on Siegel modular forms*, Cambridge University Press, 1990, Cambridge, New York, Port Chester, Melbourne, Sydney.

[18] M. Koecher, Über Dirichlet-Reihen mit Funktionalgleichung, J. reine Angew. Math. 192(1953), 1–23.

[19] A. Krieg, Koecher-Maass series for modular forms of quaternions, Manuscripta Math. 66(1990), no.4, 431–451.

[20] A. Krieg, A Dirichlet series for modular forms of degree n. Acta Arith. 59 (1991), no.3, 243–259.

[21] T. Kubota, *Elementary theory of Eisenstein series*, 1973. Kodansha Ltd. Tokyo, John Wiley and Suns, New York London Sydney Toronto.

[22] H. Maass, *Siegel's modular forms and Dirichlet series*, Springer Lecture Note 216, 1971, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

[23] H. Maass, Über eine Kennzeichnung der Koecherschen "Dirichlet-Reihen mit Funktionalgleichung", Math. Ann. 260(1982), no.1, 119–131.

[24] H. Maass, Indefinite quadratische Formen und Eulerprodukte, Comm. Pure Appl. Math. 29(1976), no.6, 689–699.

[25] W. Magnus and F. Oberhettinger, *Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der Mathematischen Physik, 2 Auflage*, Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band LII, Springer Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1948.

[26] K. Saigo, Modular forms on the exceptional tube domain(Survey), Master thesis, 1997, Osaka University,
http://www.math.wani.osaka-u.ac.jp/group/numberth/graduate/papers/saigo.dvi.

[27] I. Satake, *On algebraic structure of symmetric domains*, Publ. Japan Math. Soc.

[28] A. Selberg, Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series, J. Indian Math. Soc. B.20(1956), 47–87: Collected Papers I (1989), 423–463, Springer Verlag.

[29] L-C. Tsao, The rationality of the Fourier coefficients of certain Eisenstein series on tube domains (I), Compositio Math. Vol.32, Fasc. 3, (1976), 225–291.

[30] E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A course of modern analysis, fourth edition*, Cambridge at the University Press 1935.

[31] D. Zagier, The Rankin Selberg method for automorphic functions which are not of rapid decay, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 28(1981), 415–437.

Department of Mathematics
Graduate School of Science
Osaka University
Machikaneyama 1-16
Toyonaka, Osaka, 560-0043 Japan
email address: ibukiyam@math.wani.osaka-u.ac.jp
homepage: http://www.math.wani.osaka-u.ac.jp/group/numberth