

Siegel 保型形式入門と保型形式環

伊吹山知義（大阪大学大学院理学研究科）

この小論では、ジーゲル保型形式の入門をなるべく保型形式環の立場から試みる。入門とは言っても時代の進歩を取り入れて若干内容の再構成をおこなった。また目的が限定されているため、たとえばヘッケ作用素やゼータ関数は登場しないなど、かなり好みの強い紹介である点は注意されたい。

1 Siegel 保型形式の一般論

1.1 領域と群

ジーゲル上半空間は6種類ある有界対称領域の一つである。ジーゲル上半空間は

$$H_n = \{Z = {}^tZ \in M_n(\mathbb{C}); Z = X + iY, Y > 0\}$$

で定義される。 $Z \in H_n$ に対して、その虚部 Y を $Im(Z)$ と書く。一方で、シンプレクティック群は

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1_n \\ 1_n & 0 \end{pmatrix}$$

とおくとき、

$$Sp(n, \mathbb{R}) = \left\{ g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{R}); gJ {}^tg = J \right\}$$

で定義される。この g の条件は

$$A {}^tD - B {}^tC = 1_n, \quad A {}^tB = B {}^tA, \quad C {}^tD = D {}^tC$$

といっても同じである。また

$$g^{-1} = J^{-1} {}^t g J = \begin{pmatrix} {}^t D & -{}^t B \\ -{}^t C & {}^t A \end{pmatrix}$$

である。これより、特に条件式の順序を変えて ${}^t g J g = J$ と言っても同じである。よって条件は

$${}^t D A - {}^t B C = 1_n, \quad {}^t D B = {}^t B D, \quad {}^t C A = {}^t A C$$

と言っても同じ。

例：1 変数では普通の複素上半平面に特殊線型群が 1 次分数変換で働くのと同じ。また複素上半平面は単位円板と同値である。

$$Sp(1, \mathbb{R}) = SL(2, \mathbb{R}) \cong SU(1, 1), \quad H_1 = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im}(z) > 0\} \cong \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}.$$

命題：

$$g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(n, \mathbb{R})$$

と $Z \in H_n$ に対して、 $\det(CZ + D) \neq 0$ である。また $gZ = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}$ とおくと、これは複素対称行列であり

$$\operatorname{Im}(gZ) = {}^t(C\bar{Z} + D)^{-1} Y (CZ + D)^{-1}$$

である。特に $\operatorname{Im}(gZ) > 0$ である。

証明： $2iY = (\bar{Z}, 1_n) J \begin{pmatrix} Z \\ 1_n \end{pmatrix}$ より、 $2iY = (\bar{Z}, 1_n) {}^t g J g \begin{pmatrix} Z \\ 1_n \end{pmatrix}$ 。よって、

$$\begin{aligned} 2iY &= \left(\bar{Z} {}^t A + {}^t B, \bar{Z} {}^t C + {}^t D \right) \times \begin{pmatrix} 0 & -1_n \\ 1_n & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} (AZ + B) \\ (CZ + D) \end{pmatrix} \\ &= (\bar{Z} {}^t A + {}^t B)(CZ + D) - (\bar{Z} {}^t C + {}^t D)(AZ + B). \end{aligned}$$

よって、 $(CZ + D)\xi = 0$ ($\xi \in \mathbb{C}^n$) ならば、 $2i {}^t \bar{\xi} Y \xi = 0$ 、よって $Y > 0$ より、 $\xi = 0$ 。よって前半は証明された。後半は、 $(CZ + D)^{-1}$, ${}^t(C\bar{Z} + D)^{-1}$ を左右から掛けて

$$2i {}^t(C\bar{Z} + D)^{-1} Y (CZ + D)^{-1} = {}^t \bar{g} \bar{Z} - gZ.$$

さらに、

$$\begin{aligned} 0 &= (Z, 1_n) J \begin{pmatrix} Z \\ 1_n \end{pmatrix} = (Z, 1_n) {}^t g J g \begin{pmatrix} Z \\ 1_n \end{pmatrix} \\ &= (Z {}^t A + {}^t B)(CZ + D) - (Z {}^t C + D)(AZ + B). \end{aligned}$$

より、 ${}^t(gZ) - gZ = 0$.

Proposition 1 $Sp(n, \mathbb{R})$ は $Z \rightarrow gZ$ により H_n に作用する。 H_n の解析的自己同型群は $Sp(n, \mathbb{R})/\{\pm 1_{2n}\}$ に等しい。

前半で $(g_1 g_2)Z = g_1(g_2 Z)$ は単なる計算である。後半部分の証明は省略する。

1.2 保型因子

1.2.1 一般の保型因子

H_n 上の正則関数全体に $Sp(n, \mathbb{R})$ の部分群 Γ が作用するようになるべく一般的な状況を考えたい。

例: k を整数として

$$f(Z) \rightarrow \det(CZ + D)^{-k} f(gZ)$$

は $Sp(n, \mathbb{R})$ の作用である。

しかし、一般にはこのような作用を群 $Sp(n, \mathbb{R})$ 全体で定義される部分と Γ に依存する部分に分けて考えたい。また $\mathbb{C}$ -valued だけではなくてベクトル値の関数も考えたい。よって、次の状況を考える。

- (1) $J(g, Z)$ は $Sp(n, \mathbb{R}) \times H_n$ 上の $GL_d(\mathbb{C})$ valued な関数で Z について正則。
- (2) μ は Γ 上の $GL_{d'}(\mathbb{C})$ -valued な関数。
- (3) H_n 上の $M_{dd'}(\mathbb{C})$ -valued な正則関数 $f(Z)$ 全体の空間に対して

$$f(Z) \rightarrow J(\gamma, Z)^{-1} f(\gamma Z) \mu(\gamma)$$

が群 Γ の作用になる。

以上のような状況があるとする、すなわち、 $Sp(n, \mathbb{R}) \times H_n$ 上の関数 $J(g, Z)$ と Γ 上の関数 $\mu(g)$ が上の (1), (2) をみたすとする、必要なら

定数倍取り替えることにより次が成り立つ。(証明は作用の定義通りの式を書けばすぐわかる。)

Γ の $\mathbb{C}^\times$ -valued な 2-cocycle $c(\gamma_1, \gamma_2)$ があって、

$$\begin{aligned} J(\gamma_1, \gamma_2 Z) J(\gamma_2, Z) &= c(\gamma_1, \gamma_2) J(\gamma_1 \gamma_2, Z) \\ \mu(\gamma_1 \gamma_2) &= c(\gamma_1, \gamma_2) \mu(\gamma_1) \mu(\gamma_2) \end{aligned}$$

これによりたとえば μ は Γ の射影表現であることがわかる。ただし射影表現というのは Γ から $PGL_{d'}(\mathbb{C})$ への準同型という意味である。

ここで 2-cocycle というのは、 $\Gamma \times \Gamma$ 上の $\mathbb{C}^\times$ 値関数で

$$\begin{aligned} c(\gamma_1 \gamma_2, \gamma_3) c(\gamma_1, \gamma_2) &= c(\gamma_1, \gamma_2 \gamma_3) c(\gamma_2, \gamma_3), \\ c(1, 1) &= 1 \end{aligned}$$

を満たすものとした。ものの本には、あまりこのようには説明されていないが、このような J と μ の組 (J, μ) を Γ の保型因子と呼ぶのが良いと思う。通常 μ を multiplier system という。一般的に言えば J と μ を分離して別々の保型因子と考えることは出来ないし、 Γ の保型因子は Γ に特有のものであり、一般にはこれを含む大きい群まで延長することはできない。(例：分数ウェイトの保型因子など。)

ちなみに最近、実ランク 2 以上の代数群の離散群、たとえば 2 次以上のジーゲル保型形式では、半整数以外の分数ウェイトの保型因子は存在しないことを Richard Hill が証明したと聞いている。ジーゲルの場合は、もともと P. Deligne の 1970 年代後半の結果だそうである。(証明は離散群の算術性、合同部分群問題などの一般論を用いるらしい。これはたとえばジーゲル保型形式では「普通の」保型因子しか存在しないという点では、残念な結果であるが、rank 1 の代数群ではまだ望みがある。)

1.2.2 実際の保型因子と保型形式

以下、もっとわかりやすい通常の保型因子を考える。 ρ を $GL_n(\mathbb{C})$ の (有限次元の) 既約有理表現とする。また μ を Γ の (既約とはかぎらない) 有限次元表現とする。表現の次数はそれぞれ d, d' としておく。このとき $J(g, Z) = \rho(CZ + D)$ とおくと、組 (J, μ) は Γ の保型因子である。一番簡単なものは、 $\rho(g) = \det(g)^k$ (k は整数)、 μ =単位表現の場合であり、この場合をウェイト k の保型因子という。さて、Cartan Seminar の Godement の記事では、このような仮定の下で、 μ がさらにユニタリー

表現という仮定だけで議論を進めているが、実際問題として $\ker(\mu)$ が Γ 内で指数有限の部分群でないと保型形式と呼ぶにはふさわしくないとと思われる。少なくともユニタリーという仮定がないと、保型形式とはどうい呼びにくい例を挙げられる。たとえば M. Kaneko and M. Koike は $SL_2(\mathbb{Z})$ の作用で不変な 2 階の微分方程式の解から、上半平面上の関数で $SL_2(\mathbb{Z})$ の自然な作用による表現空間を構成しているが、これは保型形式ではない。

例 (Kaneko-Koike)

$E_2(\tau)$ をいわゆる quasi modular form of weight 2 (アイゼンシュタイン級数の解析接続で得られるウェイト 2 の実解析的保型形式から、 y^{-1} の定数倍部分を引いて得られるもの) とする。微分方程式

$$f''(\tau) - \frac{k+1}{6}E_2(\tau)f'(\tau) + \frac{k(k+1)}{12}E_2'(\tau)f(\tau) = 0$$

は変数変換 $z \rightarrow \gamma z = (az+b)(cz+d)^{-1}$ $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$ で不変であるが、 $k \equiv 5 \pmod{6}$ ならば、2 つの解上 $SL_2(\mathbb{Z})$ はそのまま行列で (standard 表現で) 作用する。この解は保型形式とは呼びがたい。

もちろんこのような例は別に微分方程式を用いなくてもいくらでも作れる。実際 $f(\tau)$ を $SL_2(\mathbb{Z})$ の weight $k+1$ の保型形式とし、

$$F(\tau) = \begin{pmatrix} \tau f(\tau) \\ f(\tau) \end{pmatrix}$$

とすると、 $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して

$$\begin{aligned} F(\gamma\tau) &= \begin{pmatrix} (a\tau+b)(c\tau+d)^{-1}f(g\tau) \\ f(g\tau) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a\tau+b)(c\tau+d)^k f(\tau) \\ (c\tau+d)^{k+1} f(\tau) \end{pmatrix} = (c\tau+d)^k \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} F(\tau) \end{aligned}$$

となるなど。

よって以下

仮定 : $\text{Ker}(\mu)$ は Γ の指数有限の部分群と仮定する。

Γ は $Sp(n, \mathbb{R})$ の離散群で、 $\text{vol}(\Gamma \backslash H_n) < \infty$ とする。

Definition 2 都合により $n > 1$ の場合のみ考える。 H_n 上の $M_{dd'}(\mathbb{C})$ valued な正則関数 f ですべての $\gamma \in \Gamma$ に対して、

$$f(\gamma Z) = \rho(CZ + D)f(Z)\mu(\gamma)^{-1}$$

となるものを、 Γ のウェイト ρ , multiplier μ の保型形式という。

このような保型形式のなす空間を $M_\rho(\Gamma, \mu)$ と書くことにする。(ちなみに $n = 1$ ならば各カスプで正則という条件が必要だがこの説明を省略するために $n > 1$ と仮定した。)

1.2.3 $Sp(n, \mathbb{Z})$ の通約群と保型形式

Definition 3 群 G の部分群 H と K が通約的 (commensurable) というのは $H \cap K$ が H および K の指数有限の部分群であることをいう。

Lemma 4 一般に H を 群 G の指数有限の部分群とし、 K を G の (指数有限とは限らない) 部分群とすると K 内で $H \cap K$ は指数有限である。また、 H の指数有限の部分群 N で G 内で正規なものが存在する。

証明: easy exercise であるが、書いておく。 $K = \coprod_{\lambda \in \Lambda} (K \cap H)k_\lambda$ (disjoint) とすると、 $\lambda, \mu \in \Lambda$ に対して、 $\lambda \neq \mu$ ならば、 $k_\lambda k_\mu^{-1} \notin H$ 。しかし、 H は G 内で指数有限だから Λ は有限集合である。 $G = \coprod_{i=1}^l Hg_i$ のとき、 $N = \cap_{i=1}^l (g_i^{-1} H g_i)$ とおくと、今示したことより N は G 内で指数有限がわかる。 q.e.d.

以下、 Γ はすべて $Sp(n, \mathbb{Z}) = Sp(n, \mathbb{R}) \cap M_{2n}(\mathbb{Z})$ と通約的と仮定する。(このほかに不定符号 4 元数環からつくられる離散群と通約的な重要な系列もあるが、カスプの様子などが若干違っていて記述が面倒になるので今は無視する。なお $n > 1$ ならば、これら以外に covolume finite な離散群は存在しないことも知られている。)

さて、 $M_\rho(\Gamma, \mu)$ の元を $Sp(n, \mathbb{Z})$ の保型形式と見なす方法について述べておく。

1.2.4 フーリエ展開

Γ の元で

$$\gamma_X = \begin{pmatrix} 1_n & X \\ 0 & 1_n \end{pmatrix}$$

のかたちのもの全体は群をなす。 Γ は $Sp(n, \mathbb{Z})$ と通約的としたから、このような X 全体のなす加群 L は n 次有理対称行列全体のなすベクトル空間 $Sym_n(\mathbb{Q})$ の中である lattice となる。実際 $C = \{g \in Sp(n, \mathbb{R}); A = D = 1_n, C = 0\}$ とおけば、 $\Gamma \cap C$ 内で $\Gamma \cap Sp(n, \mathbb{Z}) \cap C$ は指数有限であり、特に $X \in L$ ならば、適当な自然数 l について $lX \in Sym_n(\mathbb{Z})$ (整数係数対称行列の集合) となるから $L \subset Sym_n(\mathbb{Q})$ である。また $\Gamma \cap Sp(n, \mathbb{Z}) \cap C$ は $Sp(n, \mathbb{Z}) \cap C$ 内でも指数有限であるから、 L は $Sym_n(\mathbb{Q})$ 内で $Sym_n(\mathbb{Z})$ と通約的である。よって、 L は lattice である。

次に μ を multiplier system とすると、 $Ker(\mu) \subset \Gamma$ は finite index としたので、 L の sublattice $\mu(L_0)$ で $\mu(\gamma_X) = id.$ for all $X \in L_0$ となるものがある。以上により、 $f \in M_\rho(\Gamma, \mu)$ ならば、任意の $X \in L_0$ について $f(Z + X) = f(Z)$ である。任意の lattice L に対して

$$L^* = \{x \in Sym_n(\mathbb{Q}); Tr(xy) \in \mathbb{Z} \text{ for all } y \in L\}$$

を L の dual lattice という。たとえば $L = Sym_n(\mathbb{Q}) \cap M_n(\mathbb{Z})$ ならば L^* は半整数対称行列全体 (対角成分が整数でその他が $(1/2)\mathbb{Z}$ の元) である。 H_n 上の任意の $M_{dd'}(\mathbb{C})$ 値正則関数 f が L_0 による平行移動で不変なら、次のフーリエ展開を持つ。

$$f(Z) = \sum_{T \in L_0^*} a(T) e^{2\pi i Tr(TZ)}.$$

ここで、 $a(T)$ は $M_{dd'}(\mathbb{C})$ の元である。証明は $(e^{2\pi i Tr(xz_{ij})})$ で H_n を移すことにより、 H_n はラインハルト領域に移るが、ラインハルト領域でローラン展開が存在することによる。(あるいは、実部 X に関して f が C^1 級であることと、実部に関する周期性により $e^{2\pi i Tr(TX)}$ について、係数が Y に関する関数 $a(T, Y)$ になるフーリエ展開を持ち、さらに正則性の Cauchy-Riemann 条件から $a(T, Y) = a(T) e^{2\pi i Tr(TY)}$ の形になるという証明法もある。)

上のフーリエ展開は H_n 上の任意のコンパクト集合上で絶対一様収束する。また $f(Z) = (f_{ij}(Z))$ とするとき任意の $c > 0$ に対し、 $\{Y > c1_n\}$ なる領域上で $|f_{ij}(Z)|$ は有界であり、同じ領域上で $f(Z)$ は絶対一様収束する。($Z = ic1_n$ で絶対収束することなどをもちいると、級数がここでの値で評価できて、いずれもあきらか。) 話の都合上、ノルムを決めておかないのも不便なので、 $A, B \in M_{dd'}(\mathbb{C})$ に対して

$$\langle A, B \rangle = Tr(B^* A)$$

とおくことにする。特に $\|A\| = \langle A, A \rangle^{1/2}$ と書く。すると今述べたことは、 $\{Y > c1_n\}$ なる領域上で $\sum_T \|a(T)\| e^{-2\pi \text{tr}(TY)}$ が収束すると言っても同じことである。

少し係数の評価をしておく。 $f(Z)$ は特に $Y = (2\pi)^{-1}i1_n$ で絶対収束するので

$$K = \sum_{T \in L^*} \|a(T)\| e^{-\text{tr}(T)}$$

は有限確定値であり、また当然 K は T に無関係である。つまり、任意の $T \in L^*$ について

$$\|a(T)\| \leq K e^{\text{tr}(T)}$$

がわかった。

1.3 Koecher principle

Proposition 5 ρ を $GL_n(\mathbb{C})$ の有理表現とする。 f を H_n 上の $M_{dd'}(\mathbb{C})$ valued の正則関数で、

(1) ある lattice $L \in \text{Sym}_n(\mathbb{Q})$ が存在して、すべての $X \in L$ で

$$f(Z + X) = f(Z)$$

(2) $SL_n(\mathbb{Z})$ の指数有限の部分群 Γ が存在して、すべての $U \in \Gamma$ について

$$f(UZ^tU) = \rho(U)f(Z)$$

と仮定する。(特に $f \in M_\rho(\Gamma, \mu)$ ならばこの仮定は満たされる。) さらに $n \geq 2$ と仮定する。このとき $a(T) \neq 0$ となるのは $T \geq 0$ (T が半正定値) のときに限る。

証明：証明は Cartan Seminar 4-04 の通りであるが、Cartan Seminar では $d' = 1$ の場合のみ取り扱われている。ノルムの取り方以外の違いはないが、敢えて証明を復習する。

条件 (1) より、 L^* を L の dual lattice として、

$$f(Z) = \sum_{T \in L^*} a(T) e^{2\pi i \text{tr}(TZ)}$$

とフーリエ展開される。次に条件 (2) より、任意の $U \in \Gamma$ について

$$\sum_{T \in L^*} a(T) e^{2\pi i \text{tr}(T U Z^t U)} = \sum_{T \in L^*} \rho(U) a(T) e^{2\pi i \text{tr}(T Z)}$$

であるが、フーリエ展開の一意性より、

$$\rho(U) a(T) = a({}^t U^{-1} T U^{-1})$$

である。よって $\rho(U^{-1}) a(T) = a({}^t U T U)$ と言っても同じであるし、 $a(T) = \rho(U) a({}^t U T U)$ である。ここで、フーリエ係数のノルムを評価しておく。 $\|a({}^t U T U)\| \leq K e^{\text{tr}({}^t U T U)}$ より、任意の $U \in \Gamma$ に対して

$$\|a(T)\| \leq K \|\rho(U)\| e^{\text{tr}({}^t U T U)}$$

この評価式から T が半正定値でないなら、 $a(T) = 0$ をいう。すなわち、左辺は U と無関係だから、半正定値でない T に対して、 U を取り替えて、右辺がいくらでも小さくなることを言えばよいのである。証明の方針は $\|\rho(U)\|$ がそれほど増えないが $\text{tr}({}^t U T U) \rightarrow -\infty$ となるような U の列を作ることにある。この作り方は具体的に与えてしまった方が簡単である。 $\rho(U)$ の部分が大きくなるようにするには、ひとつの U のべき U^p をとれば、 $\|\rho(U^p)\| = \|\rho(U)^p\| \leq \|\rho(U)\|^p$ だから、この部分は p の 1 次式の exponential order である。 U^p に対して、 $e^{\text{tr}({}^t U^p T U^p)}$ が p の 2 次式の exponential order になるようにしたい。このような U の取り方を探そう。 $T \geq 0$ でない T をひとつ固定する。単純に計算できるように、 $U = 1_n + V$ とし、 $V^2 = 0$ なるもので話をすませたい。すると $U^p = 1_n + pV$ であるから、わかりやすい。よって、 $a = \text{tr}(T)$, $b = \text{tr}(TV)$, $c = \text{tr}({}^t V T V)$ とおくと

$$e^{\text{tr}({}^t U^p T U^p)} = \exp(a + bp + cp^2)$$

である。 $c < 0$ でかつ $V^2 = 0$ となるような V を選びたい。 T は半正定値で、しかも有理数を係数とするから、 n 次の整数ベクトル x で ${}^t x T x < 0$ となるものが存在する。(2 次形式の意味で、 T は有理数内で対角化可能だから、以上は容易に分かる。) ここで $V = (x, 0, \dots, 0) \in M_n(\mathbb{Z})$ とすると $\text{tr}({}^t V T V) = {}^t x T x < 0$ ではある。 $x_1 = 0$ ならば、 $V^2 = 0$ でもあるから、これでよいが、 $x_1 = 0$ でないと V は $V^2 = 0$ を満たさないかもしれないので、少し工夫が必要である。そこで、整数 d, e に対して $V = (dx, ex, 0, \dots, 0)$ とおくと、 $d = e = 0$ でない限りは、やはり

$tr({}^tVTV) = (d^2 + e^2)({}^txTx) < 0$ である。 $V^2 = 0$ とするためには、たとえば $d = x_2, c = -x_1 \neq 0$ (ただし x_i は x の第 i 成分) とすれば

$$V = \begin{pmatrix} x_2x_1 & -x_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ x_2^2 & -x_1x_2 & 0 & \dots & 0 \\ x_2x_3 & -x_1x_3 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 \dots & 0 & \end{pmatrix}$$

であり、 $V^2 = 0$ はあきらめ。 $U = \exp(V)$ より、 $\det(U) = 1 \in SL_2(\mathbb{Z})$ である。 Γ は $SL_n(\mathbb{Z})$ の中で finite index だから $U^q \in \Gamma$ なる q が存在する。 $U^q = 1 + qV$ であるから、必要なら qV を V と書くことにする。すると結局

$$\|a(T)\| \leq K\|\rho(U)\|^p \exp(a + 2bp + cp^2) = K \exp(a + (2b + \log\|\rho(U)\|)p + cp^2)$$

よって $c < 0$ から明らかに $p \rightarrow \infty$ で右辺はゼロに近づく。Q.E.D.

1.4 $Sp(n, \mathbb{Z})$ への帰着

$\Gamma \subset Sp(n, \mathbb{Z})$ を指数有限の部分群とする。 μ を Γ の multiplier として、次の同型が成り立つ。

$$M_\rho(\Gamma, \mu) \cong M_\rho(Sp(n, \mathbb{Z}), \text{Ind}_\Gamma^{Sp(n, \mathbb{Z})} \mu).$$

証明：まず誘導表現を説明する。 $\mu' = \text{Ind}_\Gamma^{Sp(n, \mathbb{Z})} \mu$ の定義は、

$$Sp(n, \mathbb{Z}) = \bigcup_{i=1}^m \Gamma \gamma_i$$

とコセットへの分解を与え、 $\gamma_i \gamma = \gamma^{(i)} \gamma_{\nu(i)}$ ($\gamma^{(i)} \in \Gamma, \gamma \in Sp(n, \mathbb{Z})$) で $\gamma^{(i)}$ を定義するときに

$$\mu'(\gamma) = (A_{ij})$$

で与えられる。ただし $A_{ij} = \delta_{j\nu(i)} \times \mu(\gamma_i \gamma_{\nu(i)}^{-1})$ (δ は Kronecker 記号) とする。上記の保型形式の空間の間の同型は

$$f(Z) \rightarrow F(Z) = ((\rho(C_i Z + D_i)^{-1} f(\gamma_i Z))_{1 \leq i \leq m})$$

で得られる。ただし、

$$\gamma_i = \begin{pmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{pmatrix}$$

とおき、 $F(Z)$ は $M_{d,md'}(\mathbb{C})$ valued な関数と見なしている。

証明は単なる計算であるから省略する。 Γ が $Sp(n, \mathbb{Z})$ と通訳的ならば、 Γ および $Sp(n, \mathbb{Z})$ の指数有限の部分群 Γ' があって、 $M_\rho(\Gamma, \mu) \subset M_\rho(\Gamma', \mu|\Gamma')$ であるから、 $M_\rho(\Gamma, \mu)$ はこの場合もやはり $Sp(n, \mathbb{Z})$ の保型形式の一部と見なせる。

1.5 Cusp form の定義

$f \in M_\rho(Sp(n, \mathbb{Z}), \mu)$ がカスプ形式というのは

$$f(Z) = \sum_{T \in L^*} a(T) e^{2\pi i \text{Tr}(TZ)}$$

なる展開において、 $a(T) \neq 0$ ならば $T > 0$ となることとする。これは

$$(\Phi f)(Z_1) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} f \begin{pmatrix} Z_1 & 0 \\ 0 & i\lambda \end{pmatrix}$$

と Siegel Φ -operator を定義するとき、 $\Phi f = 0$ となることと同値である。

$f \in M_\rho(\Gamma, \mu)$ がカスプ形式というのは、前節の同型で f を $Sp(n, \mathbb{Z})$ の保型形式とみなしたときカスプ形式になることと定義する。

以上は實際上 $\Gamma \backslash H_n$ の「佐武コンパクト化」の各カスプ上で消えるということと同値であるが、カスプの定義まで立ち入ると少々面倒なのでここではあまり詳しくは述べられない。しかし前ページの同型をみればわかるように、カスプ形式の条件は実際上任意の $g \in Sp(n, \mathbb{Z})$ について

$$\Phi(\rho(CZ + D)^{-1} f(gZ)) = 0$$

という条件と同じである。

Γ のウェイト ρ , multiplier μ のカスプ形式全体を $S_\rho(\Gamma, \mu)$ と書く。

1.6 内積とノルム

ρ は適当に基底を取り替えて $\rho(g^*) = \rho(g)^*$ と仮定して於いて良い (ただし $*$ は共役転置)。なぜなら、ユニタリ行列に制限すればユニタリー

表現にできるから正しく、また表現は代数的としているから、ユニタリー群の複素化である $GL_n(\mathbb{C})$ でも正しい。さて、このように表現をとれば $Y > 0$ ならば $\rho(Y)$ も正値対称行列である。前と同様、 $A, B \in M_{dd'}(\mathbb{C})$ に対して

$$\langle A, B \rangle = \text{Tr}(B^* A)$$

とおく。特に $\|A\| = \langle A, A \rangle^{1/2}$ と書く。

$f, g \in M_\rho(\Gamma, \mu)$ に対して、

$$\langle \rho(Y^{1/2})f(Z), \rho(Y^{1/2})g(Z) \rangle = \text{Tr}(g(Z)^* \rho(Y)f(Z))$$

は $Z \rightarrow \gamma Z$ で不変である。

Proposition 6 Γ は $Sp(n, \mathbb{Z})$ と通約的とする。このとき、任意の $f \in S_\rho(\Gamma, \mu)$ について $\|\rho(Y^{1/2})f\|$ は H_n 上で最大値をとる。

これはそれほど明らかではないだけではなく、見過ごされがちな有用な結果であると思う。よって証明をつけよう。注意として、 $\|\rho(Y^{1/2})f\|$ が「 H_n 上で有界」というのと「 H_n 上で最大値をとる」というのは当然違う主張で後者の方が論理的に強い結果である。(前者の方が証明もやさしい。)

証明には基本領域の議論がかなり必要である。

まずジーゲルの与えた厳密な意味で $\Gamma \backslash H_n$ の代表元を与えるような領域を古典的には基本領域と呼んでいる。 $Sp(n, \mathbb{Z})$ などについてはジーゲルが与えた基本領域がよく知られている。しかしこのようなものをより一般の離散群については正確に記述するなど言うことは望むべくもない。ジーゲルの意味での基本領域よりもずっと弱い意味で普通の意味での基本領域よりは大きいかもしれないし、同値な点も(境界上でなくても)多数含むかもしれないが、せいぜい有限個に収まるというようなもので、記述が簡単なものを考えれば十分なことが多い。Borel-Harish Chandra はこのような意味での広義の基本領域の一般論をつくった。

定数 $u > 0$ に対して、 $W = (w_{ij})$ と対角成分が 1 の n 次上三角行列で $|w_{ij}| < u$ なるものとする。また d_i ($1 \leq i \leq n$) を $0 < d_i u d_{i+1}$ ($0 < i < n$) かつ $0 < d_n < u$ となるような実数とする。また D を d_i を (i, i) 成分に持つ対角行列とする。 $Z = X + iY \in H_n$ のうちで、上のような W, d_i を用いて $Y^{-1} = {}^t W D W$ と書け、また $X = (x_{ij})$ について $|x_{ij}| < u$ となるものの集合を $\Omega(u)$ と書く。

Theorem 7 u が十分大ならば、 $H_n = \cap_{M \in Sp(n, \mathbb{Z})} M\Omega(u)$ で、 $vol(\Omega(u)) < 0$ であり、 $M\Omega(u) \cap \Omega(u) \neq \emptyset$ なる $M \in Sp(n, \mathbb{Z})$ は有限個である。

この定理は $\Omega(u)$ がほぼ基本領域と呼んでもよいということを保証するものだが、証明は省略する。結論は Borel-Harish Chandra の一般論の特殊例である。

さて、前述の Proposition の証明のアウトラインを述べてから証明に移ろう。まず $\phi(f) = \|\rho(Y^{1/2})f(Z)\|$ とおくと、これは Γ 不変なことより、基本領域だけで考えればよい。ただし $Sp(n, \mathbb{Z})$ の基本領域だけで議論するには一般の Γ が $Sp(n, \mathbb{Z})$ の場合に帰着できることを言う必要がある。これは後で述べる。さて、 $\Gamma = Sp(n, \mathbb{Z})$ なら、 $\Omega(u)$ で最大値をとることを言えばよい。このため、

- (1) $\det(Y)$ が一定以上大きければ ϕ は小さくなって最大値ではあり得ないことをいう。
- (2) 次に最後に $\det(Y)$ が小さいところで、基本領域との共通部分が相対コンパクトなことを言って、ここで最大値をとることをいう。

論理的な順序は一応こうなのだが、述べ方の順序は少し変えるかもしれない。

まず $\det(Y)$ が十分大きいと $\phi(f)$ は小さいことを言いたい。そのためには $\|\rho(Y^{1/2})\|$ の評価と $\|f\|$ の評価の両方が必要である。

まず準備として、 $\rho(Y^{1/2})$ の部分进行处理するための補題を考える。 α を整数として、 $\rho(g) = \det(g)^\alpha \rho_m(g)$ で $\rho_m(g)$ の成分は g の成分の多項式と仮定する。

Lemma 8 任意の正定値対称行列 T をひとつ固定すると

$$\exp(-\pi \operatorname{tr}(gT^t g)) \det(g)^{-\alpha} \|\rho(g)\|$$

は g の関数として $GL_n^+(\mathbb{R})$ 上、有界である。ここで $GL_n(\mathbb{R})$ は行列式が正の実正則行列のなす群。特に T は任意の正の数としてもよい。

証明 : $T > 0$ より、 $c1_n < T$ となる正数 c が存在し、このような c に対して、

$$\exp(-\pi \operatorname{tr}(gT^t g)) \leq \exp(-c\pi \operatorname{tr}(g^t g))$$

となる。 $\rho_m(g) = \det(g)^{-\alpha} \rho(g)$ の成分は多項式だから、 $\|\rho_m(h)\| = \det(g)^{-\alpha} \|\rho(g)\|$ は多項式の平方根である。これは g の成分 g_{ij} の有限個のある多項式の絶対

値の和で押さえられる。 P が n^2 変数の単項式であるとき $P(g_{ij})\exp(-c\pi \sum_{i,j} g_{ij}^2)$ はあきらかに有界である。よって、証明された。

以上より、ある $c_0 > 0$ について

$$\phi(f) \leq \|\rho(Y^{1/2})\| \times \|f(Z)\| \leq \|f(Z)\| \det(Y)^{\alpha/2} \exp(c_0 \text{tr}(Y))$$

が任意の Y について成り立つとしてよい。よって次に、適当な領域上での $\|f(Z)\|$ の評価にうつる。以前に $\{Y > c1_n\}$ 上で $\|f(Z)\|$ が有界であることを示したが、これだけでは不足している。もっと強い評価をするためには $f(Z)$ がカスプ形式であることを用いる必要がある。

あらたに次の領域を定義する。 $c > 0, c' > 0$ を固定する。 $Y > 0$ なる領域で、 Y の成分を (y_{ij}) として

(1)

$$y_{ii} \geq c \quad (1 \leq i \leq n)$$

(2)

$$Y > c' \begin{pmatrix} y_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & y_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y_{nn} \end{pmatrix}$$

の2つの条件を満たすようなものの全体の集合を $\mathcal{D}_{c,c'}$ と書く。

$f(Z)$ を H_n 上のベクトル値関数とし、 $L^* \subset \text{Sym}_n(\mathbb{Q})$ を lattice として、 $f(Z)$ は H_n 上絶対かつ広義一様収束する級数

$$f(Z) = \sum_{T \in L^*} a(T) \exp(2\pi i \text{tr}(TZ))$$

とフーリエ展開されているとする。

Proposition 9 $f(Z)$ はゼロでないフーリエ係数 $a(T)$ を $T > 0$ の部分のみで持つとする。このとき、 c, c' のみによる定数 $c_1 > 0$ と $c_2 > 0$ が存在して、 $\mathcal{D}_{c,c'}$ 上で

$$\|f(Z)\| \leq c_1 \exp(-2\pi c_2 \text{tr}(Y))$$

が成立する。

証明: $T \in L^* \subset m^{-1}Sym_n(\mathbb{Z})$ で $T > 0$ とすると $t_{ii} > 0$ だから、 t_{ii} の最小値がある。 $t_{ii} \geq c_3$ としておく。 $Y \in \mathcal{D}_{c,c'}$ ならば、

$$\begin{aligned} tr(TY) &\leq cTr(Tdiag(y_{11}, \dots, y_{nn})) = c(t_{11}y_{11} + \dots + t_{nn}y_{nn}) \\ &\leq cc' tr(T) + c \sum_{i=1}^n t_{ii}(y_{ii} - c') \\ &\leq cc' tr(T) + cc_3 tr(Y) - ncc' c_3. \end{aligned}$$

よって、

$$\|a(T)e^{2\pi i tr(TZ)}\| \leq \|a(T)\| e^{-2\pi cc' tr(T)} e^{2\pi ncc' c_3} e^{-2\pi cc_3 tr(Y)}$$

ここで

$$c_4 = e^{2\pi ncc' c_3} \sum_{T \in L^*, T > 0} \|a(T)\| e^{-2\pi cc' tr(T)}$$

とおく。ここで最後の級数は $Z = icc' 1_n$ で $f(Z)$ が絶対収束することより有限定数である。よって、

$$\sum_{T > 0} \|a(T)\| e^{-2\pi tr(TY)} \leq c_4 \exp(-2\pi cc_3 tr(Y))$$

よって証明された。

Y の固有値を $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ とすると、

$$\det(Y)^{1/n} = (\lambda_1 \cdots \lambda_n)^{1/n} \leq (\lambda_1 + \dots + \lambda_n)/n \leq tr(Y)/n.$$

よって、 $\mathcal{D}_{c,c'}$ 上で

$$\|f(Z)\| \leq c_4 e^{-c_5 \det(Y)^{1/n}}$$

となるような定数 $c_5 > 0$ が存在する。

以上は $\mathcal{D}_{c,c'}$ 上では話であるから、これと、 $\Omega(u)$ や $\{Y > c1_n\}$ などの領域の比較が必要になる。

Lemma 10 (1) $u > 0$ に対し、ある $c_6 > 0, c_7 > 0$ が存在して、 $\Omega(u) \subset \mathcal{D}_{c_6, c_7}$ となる。

(2) $u > 0$ に対し、ある $c_8 > 0$ が存在して $\Omega(u) \subset \{Y > c_8 1_n\}$ となる。

証明:(2) は (1) がわかれば容易な系である。よって (1) の証明を述べる。 $Y^{-1} = {}^tWDW$ より、 $Y = W^{-1}D^{-1}{}^tW^{-1}$ であるから、 $W^{-1} = (v_{ij})$ として、

$$y_{ii} = d_i^{-1} + d_{i+1}^{-1}v_{i,i+1}^2 + \cdots + d_n^{-1}v_{i,n}^2 \geq d_i^{-1} > u^{-n+i-1} > 0$$

である。よって $c_6 = \min\{u^{-n+i-1}\}$ とおけば $y_{ii} > c_6$ である。次に Y 自身の評価をする。

$$X_0 = \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{d_2} & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{d_n} \end{pmatrix} W^{-1} \begin{pmatrix} \sqrt{d_1}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{d_2}^{-1} & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{d_n}^{-1} \end{pmatrix}$$

とおくと、これの (i, j) 成分は $v_{ij}(d_i d_j^{-1})^{1/2}$ であり、 $i \leq j$ でなければゼロである。 $i \leq j$ ならば $d_i d_j$ は有界だから、 X_0 は全体として有界な領域に含まれる。定義により

$$Y = \begin{pmatrix} \sqrt{d_1}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{d_2}^{-1} & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{d_n}^{-1} \end{pmatrix} X_0 {}^tX_0 \begin{pmatrix} \sqrt{d_1}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{d_2}^{-1} & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{d_n}^{-1} \end{pmatrix}$$

である。まず $X_0 {}^tX_0$ の固有値を $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ とする。 $\det(X_0) \neq 0$ より、 $X_0 {}^tX_0$ は正定値実対称行列だから、固有値は正である。また直交行列 P で対角化可能である。 $\Delta = P^{-1}X_0 {}^tX_0 P$ を対角行列とすれば、直交行列全体はコンパクト集合だから、 λ_i は上に有界である。同様に、 X_0 は対角成分が 1 の上三角行列だから X_0^{-1} も有界であり、同様の論法で λ_i^{-1} も上に有界である。すなわち、定数 $c > 0, c' > 0$ で $c < \lambda_i < c' (1 \leq i \leq n)$ となるものがある。よって、

$$Y > c \begin{pmatrix} d_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^{-1} & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_n^{-1} \end{pmatrix}$$

一方

$$y_{ii} = d_i^{-1} + d_{i+1}^{-1}v_{i,i+1}^2 + \cdots + d_n^{-1}v_{i,n}^2$$

において、 v_{ij} は有界で、 $d_{i+k}^{-1} < u^k d_i^{-1}$ であるから、ある定数 $c'' > 0$ があって、 $y_{ii} < c'' d_i^{-1}$ となる。以上より、 $c_7 = c c''^{-1}$ として、任意の $Z \in \Omega(u)$ に対して (2) を得る。q.e.d.

Lemma 11 $c > 0$ $u > 0$ を定数とする。このとき H_n 内のコンパクト集合 C が存在して、

$$\Omega(u) \cap \{X + iY \in H_n; \det Y < c\} \subset C$$

となる。

これはもちろん $\mathbb{C}^{(n+1)n/2}$ 内で相対コンパクトというよりは強い結果である。これを証明する。(ちなみにこの証明は Cartan Seminar に書いていないかもしれない。またここで登場する共通部分はもちろん c が十分大でなければ空かもしれない。) $\det(Y) \leq c$ から、 d_i^{-1} の評価をする。 $Y^{-1} = {}^t W D W$ より、

$$c^{-1} \leq \det(Y)^{-1} = \det(D) = d_1 \cdots d_n$$

また $0 < d_n < u$ より、 $0 < d_{n-1} < u d_n < u^2$ 。以下帰納的に $0 < d_i < u^{n-i+1}$ がわかる。よって、 d_i は上に有界だから d_i^{-1} は下に有界、一方

$$d_i^{-1} c^{-1} \leq d_1 \cdots d_{i-1} d_{i+1} \cdots d_n$$

より、 d_i^{-1} は上に有界でもある。すなわち、 $c_1 > 0$ と $c_2 > 0$ が存在して、 $i = 1, \dots, n$ について、 $c_1 < d_i^{-1} < c_2$ となる。また W^{-1} の各成分は、 $(\det(W) = 1)$ より逆行列の公式を考えて、 w_{ij} が有界だから) 有界である。すなわち集合

$$\mathcal{D} = \{D^{-1}; c_1 \leq d_i^{-1} \leq c_2\}$$

は $Y > 0$ なる領域内のコンパクト集合であり、 $W^{-1}, {}^t W^{-1}$ は $GL_n(\mathbb{R})$ 内のコンパクト集合に含まれ、よって $Y = W^{-1} D^{-1} {}^t W^{-1}$ も 3 つのコンパクト集合の積すなわち連続像 (これは $Y > 0$ 内にある) に含まれるからコンパクトである。これと $|x_{ij}| \leq u$ をあわせて、結局補題が証明された。

Proposition 12 $f(Z)$ が $Sp(n, \mathbb{Z})$ に関する、保型因子 (ρ, μ) のカスプ形式とする。このとき $\|\rho(Y^{1/2})f(Z)\|$ は H_n 上で最大値をとる。

証明：考えている量は $Sp(n, \mathbb{Z})$ 不変であるから、基本領域で考えれば十分で、よって十分大きい $u > 0$ について $\Omega(u)$ 上で考えればよい。

任意の $c_2 > 0$ に対して、ある $c_9 > 0$ が存在して

$$\|\rho(Y^{1/2})\| \leq c_9 e^{c_2 \pi \text{tr}(Y)} \det(Y)^{\alpha/2}$$

としてよいから、ある定数 $c_{10} > 0$ が存在して

$$\phi(f)(Z) \leq c_{10} e^{-c_2 \pi \text{tr}(Y)} \det(Y)^{\alpha/2} \leq c_{10} e^{-c_2 n \pi \det(Y)^{1/n}} \det(Y)^{\alpha/2}.$$

これは $\det(Y) \rightarrow \infty$ で 0 に近づく。よって、 $Z_0 \in \Omega(u)$ をひとつ固定すると、ある定数 $c_{11} > 0$ が存在して、 $\det(Y) > c_{11}$ で

$$\rho(f)(Z) < \phi(f)(Z_0)$$

となる。よって少なくとも $\det(Y) > c_{11}$ では最大値は取りえない。 $\Omega(u) \cap \{Y > 0; \det(Y) \leq c_{11}\}$ を含む H_n 内のコンパクト集合 C が存在するが、そこでは $\rho(f)(Z)$ はもちろん最大値をとる。これは全体の最大値でもあるから、命題は証明された。

この命題は $Sp(n, \mathbb{Z})$ に関する保型形式について述べている。このため $\Omega(u)$ をそのまま使うことができた。一般の Γ については、もう少し考察する必要がある。これを以下で調べる。

F を $Sp(n, \mathbb{Z})$ と通約的な群 Γ の、重さ ρ , multiplier μ のカスプ形式とする。 $\Gamma \subset Sp(n, \mathbb{Z})$ としておいても一般性を失わない。 Γ のカスプ形式というのは、前に述べたように $Sp(n, \mathbb{Z})$ の保型形式と同一視したときにカスプ形式という意味であった。言い換えると、

$$Sp(n, \mathbb{Z}) = \cup_{i=1}^t \Gamma \gamma_i \quad (\text{disjoint})$$

とするとき、

$$f_i(Z) = f|_{R_\rho}(\gamma_i) = \rho(C_i \tau + D_i)^{-1} f(\gamma_i Z) \quad \gamma_i = \begin{pmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{pmatrix}$$

として、 $F = (f_1, \dots, f_t)$ が $Sp(n, \mathbb{Z})$ のカスプ形式という意味である。しかし F に前の Proposition を適用しても f_i に関する量の和が評価されるだけであるから、有界は明らかだが、 H_n で最大値をとることの証明にはならない。最大値をとることを言うには少し別の方法を用いる。上で特

に $\gamma_1 = 1$ としておいてよいから、 $f_1(Z) = f(Z)$ である。 F がカスプ形式であることより、

$$f_i = \sum_{T>0} a_i(T) e^{2\pi i \text{Tr}(TZ)}$$

としておいてよい。前の関数の評価その他はこの級数が絶対かつ広義一様収束することしか使っていない。よって、

$$\|\rho(Y^{1/2})f_i(Z)\| = \|\rho(Y^{1/2})(f|R(\gamma_i))\| = \|\rho(\text{Im}(\gamma_i Z))f(\Gamma_i Z)\|$$

は $\Omega(u)$ 内で有界であり、かつ $\Omega(u)$ 内の点で最大値をとる。言い換えると、 $\gamma_i Z$ は $i = 1, \dots, t$ で次の領域

$$\Omega = \cup_{i=1}^t \gamma_i \Omega(u)$$

を動くのであるから、 $\|\rho(Y^{1/2})f(Z)\|$ は Ω 内で最大値をとる。 Ω は Γ の基本領域を含んでいるから、この量の Γ 不変性より、 $\|\rho(Y^{1/2})f(Z)\|$ は H_n で最大値をとる。Q.E.D.

2 Vanishing についての Poor-Yuen Criterion の概説

フーリエ係数が沢山消えれば、もともと保型形式はゼロだという事実がジーゲル以来知られているが、これを定量的にかなり改良したのが Poor-Yuen の結果である。ウェイトがある程度小さいときこの判定法は有用で、具体的な低いウェイトの保型形式が存在しないという証明に使われて成果を上げている。これは私はベクトル値の時まで拡張して証明したので、以下そのアウトラインを書く。(Hilbert 保型形式の時への拡張は岡崎武生、および Schulze-Pillot の学生によるものがある。一般の有界対称領域でも（少なくとも Tube domain なら）証明できると思うが、やっていない。）

2.1 very small weights

Poor-Yuen の説明の前に、一般論としてウェイトが非常に小さいときは保型形式は存在しないことを指摘しておく。たとえば次は昔から非常によく知られている。

Proposition 13 $k < 0$ ならば $M_k(\Gamma) = 0$ である。

この事実はもともとはジーゲルにあるが、Cartan Seminar でも証明されている。またそこではベクトル値の時についても類似の結果が少し述べられているが、これは非常に不満足な拡張で最終的な結果とは言い難い。これはのちに Freitag により改良されている。(またそののちの Weissauer の結果というものもあるが、これは証明を読んでいないのと、具体的な結果が今ひとつわかりにくいので、ここではとりあげない。)

Proposition 14 (Freitag) ρ を *non-trivial* な $GL_n(\mathbb{C})$ の既約有理表現とする。対応する *Young diagram* を $f_1 \geq f_2 \geq \cdots \geq f_n$ とする。このとき、 $f_n \geq 1$ でなければ $M_\rho(Sp(n, \mathbb{Z}), id.) = 0$ である。

証明のアウトライン。 $z^* = (z_1, \dots, z_n) \in H_1 \times \cdots \times H_1$ として $f(Z)$ の制限 $\rho(A)f({}^tAz^*A)$ を考える。 $A \in GL_n(\mathbb{R})$ を適当にとるとこれはヒルベルト保型形式と見なせる。このとき、 A を動かすと表現 ρ の「ウェイト」(対角行列上に制限したときの既約表現) がゼロでないヒルベルト保型形式のウェイトとしてでてくる。ヒルベルト保型形式では、ウェイトは負ではないし、またある変数についてのみウェイトがゼロで他が正ということもあり得ない。よって実は $\rho(g)$ の成分はみな $\det(\rho(g))$ でわられる。q.e.d.

個人的には、Freitag の結果はもっと改良されるのではないかと考えている。たとえば

問: $n = 2$ とし、 ρ の *Young diagram* のパラメータを (f_1, f_2) とするとき、 $f_2 = 1$ または $f_2 = 2$ ならば $M_\rho(Sp(2, \mathbb{Z}), id.) = \{0\}$?

もちろん full modular group というのがポイントである。これは予想と言うほどの根拠があるわけではない。しかしもしこれが正しくないのならゼロでない保型形式の構成が問題になるわけで、これが実は全然手段が思い浮かばないのである。(Boecherer と Schulze-Pillot とも討論したのだが、レベル付きのテータで構成して level 1 に落とすのはゼロしか得られず無理らしい。)

2.2 Kernel の概念

次に Kernel の概念を導入し、フーリエ係数が十分沢山消えれば保型形式自身が消えるという Siegel-Eichler-Poor-Yuen の結果をベクトル値の場合に拡張して解説する。以下 n を固定し、記号 $\Omega(\mathbb{R}) = \Omega_n^{semi}(\mathbb{R})$ で n 次半正定値実対称行列全体の集合をあらわす。また Ω で n 次正定値実対称行列全体のなす cone をあらわす。閉集合 $K \subset \mathbb{R}^n$ が (closed) convex set というのは、任意の $x, y \in K$ と任意の $\lambda \in [0, 1] \subset \mathbb{R}$ について $\lambda x + (1 - \lambda)y \in K$ となることである。

Definition 15 Ω^{semi} の閉部分集合 K が *Kernel* というのは次の3つを満たすこと。

- (1) 任意の $c \geq 1$ と $x \in K$ について、 $cx \in K$.
- (2) K は $\mathbb{R}^n$ の原点 0 を含まない。i.e. $0 \notin K$,
- (3)

$$\mathbb{R}_{\geq 0}K = \{y \in Sym_n(\mathbb{R}); y = cx \text{ for some } x \in K \text{ and } x \geq 0\}$$

とおくと、 $\Omega \subset \mathbb{R}_{>0}K$.

容易にわかるように、 K が kernel ならば、 $x, y \in K$ かつ $c_1 + c_2 \geq 1$, $c_1, c_2 \geq 0$ ならば $c_1x + c_2y \in K$ である。また、 $x_i \in K$ かつ $c_i \geq 0$ ($1 \leq i \leq \nu$) ならば $\sum_{i=1}^{\nu} c_i x_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}K$ である。Kernel というのは感じとしては cone の原点のあたりを切り取ってのこる立体。

記号：部分集合 $K \subset Sym_n(\mathbb{R})$ に対して

$$\begin{aligned} K^{\sqcup} &= \{x \in SYm_n(\mathbb{R}); \langle x, y \rangle \geq 1 \text{ for all } y \in K\} \\ K^{\vee} &= \{x \in SYm_n(\mathbb{R}); \langle x, y \rangle \geq 0 \text{ for all } y \in K\} \end{aligned}$$

とおく。 K が Kernel ならば $K^{\sqcup}$ も Kernel である。 $K_{\mathbb{Q}} = K \cap \Omega^{semi}(\mathbb{Q})$ とおくと、 $K_{\mathbb{Q}}$ は K 内で dense なので、 $(K_{\mathbb{Q}})^{\sqcup} = K^{\sqcup}$ である。また $K^{\vee\vee} = \mathbb{R}_{\geq 0}K$ である。

自然数 N に対して次の記号を導入する。

$$S\Delta_n(N) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \in Sp(n, \mathbb{Z}); \det(A) = 1, A \equiv D \equiv 1_n \pmod{N}, B \equiv 0 \pmod{N} \right\}$$

$n \geq 2$ とすると、 H_n 上の $S\Delta_n(N)$ 不変な（ベクトル値）正則関数、すなわち、 $f(A(Z+B)^t A)) = f(Z)$ となる正則関数について、Koecher principle より

$$f(Z) = \sum_{T \in \Omega^{semi}(\mathbb{Z})} a(T) e^{2\pi i \text{Tr}(TZ)}$$

とフーリエ展開できる。

$\text{supp}(f) = \{T \in \Omega_n^{semi}(\mathbb{Q}); a(T) \neq 0\}$ なる集合を考える。集合 $\mathbb{R}_{\geq 1} \text{supp}(f)$ の convex hull の closure を $\nu(f)$ と書く。これは

$$c_1 T_1 + \cdots + c_r T_r$$

(r は任意で、 $T_i \in \text{supp}(f)$, $\sum_i c_i \geq 1$ ($1 \leq i \leq r$)) の全体と言っても同じ事である。

Proposition 16 (Key Lemma) f が前の通りとし、 $0 \notin \text{supp}(f)$ と仮定する。すると、 $\nu(f)$ が Kernel であるか $f = 0$ であるかのどちらかである。

証明は省略する。

ρ を $GL_n(\mathbb{C})$ の有理表現で、 $\rho = \det^k \rho_0$ ここで ρ_0 は m 次の polynomial representation（成分が $g \in GL_n$ の成分の m 次斉次多項式で与えられるもの）とする。次は Poor-Yuen のベクトル値への拡張である（複素数値のときは $m = 0$ であり、Poor-Yuen が与えた定理と同一）。

Theorem 17 ゼロでないカスプ形式 $f \in M_\rho(\Gamma_n)$ について $\|\rho(Y^{1/2})f(Z)\|$ が $Z = Z_0 = X_0 + iY_0$ で最大値をとるならば、

$$\frac{k+m}{4\pi} Y_0^{-1} \in \nu(f)$$

である。

一方で Γ_n の基本領域内では、カスプがひとつしかないことから、 Y_0^{-1} はあまり「大きく」なれない。応用として、 $\nu(f)$ が十分大きければ $f = 0$ ということになる。この「大きさ」をはかる関数はいろいろあり得る。Poor-Yuen は dyadic trace（たぶん彼らの命名）を採用した。

$$w(s) = \inf_{\{Y > 0\}} \frac{\text{tr}(sY)}{m(Y)}$$

ここで、 $m(Y) = \min_{x \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} {}^t x Y x$.

以下の結果は上の定理の簡単な帰結であるが、証明は省略する。

Lemma 18 Γ_n の基本領域上で

$$w(Y^{-1}) \leq \frac{2n}{\sqrt{3}}$$

である。

Corollary 19 $\rho = \det^k \rho_0$ で ρ_0 が m 次の多項式表現とする。このとき、 $f \in S_\rho(\Gamma_n)$ について、

$$a(T) = 0 \text{ for all } T \text{ such that } w(T) \leq \frac{2n}{\sqrt{3}} \frac{k+m}{2\pi}$$

ならば $f = 0$ である。

3 保型形式のなす環

3.1 保型形式の射影極限

$\Gamma_n = Sp(n, \mathbb{Z})$ と書くことにする。また $\rho = \det^k$, multiplier $\mu = id$. のとき、記号を省略して $M_\rho(\Gamma_n, id.) = M_k(\Gamma_n)$ と書くことにする。

$\Phi : M_k(\Gamma_n) \rightarrow M_k(\Gamma_{n-1})$ により $M_k(\Gamma_n)$ ($n \geq 1, k \geq 0$) を射影系と見なすと射影的極限

$$\lim_{\leftarrow n} (\oplus_{k=0}^{\infty} M_k(\Gamma_n))$$

が定義される。これはすなわちすべての n にわたる直積の中の元

$$(\cdots, f_{n+1}, f_n, \cdots, f_2, f_1) \in \prod_{n=1}^{\infty} M_k(\Gamma_n) \quad (f_n \in M_k(\Gamma_n))$$

であって、 $\Phi(f_n) = f_{n-1}$ となるもののなす環である。この環には $f \in M_k(\Gamma_n)$ の元で $F \in M_k(\Gamma_{n+1})$ で $\Phi(F) = f$ となるものが存在しないようなものはあらわれないから、ジークル保型形式のすべてを反映するわけではない。しかし次が知られている。

Theorem 20 (Freitag) この環は加算個の代数的に独立な生成元をもつ無限変数多項式環である。

証明は Singular modular forms の理論とテータ関数を用いる。生成元は既約ユニモジュラー偶格子から作られた各次数のジーゲル保型形式の列に対応する。

以上は少々特殊な環を扱った。もっと自然な対象は

$$M(\Gamma_n) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} M_k(\Gamma_n)$$

である。これを保型形式環と呼ぼう。

保型形式環の具体的な構造がわかっている場合はあとで述べることにして、一般論としては、次が知られている。

Theorem 21 (Freitag [12]) $n \geq 8$ ならば $M(\Gamma_n)$ は *factorial*(=*UFD*、一意素元分解環) である。

このほか n が十分大ならば一般型などの結果があるのではないかと思うが筆者はこのような分類論には詳しくないので省略したい。

3.2 保型形式環は有限生成

もっと一般の $Sp(n, \mathbb{Z})$ と通約的な離散群 Γ について

$$M(\Gamma) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} M_k(\Gamma)$$

を Γ の保型形式環と呼ぶことにする。佐武コンパクト化というのは、結果から言えばこの環の Proj であって、代数的だから、 $M(\Gamma)$ が有限生成というのは当たり前でないと困るのであるが、たとえば環 $M(\Gamma)$ は $Proj(M(\Gamma))$ では全く決まらない。たとえば、よく知られているように、

$$Proj(\bigoplus_{k=0}^{\infty} M_{kd}(\Gamma)) = Proj(M(\Gamma))$$

が任意の正整数 d について成立する。よって、注意深く考えるべきである。ここでは Igusa と Cartan Seminar を引用しておく。

一般に $S = \bigoplus_{k=0}^{\infty} S_d$ を (commutative) graded ring とし、 $S_0 = \mathbb{C}$ とする。よって S は $\mathbb{C}$ 上の algebra である。また正整数 d に対して $S^{(d)} = \bigoplus S_{dk}$ とおくと、これは S の graded subring である。

Proposition 22 (Igusa [31] p.94 Lemma 8)

$S^{(d)}$ が $\mathbb{C}$ 上環として有限生成ならば S もそうである。

これは純粋に環論的な主張であって、証明も抽象代数学である。Cartan Seminar には正確にこれに当たることは示していないのではないかとと思われる。

Proposition 23 (Cartan Seminar 17)

ある正整数 d があって、 $\bigoplus_{k=0}^{\infty} M_{kd}(\Gamma)$ は有限生成である。

この命題は、Cartan Seminar の 17-11 Théorème Fondamental で主張されているが、そこではウェイトは実際上少し条件が付いているかたちになっていることに注意すべきである。(そのため、Igusa からの引用を付け加えた方が安全と考えた。) また、一番微妙なポイントは 17-14 の Proposition にあると思う。

Corollary 24 $M(\Gamma)$ は $\mathbb{C}$ 上有限生成である。

以上は、当然にも一般の有界対称領域の保型形式環でも同一のはずである。少なくとも Baily-Borel の佐武コンパクト化の議論で Cartan Seminar の部分に当たるものが示されているはずであるが、私はよく確かめていない。たとえば Baily-Borel [3] §. 10, p. 524 では、一応ヤコビアンから決まる保型因子に対する保型形式環の有限生成性が主張されているようであるが、(よって、もっと「小さな」保型因子でも有限生成だが) 群が完全に一般の場合の主張になっているのかどうか、私は良く知らない。

3.3 保型形式の構成法

種々の構成法を具体例によって示す。 $\Gamma_n = Sp(n, \mathbb{Z})$ と書く。しばらく $n = 2$ とする。 $\dim S_{10}(\Gamma_2) = 1$ が知られている。この定数倍を除いて一意的に決まるウェイト 10 のカスプ形式を例として取り上げて、保型形式の互いに異なる様々な構成法を述べてみる。

アイゼンシュタイン級数 H_n 上の関数 ϕ について、

$$(\phi|_kg)(Z) = \det(CZ + D)^{-k} \phi(Z)$$

とおく。 $Sp(n, \mathbb{Z})$ 不変な関数を作りたかったら、たとえば $\sum_{\gamma} \phi|_k \gamma$ をとればいいが、収束が問題である。特に ϕ として、 Γ の部分群 Γ_0 で不変なものをとれば、和を Γ_0 のコセット上に制限してもよい。 k を偶数として、

$$\Gamma_{\infty} = \left\{ \begin{pmatrix} U & X \\ 0 & {}^t U^{-1} \end{pmatrix} \in \Gamma_n \right\}$$

とおき、上で $\phi = 1$ とおくと、 ϕ は Γ_{∞} 不変である。

$$\phi_k(Z) = \sum_{\gamma \in \Gamma_{\infty} \backslash \Gamma_n} \det(CZ + D)^{-k}$$

とおくと $k > n + 1$ で絶対一様収束する。これをウェイト k のジーゲルアイゼンシュタイン級数という。アイゼンシュタイン級数のフーリエ係数は有理数であることが知られている。 $\phi_4 \phi_6 - \phi_{10}$ は $S_{10}(\Gamma_2)$ の non-zero element を与える。

テータ定数 $e(x) = e^{2\pi i x}$ と記号を定める。 $m = (m', m'') \in \mathbb{Z}^4$ と $Z \in H_2$ について、

$$\theta_m(Z) = \sum_{p \in \mathbb{Z}^2} e \left(\frac{1}{2} {}^t(p + \frac{m'}{2})Z(p + \frac{m'}{2}) + {}^t(p + \frac{m'}{2})\frac{m''}{2} \right)$$

とおく。これは適当な群についてウェイト $1/2$ の保型形式であるが、

$$\theta_5 = \theta_{0000}\theta_{0001}\theta_{0010}\theta_{0011}\theta_{0100}\theta_{0110}\theta_{1000}\theta_{1001}\theta_{1100}\theta_{1111}$$

とおくとき、 $0 \neq \theta_5^2 \in S_{10}(\Gamma_2)$ である。

球関数つきテータ関数 上とよく似た構成に、even unimodular matrix と pluri-harmonic polynomial を用いた構成がある。 $L \in \mathbb{Q}^{8d}$ は even unimodular lattice, $P(X)$ は $X \in M_{n,8d}(\mathbb{C})$ の成分を変数とする多項式で、任意の $A \in GL_n(\mathbb{C})$ について $P(AX) = \det(A)^{\nu} P(X)$ かつ多重調和 (pluri-harmonic) とする。(これは $P(AX)$ がすべての $A \in GL_n(\mathbb{C})$ について普通の意味で harmonic というのと同値であるが、今は $P(AX) = \det(A)^k P(X)$ であるから、この条件下で実はたまたま pluri-harmonic と harmonic は同値になっている。一般のベクトル値保型形式などを考えるときには pluri-harmonic というのが正しい定式化である。)

このとき L^n (L の n 個の直積) を $M_{n,8d}$ に自然に埋め込んで考えて

$$F(Z) = \sum_{X \in L^n} P(X) e^{2\pi i \text{Tr}(S_X Z)}$$

とおくと $F \in M_{4d+\nu}(\Gamma_n)$ である。ただし、

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

とし、 $S_X = ((x_i, x_j))$ とおいた。特に $\nu \geq 1$ ならばカスプ形式である。

Theorem 25 (Boecherer [4]) d と $\nu \geq 1$ を固定し、すべての L と P から上のようにして得られるカスプ形式のはるベクトル空間を $B(8d, n, \nu)$ と書く。 $2d > n$ かつ $\nu \geq 1$ と仮定すると

$$S_{4d+\nu}(\Gamma_n) = B(8d, n, \nu)$$

である。また、 $2d > n$ ならば $B(8d, n, 0) = M_{4d}(\Gamma_n)$ である。

もちろんこの定理の仮定は十分条件であって必要条件とは限らない。一方でウェイトの小さいところではいわゆる singular modular forms の理論というのがあって、次が知られている。

Theorem 26 (Freitag) $2k < n$ ならば、 $k \equiv 0 \pmod{4}$ でなければ $M_k(\Gamma) = 0$ である。 $2k < n$ かつ $k \equiv 0 \pmod{4}$ ならば $B(2k, n, 0) = M_k(\Gamma_n)$ である。

微分作用素 前の Boecherer の定理からすると、 $\chi_{10} \in S_{10}(\Gamma_2)$ は 16 次の偶ユニモジュラー格子と 2 次の多重調和多項式から構成できるはずである。一方で Rankin-Cohen type の微分作用素という知られている複数のジーゲル保型形式から新しいジーゲル保型形式を構成する方法がある。この両者は、一見かなり近いのだが、実際は微分作用素の方がやや応用が広く計算しやすい。たまたま χ_{10} の構成では両者の構成は同じ場合もあるので、これを解説してみよう。16 次の偶ユニモジュラー格子は同型を除き 2 つある。ふつうこの 2 つは $E_8 + E_8$ と Γ_{16} と書く。ここで E_8 は 8 次の同型を除いてただ一つの偶ユニモジュラー格子である。さて、ここでは $L = E_8 + E_8$ をとる。 L で決まるテータ関数はウェイト 8 であるか

ら、ウェイト 10 のジーゲル保型形式を作るには $P(AX) = \det(A)^2 P(X)$ ($X \in M_{2,16}$) となる多重調和関数を用意しなければならない。あとの都合上、少し特殊な P を選んでみる。

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix} \quad (x, x', y, y' \in \mathbb{C}^8)$$

として、 $P(X)$ を次のようにおく。

$$\begin{aligned} P(X) = & 16 \begin{vmatrix} (x, x) & (x, y) \\ (x, y) & (y, y) \end{vmatrix} + 16 \begin{vmatrix} (x', x') & (x', y') \\ (x', y') & (y', y') \end{vmatrix} \\ & - 14 \begin{vmatrix} (x, x) & (x', y') \\ (x, y) & (y', y') \end{vmatrix} - 14 \begin{vmatrix} (x', x') & (x, y) \\ (x', y') & (y, y) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

とすると条件を満たすのは容易にわかる。これを用いて $\theta_{L,P}(Z)$ を構成すると、具体的な計算により $\theta_{L,P}(Z)$ はゼロで無いことがわかり、 χ_{10} と定数倍を除き一致する。実際は $e(\xi) = e^{2\pi i \xi}$ と書くことにして

$$\begin{aligned} \theta_{L,P} = & 322560 \left(e(\text{Tr} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} Z \right) \right. \\ & \left. - 2e(\text{Tr} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Z \right) + 36e(\text{Tr} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} Z \right) + \dots \right) \end{aligned}$$

ここで一番面倒なのは $\theta_{L,P}(Z)$ が恒等的にゼロでないように P を選ぶという点にある。単に変換の条件を満たすだけなら P は多数あるし、一般的な形もわかっているが、テータが消えないと言う部分だけは手作業にならざるを得ない。さて、 $\theta_{L,P}$ は実はウェイト 4 のアイゼンシュタイン級数 $\phi_4 = \theta_{E_8}$ から微分作用素によって得ることもできる。これを説明する。 $Z \in H_2$ に対して、

$$Z = \begin{pmatrix} \tau & z \\ z & \tau' \end{pmatrix}$$

とおく。

記号を簡単にするために、

$$\begin{aligned} \partial_1 &= \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial \tau} \\ \partial_2 &= \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial z} \\ \partial_3 &= \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial \tau'} \end{aligned}$$

もうひとつ別の変数 $Z' \in H_2$ をとって、同様に ∂'_i ($i = 1, 2, 3$) を定義しておく。 Z, Z' に関する線型正則微分作用素 $\mathcal{D}$ を

$$\begin{aligned} \mathcal{D} = & 16 \begin{vmatrix} \partial_1 & \partial_2/2 \\ \partial_2/2 & \partial_3 \end{vmatrix} + 16 \begin{vmatrix} \partial'_1 & \partial'_2/2 \\ \partial'_2/2 & \partial'_3 \end{vmatrix} \\ & - 14 \begin{vmatrix} \partial_1 & \partial'_2/2 \\ \partial_2/2 & \partial'_3 \end{vmatrix} - 14 \begin{vmatrix} \partial'_1 & \partial_2/2 \\ \partial'_2/2 & \partial_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

とおく。このとき、

$$\theta_{L,P}(Z) = \mathcal{D}(\phi_4(Z)\phi_4(Z'))|_{Z'=Z}$$

となるのは容易にわかる。実際

$$\phi_4(Z) = \sum_{x,y \in E_8} e^{2\pi i((x,x)\tau + 2(x,y)z + (y,y)\tau')}$$

であり、各偏微分では (x, x) などがでるだけだから、よく見れば微分すると言っても各フーリエ係数に多項式を書けると言っても結局は同じ事だからである。もっと直接的に書けば、

$$\theta_{L,P} = 32\phi_4(\partial_1\partial_3 - \partial_2^2/4)\phi_4 - 28\partial_1\phi_4)(\partial_3\phi_4) + 7(\partial_2\phi_4)^2$$

である。このような微分作用素は Rankin-Cohen type の微分作用素と呼ばれる。一般論は原理は [21], 具体的なのは [6] を参照されたい。

Lifting による方法 保型形式の構成法に斎藤-黒川リフティングを用いる方法がある。これは $n = 2$ に特有であったが、最近 n が偶数ならば池田リフティングというのがでてきた。ここでは $n = 2$ に限って説明する。ウェイトが $10 - 1/2 = 19/2$ の $\Gamma_0(4)$ のカスプ保型形式で Kohnen plus space に属するものを考える。具体的には

$$\begin{aligned} f(\tau) &= \theta_{00}(2\tau)^7\theta_{01}(2\tau)^{12} - 16\theta_{00}(2\tau)^3\theta_{01}(2\tau)^{16} \\ &= q^3 - 2q^4 - 16q^7 + 36q^8 + \dots \end{aligned}$$

を考えよ。ここで pluse space に属するというのは

$$f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} c(n)e^{2\pi in\tau}$$

とフーリエ展開したときの係数 $c(n)$ が $-n \equiv 0, 1 \pmod{4}$ のものを除いて、0 になるという意味である。これに対して半整数対称行列 T の関数 $a(T)$ を

$$a(T) = \sum_{d|e(T)} d^{k-1} c(4 \det(T)/d^2)$$

と定義する。ここで、 $e(T)$ は

$$T = \begin{pmatrix} t_1 & t_{12} \\ t_{12} & t_2 \end{pmatrix}$$

とおいたときの t_1, t_2, t_{12} の最大公約数である。このとき

$$F(Z) = \sum_{T>0} a(T) e^{2\pi i \text{Tr}(TZ)}$$

とおくと、これは $S_{10}(\Gamma_2)$ の non-zero element.

類似例として、たとえば

$$\theta_{00}(2\tau)^7 - 14\theta_{00}(2\tau)^3\theta_{10}(2\tau)^4 = 1 + 56q^3 + 126q^4 + 576q^7 + 756q^8 + \dots$$

と考えると、 ϕ_4 を得る。 ϕ_6, χ_{12} もリフティングで得られる。 χ_{35} についてはこのようなリフティングは知られていない（というか、L 関数の具体的数値から見れば、リフティングはないはずである。） χ_{35} の簡単な構成法についてはあとで説明する。

Borcherds product 一般に、 $SO(n, 2)$ に対応する領域については、Borcherds 積という、ちょうど Ramanujan のデルタ関数のような特別な作り方がある。今、 $SO(2, 1) \sim SL_2(\mathbb{R})$, $SO(2, 2) \sim SL_2(\mathbb{R}) \times SL_2(\mathbb{R})$, $SO(2, 3) \sim Sp(2, \mathbb{R})$ であるから、これらについては、たとえば 2 次のジエゲル保型形式についてはこの作り方が流用できる部分がある。 θ_5 はその例になっている。 $Sp(3, \mathbb{R})$ 以上ではこのような同型はないから、Borcherds product は使えない。これらについては青木氏の解説にゆずる。Borcherds product の重要な利点はゼロの因子が正確にわかるという点にある。

3.4 保型形式環の例

Proposition 27 (Igusa) ウェイト 35 のカスプ形式 χ_{35} が存在して、

$$\bigoplus_{k=0}^{\infty} M_k(\Gamma_2) = \mathbb{C}[\phi_4, \phi_6, \phi_{10}, \phi_{12}] \oplus \chi_{35} \mathbb{C}[\phi_4, \phi_6, \phi_{10}, \phi_{12}]$$

ここで実は

$$\begin{aligned}\chi_{10} &= \phi_4\phi_6 - \phi_{10}, \\ \chi_{12} &= 441\phi_4^3 + 250\phi_6^2 - 691\phi_{12}\end{aligned}$$

とおくとこれらはカスプ形式で、カスプ形式のなすイデアルの生成元でもある。当然 $\mathbb{C}[\phi_4, \phi_6, \phi_{10}, \phi_{12}] = \mathbb{C}[\phi_4, \phi_6, \chi_{10}, \chi_{12}]$.

以下、この事実の証明のアウトラインを述べてみよう。

$Z \in H_2$ について

$$Z = \begin{pmatrix} \tau & z \\ z & \tau' \end{pmatrix}$$

と記号を使う。 $D := \{Z \in H_2; z = 0\}$ とおく。

Proposition 28 (Hammond, Freitag(independent)) D 上 $\chi_{10} = 0$ である。また $\chi_{10}(Z) = 0$ となるのは、ある $\gamma \in \Gamma_2$ について $Z \in \gamma D$ の時に限る。さらに θ_5 の $z = 0$ でのオーダーは 1 である。

証明:

現在では Borcherds product の一般論でやるのがベストであるから省略。

以下では井草の証明ではなく Hammond, Freitag のワンセンテンスプルーフについて述べる。

$$Wf = f \begin{pmatrix} \tau & 0 \\ 0 & \tau' \end{pmatrix}$$

とおく。井草によればこれは Witt operator と呼ばれている。

Corollary 29 f が Γ_2 の保型形式で $Wf = 0$ ならば f/θ_5 も正則である。さらに f のウェイトが偶数ならば f/χ_{10} も正則である。

Proposition 30 $f \in M_k(\Gamma_2)$ ならば Wf は $M_k(\Gamma_1)$ の対称テンソルに含まれる。ここで対称テンソルというのは $f, g \in M_k(\Gamma_1)$ について $f(\tau)g(\tau') + f(\tau')g(\tau)$ で生成されるベクトル空間の元という意味である。

Proposition 31 $W(\phi_4), W(\phi_6), W(\chi_{12})$ の生成する環は上の意味での対称テンソル全体と一致する。

以上より、 $\oplus_{k=0}^{\infty} M_{2k}(\Gamma_2) = \mathbb{C}[\phi_4, \phi_6, \chi_{10}, \chi_{12}]$ はあきらかである。

奇数ウェイトは χ_{35} を Borcherds product で構成して、ゼロが対角の orbit にしかないことを言えば同じ証明が通用する。また Igusa は theta characteristics のうちで azygous triples のべきを平均化するという、きわめて複雑な構成法でこれを得た。

しかし私は次の方法がもっとも簡単であると考える。(この結果は新しいはずである。)

まず χ_{35} の構成は

$$\chi_{35} = \begin{vmatrix} 4\phi_4 & 6\phi_6 & 10\chi_{10} & 12\chi_{12} \\ \frac{\partial\phi_4}{\partial\tau} & \frac{\partial\phi_6}{\partial\tau} & \frac{\partial\chi_{10}}{\partial\tau} & \frac{\partial\chi_{12}}{\partial\tau} \\ \frac{\partial\phi_4}{\partial z} & \frac{\partial\phi_6}{\partial z} & \frac{\partial\chi_{10}}{\partial z} & \frac{\partial\chi_{12}}{\partial z} \\ \frac{\partial\phi_4}{\partial\tau'} & \frac{\partial\phi_6}{\partial\tau'} & \frac{\partial\chi_{10}}{\partial\tau'} & \frac{\partial\chi_{12}}{\partial\tau'} \end{vmatrix}$$

でよい。 $\chi_{30} = \chi_{35}/\theta_5$ とおく。 Γ_e を $Sp(2, \mathbb{Z})$ の A_6 に対応する index 2 の部分群、 $\Gamma_{1,e}$ を $SL_2(\mathbb{Z})$ の index 2 の部分群とすると、 $f \in M_k(\Gamma_2, sgn)$ のとき、 Wf の像は、 $M_k(\Gamma_1, sgn)$ の「交代テンソル」に含まれる。 $\oplus_{k=0}^{\infty} M_k(\Gamma_{1,e}) = \mathbb{C}[E_4, E_6, \sqrt{\Delta}]$ と考慮に入れるとまったく同じ考察で、

$$M(\Gamma_e) = \oplus_{k=0}^{\infty} \mathbb{C}[\phi_4, \phi_6, \theta_5, \chi_{12}, \chi_{30}]$$

がわかる。これから Γ_2 に関する奇数ウェイトの結果も従う。

3.5 その他の知られている場合

任意の自然数 N について、 $Sp(n, \mathbb{Z})$ の部分群を

$$\begin{aligned} \Gamma(N) &= \left\{ g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma(N); A \equiv D \equiv 1_n \pmod{N}, B \equiv C \equiv 0 \pmod{N} \right\} \\ \Gamma(N, 2N) &= \left\{ g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(n, \mathbb{Z}); \text{diagonal of } A^t B \text{ and } C^t D \equiv 0 \pmod{2N} \right\} \end{aligned}$$

と定義する。

$\Gamma(N)$ をレベル N の主合同部分群という。また、 $\Gamma(N, 2N)$ を Igusa group と呼ぶ人もいる。($\Gamma(1, 2)$ については、伝統的には theta group というように思う。) これを Igusa group と呼びたい気持ちは、一般論としては、 $N = r^2$ で r が偶数の時、 $\Gamma(N, 2N)$ の整数ウェイトの保型形式のなす環は $\mathbb{C}[\theta_a \theta_b]$ ($a, b \in r^{-1}\mathbb{Z}^{2n}$) という (第1種) テータ定数のなす環の整閉包に等しいという井草の定理があるからである。ここで $a = {}^t(a', a'')$, $a', a'' \in r^{-1}\mathbb{Z}^n$ として、

$$\theta_a(\tau) = \sum_{p \in \mathbb{Z}^n} e \left(\frac{1}{2} {}^t(p + a') \tau (p + a') + {}^t(p + a') a'' \right)$$

とおいた。(ここで $e(x) = e^{2\pi i x}$.)

Runge は類似の定理 (ただし少しだけ内容が違う) を第2種テータ定数の場合にも与えた。ここで第2種というのは $\theta_{(a,0)}(2\tau)$ ($a \in 2^{-1}\mathbb{Z}^n$) の事である。また対象としている群は $\Gamma^*(2, 4)$ と書かれる $\Gamma(2, 4)$ の指数2の部分群であり、具体的には

$$\Gamma^*(2, 4) = \left\{ g = \begin{pmatrix} A & 2B \\ 2C & D \end{pmatrix} \in \Gamma(2); \det(A) \equiv \det(D) \equiv 1 \pmod{4} \right. \\ \left. \text{diagonal of } B \text{ and } C \equiv 0 \pmod{2} \right\}$$

と記述される。[33]

以上の Igusa の結果は $n = 2$, $N = 4$ の場合に応用され、また Runge の結果は $n = 3$, $N = 2$ の場合に応用され、保型形式環を具体的に書くのに使われた。ただしこれ以上の具体的な適用例はあまり知られていない。

実際には r を固定したときに、characteristic が $r^{-1}\mathbb{Z}^{2n}$ に属するテータ定数のなす環自身は一般には整閉ではない。たとえば $n = 1$, $r = 4$ ですでに整閉ではない。実際には $n = 1$ で $r \neq 2$ ならばどれも整閉ではない。また、一般の次数では $r = 2$ でもあまり多くは望めない。たとえば $n \geq 6$ ならば $r = 2$ でも、テータ定数の多項式では表せない任意に大きいウェイトの保型形式が存在する。(Igusa [30]). $n \geq 5$ ならば $r = 2$ のテータ定数の生成する環は整閉ではない。(Salvati Manni [36]). これらの定理についてはこの記事では解説しない。

以下では、より具体的な環の記述のみについて述べる。

$n = 1$ この場合はいろいろあるが、略。

$n = 2$ の場合 $\Gamma(4, 8)$, $\Gamma(2)$ などが最初にわかった（井草）。たとえば $M(\Gamma(4, 8)) = \mathbb{C}[\theta_m \theta_n]$.

それ以外では $n = 2$ の場合、自然数 N について、次の合同部分群

$$\Gamma_0(p) = \left\{ g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_2; C \equiv 0 \pmod{N} \right\}$$

を定義し、また、 $N = 2, 3, 4$ に対し、 $\Gamma_0(N)$ の character を

$$\chi_N(g) = \left(\frac{-N}{\det D} \right)$$

で定義する。この N について、 $\Gamma_0(N)$ の指数 2 の部分群を

$$\Gamma_0^\chi(N) = \left\{ g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N); \chi_N(g) = \left(\frac{-N}{\det D} \right) = 1 \right\}$$

と定義する。

1. $N = 2$ では

$$M(\Gamma_0(2)) = \mathbb{C}[X_2, Y_4, Z_4, K_6] \oplus \chi_{19} \mathbb{C}[X_2, Y_4, Z_4, K_6]$$

ここで

$$\chi_{19} = \begin{vmatrix} 2X_2 & 4Y_4 & 4Z_4 & 6K_6 \\ \frac{\partial X_2}{\partial \tau} & \frac{\partial Y_4}{\partial \tau} & \frac{\partial Z_4}{\partial \tau} & \frac{\partial K_6}{\partial \tau} \\ \frac{\partial X_2}{\partial z} & \frac{\partial Y_4}{\partial z} & \frac{\partial Z_4}{\partial z} & \frac{\partial K_6}{\partial z} \\ \frac{\partial X_2}{\partial \tau'} & \frac{\partial Y_4}{\partial \tau'} & \frac{\partial Z_4}{\partial \tau'} & \frac{\partial K_6}{\partial \tau'} \end{vmatrix}$$

2. ($N = 3$. joint with Aoki)

$$\Gamma_0^\chi(3) = \left\{ g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_2; C \equiv 0 \pmod{3}, \left(\frac{-3}{\det(D)} \right) = 1 \right\}$$

について

$$M(\Gamma_0^\chi(3)) = \mathbb{C}[a_1, b_3, c_4, d_3] \oplus \chi_{14} \mathbb{C}[a_1, b_3, c_4, d_3]$$

ここで

$$\chi_{14} = \begin{vmatrix} a_1 & 3b_3 & 4c_4 & 3d_3 \\ \frac{\partial a_1}{\partial \tau} & \frac{\partial b_3}{\partial \tau} & \frac{\partial c_4}{\partial \tau} & \frac{\partial d_3}{\partial \tau} \\ \frac{\partial a_1}{\partial z} & \frac{\partial b_3}{\partial z} & \frac{\partial c_4}{\partial z} & \frac{\partial d_3}{\partial z} \\ \frac{\partial a_1}{\partial \tau'} & \frac{\partial b_3}{\partial \tau'} & \frac{\partial c_4}{\partial \tau'} & \frac{\partial d_3}{\partial \tau'} \end{vmatrix}$$

3. ($N = 4$. joint with Hayashida) $\Gamma_0^\chi(4)$ については

$$M(\Gamma_0^\chi(4)) = \mathbb{C}[f_1, g_2, h_2, f_3] \oplus f_{11}\mathbb{C}[f_1, g_2, h_2, f_3]$$

ここで f_1, g_2, h_2, f_3 はそれぞれウェイト $1, 2, 2, 3$ の代数的独立な $M_k(\Gamma_0^\chi(4))$ の元である。また f_{11} は次で与えられる。

$$f_{11} = \begin{vmatrix} f_1 & 2g_2 & 2h_2 & 3f_3 \\ \frac{\partial f_1}{\partial \tau} & \frac{\partial g_2}{\partial \tau} & \frac{\partial h_2}{\partial \tau} & \frac{\partial f_3}{\partial \tau} \\ \frac{\partial f_1}{\partial z} & \frac{\partial g_2}{\partial z} & \frac{\partial h_2}{\partial z} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \\ \frac{\partial f_1}{\partial \tau'} & \frac{\partial g_2}{\partial \tau'} & \frac{\partial h_2}{\partial \tau'} & \frac{\partial f_3}{\partial \tau'} \end{vmatrix}$$

4. 最近 $n = 2$ の $\Gamma(3)$ の graded ring が Freitag と Salvati Manni により具体的に決定された (cf. [16].). これとは全く独立に軍司圭一氏は、 $\Gamma(3)$ の低いウェイトに対する次元（これは知られていなかったし、その決定は全然やさしくない）とその保型形式を構成した (cf. [17]). 証明法はいずれも有限群の指標表を用いて低いウェイトの保型形式のなすベクトル空間への作用の候補を決め、これにより次元も決定すると言う点では似ているが、Freitag-Salvati Manni は $Sp(2, \mathbb{F}_3)/\{\pm 1\}$ を用いており、軍司は $Sp(2, \mathbb{F}_3)$ 自身を用いている。

Paramodular group of level two and three:

level 2: Freitag [9], Ibukiyama-Onodera [20]

level 3: Tobias Dern [5].

Half integral weights of $\Gamma_0(4)$:

これは Hayashida and Ibukiyama の結果がある。

$n = 3$,

露峰氏は7つの代数的に独立な元上の加群として記述。これにより次元などがわかった。手法は特定の因子 (hyper-elliptic locus) 上で消えるものとそれ以外に分けるという点では Hammond-Freitag 流に似ている。しかし環構造が分かっているとまではいえない。Bernhard Runge は8個の第2種テータ定数 $f_a(Z) = \theta_m(2Z)$ を用いて $\bigoplus_{k=0}^{\infty} M_{4k}(\Gamma(2, 4))$ を記述。ポイントはこの環が正規なことの証明にある。Freitag-Hunt [15] による簡易化も知られている。8個の元の Relation は具体的にわかっている。しかしこれもまた環構造が分かっているとまでは言えない。ちなみにこの環は Cohen Macauley であることが Runge により注意されている。次数2 index 1 の Γ_2 の Jacobi 形式の空間はわかっている。(Hayashida and Ibukiyama). これと次数3のジーゲル保型形式環はある意味で「近い」のではないかと思う。

$n = 4$

第2種テータの間の relation が一部 Freitag-Oura によりわかっている。これがたとえば Riemann relation などから出るのかどうかはわかっていないと思う。いずれにせよ、環の記述にはほど遠い。与えられたウェイトの保型形式の次元も少数の小さいウェイトを除き、まったく分かっていない。

4 おまけ

Cris Poor 氏は、ここ10年以内に $Sp(4, \mathbb{Z})$ に関する(次数4の)保型形式環が具体的に決定されるであろうと意見を述べた。full modular については次元公式などは全く出来ていないわけであるが、心は Jacobian locus, hyperelliptic locus etc. の使用であろう。本人がやるという意味であろうか? 一方で、たとえば Hilbert-Siegel 保型形式や4元数体から決まるジーゲル保型形式についての具体的な結果は次数2でさえ全く見たことがない(埋め込みで考えるなら次数4のジーゲル保型形式になるからであろうか。) 3次体の普通の Hilbert 保型形式は3次のジーゲル保型形式に埋め込めるし、3次のジーゲル保型形式は一応分かっているとも言えるので、この環を具体的に決めるのは、とりあえず到達可能な問題かもしれない。

5 文献

文献は完全を期したものではない。研究集会全体のための文献表を発表者全員で用意したが、すでに個別の記事で引用されているので、ここでは、ジーゲル保型形式関係と 1 変数関係のみを載せることにする。

参考文献

- [1] Ecole Normale Supérieure, Séminaire Henri Cartan 10^e année 1957/1958, Fonctions Automorphes, Secrétariat mathématique 11 rue Pierre Curie, Paris 5, 1958.
- [2] H. Aoki and T. Ibukiyama, Siegel modular forms of small levels and differential operators, preprint.
- [3] W. L. Baily Jr.; A. Borel, Compactification of arithmetic quotients of bounded symmetric domains. Ann. of Math. (2) 84 1966 442–528.
- [4] S. Boecherer, Siegel Modular Forms and Theta Series, Proc. Symp. Pure Math. 49 (1989), Part 2, 3–17.
- [5] T. Dern, Hermitesche Modulformen zweiten Grades, Verlag Mainz, Wissenschaftsverlag, Aachen, 2001. "D82" Diss. RWTH Aachen. ISBN 3-89653-890-x. Süsterfeldstr. 83, 52072 Aachen.
- [6] W. Eholzer and T. Ibukiyama, Rankin-Cohen type differential operators and Siegel modular forms, Internat. J. Math. 9 (1998), 443–463.
- [7] M. Eichler, Über die Anzahl der linear unabhängigen Siegelschen Modulformen von gegebenem Gewicht, Math. Ann. 213(1975), 281 – 291. Erratum: Math. Ann. 215, 195(1975).
- [8] E. Freitag, Modulformen zweiten Grades zum rationalen und Gausschen Zahlkörper. S.-B. Heidelberger Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. 1967(1967), 3–49
- [9] E. Freitag, Zur theorie der Modulformen zweiten Grades. Nachr. Akad. Wiss. Gottingen Math.-Phys. Kl. II (1965), 151–157.

- [10] E. Freitag, Stabile Modulformen. Math. Ann. 230 (1977), no. 3, 197–211.
- [11] E. Freitag, Lokale und globale Invarianten der Hilbertschen Modulgruppe, Invent. Math. 17(1972), 106 – 134.
- [12] E. Freitag, Stabile Modulformen. (German) Math. Ann. 230 (1977), no. 3, 197–211
- [13] E. Freitag, Siegelsche Modulfunktionen. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 254. Springer-Verlag, Berlin, 1983. x+341 pp. ISBN: 3-540-11661-3.
- [14] E. Freitag, Hilbert Modular Forms, Springer-Verlag 1990. 250 pp. Berlin Heidelberg New York London Paris Tokyo Hong Kong.
- [15] E. Freitag and B. Hunt, A. Remark on a theorem of Runge, Archiv Math. 70(1998), 464 – 469.
- [16] E. Freitag and R. Salvati Manni, preprint, 2002.
- [17] K. Gunji, preprint, 2002. (2 0 0 1 年度東京大学修士論文)
- [18] W. Hammond, On the graded ring of Siegel modular forms of genus two, Amer. J. Math. 87(1965), 502 – 506.
- [19] T. Ibukiyama, On Siegel modular varieties of level 3. Internat. J. Math. 2 (1991), no. 1, 17–35.
- [20] T. Ibukiyama and F. Onodera, On the graded ring of modular forms of the Siegel paramodular group of level 2. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 67 (1997), 297–305.
- [21] T. Ibukiyama, On Differential operators on automorphic forms and invariant pluri-harmonic polynomials, Commentarii Math. Univ. St. Pauli, 48(1999), 103–118.
- [22] T. Ibukiyama, Vector valued Siegel modular forms of symmetric tensor representation of degree two, preprint.

- [23] T. Ibukiyama, Vector valued Siegel modular forms of $\mathrm{Sym}(4)$ and $\mathrm{Sym}(6)$, preprint. (上とあわせる予定)
- [24] T. Ibukiyama and H. Aoki, Siegel modular forms of small levels and differential operators, preprint.
- [25] J. Igusa, On Siegel modular forms of genus two. Amer. J. Math. 84 (1962), 175–200.
- [26] J. Igusa, On Siegel modular forms genus two. II. Amer. J. Math. 86 (1964), 392–412.
- [27] J. Igusa, On the graded ring of theta-constants. Amer. J. Math. 86 (1964), 219–246.
- [28] J. Igusa, On the graded ring of theta-constants. II. Amer. J. Math. 88 1966 221–236.
- [29] J. Igusa, Modular forms and projective invariants. Amer. J. Math. 89 1967 817–855.
- [30] J. Igusa, On the variety associated with the ring of Thetanullwerte, Amer. J. Math. 103(1981), 377–398.
- [31] J. Igusa, Theta Functions, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band 194, Springer Verlag 1972.
- [32] C. Poor and D. Yuen, Linear dependence among Siegel modular forms. Math. Ann. 318 (2000), no. 2, 205–234.
- [33] B. Runge, On Siegel modular forms. I. J. Reine Angew. Math. 436 (1993), 57–85.
- [34] B. Runge, On Siegel modular forms. II. Nagoya Math. J. 138 (1995), 179–197.
- [35] B. Runge, Codes and Siegel modular forms. Discrete Math. 148 (1996), no. 1-3, 175–204.

- [36] R. Salvati Manni, On the not integrally closed subrings of the ring of Thetanullwerte II, *J. reine angew. Math.* 372(1986), 64–70.
- [37] C. L. Siegel, Einführung in die Theorie der Modulfunktionen n-ten Grades, *Gesammelte Abhandlungen Band II*, 97 – 137. (*Math. Ann.* 116(1939), 617 – 657.
- [38] T. Shioda, On the graded ring of invariants of binary octavics. *Amer. J. Math.* 89 (1967), 1022–1046.
- [39] S. Tsuyumine, On Siegel modular forms of degree three. *Amer. J. Math.* 108 (1986), no. 4, 755–862. Addendum to: "On Siegel modular forms of degree three". *Amer. J. Math.* 108 (1986), no. 4, 1001–1003
- [40] S. Tsuyumine, On the Siegel modular function field of degree three. *Compositio Math.* 63 (1987), no. 1, 83–98.
- [41] E. Freitag, Some modular forms related to cubic surfaces, *Manuskripte der Forschergruppe Arithmetik, Mannheim and Heidelberg*, Nr. 21(1999).
- [42] E. Freitag and C. F. Hermann, Some varieties of low dimension, *Advances Math.* 152(2000), 203 – 287.
- [43] Daniel Allcock and Eberhard Freitag, Cubic surfaces and Borcherds products *Manuskripte der Forschergruppe Arithmetik, Mannheim and Heidelberg*, Nr. 4(2000).
- [44] E. Freitag, A graded algebra related to cubic surfaces, preprint, 2000.
- [45] B. Runge, On Picard modular forms, *Math. Nachr.* 184(1997), 259 – 273.

1 変数保型形式のなす環

参考文献

- [1] E. Bannai, A remark on modular forms, joint work with Koike, Munemasa, Sekiguchi, report in RIMS 1999(in Japanese).
- [2] E. Bannai, M. Koike, A. Munemasa and J. Sekiguchi, Klein's icosahedral equation and modular forms, preprint, 1999.
- [3] Y. Hasegawa and K. Hashimoto, Hyperelliptic modular curves $X_0^*(N)$ with square-free levels. Acta Arith. 77 (1996), no. 2, 179–193.
- [4] Y. Hasegawa and M. Shimura, Trigonal modular curves. Acta Arith. 88 (1999), no. 2, 129–140.
- [5] K. Hashimoto, Explicit form of quaternion modular embeddings. Osaka J. Math. 32 (1995), no. 3, 533–546.
- [6] K. Hashimoto and N. Murabayashi, Shimura curves as intersections of Humbert surfaces and defining equations of QM-curves of genus two. Tohoku Math. J. (2) 47 (1995), no. 2, 271–296.
- [7] T. Hibino and N. Murabayashi, Modular equations of hyperelliptic $X_0(N)$ and an application. Acta Arith. 82 (1997), no. 3, 279–291.
- [8] T. Ibukiyama, Modular forms of rational weights and modular varieties, Abhand. Math. Semi. Univ. Hamburg 70. (2000), 315–339.
- [9] T. Ibukiyama, Graded rings of modular forms of rational weights of level 11 and 13. Proceedings of the Workshop on Number Theory 2001, Institute of Math. Waseda Univ. (2001), 104–113.
- [10] A. Kurihara, On some examples of equations defining Shimura curves and the Mumford uniformization. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 25 (1979), no. 3, 277–300.
- [11] N. Murabayashi, On normal forms of modular curves of genus 2. Osaka J. Math. 29 (1992), no. 2, 405–418.

- [12] C. Poor and D. Yuen, Generators for $M_1(\Gamma_0(l))$, preprint 2001.
- [13] Mahoro Shimura, Defining equations of modular curves $X_0(N)$.
Tokyo J. Math. 18 (1995), no. 2, 443–456.
- [14] Van der Geer and Don Zagier, The Hilbert modular group for the
field $\mathbb{Q}(\sqrt{13})$. Invent. Math. 42(1977), 93 – 133.

Tomoyoshi Ibukiyama
 Department of Mathematics
 Graduate School of Science
 Machikaneyama 1-16,
 Toyonaka, Osaka, 560-0043 Japan
 ibukiyam@math.wani.osaka-u.ac.jp