

和音のトポロジーについての解説

3和音と4和音のトポロジーについて、その違いとして、次の2つが挙げられます。

(i) 3和音のときは、3角形という平面図形をくっつけるので、曲面になるが、4和音のときは(中身のつまった)立体をくっつけるので、(中身のつまった)立体図形になる。

(ii) 3和音のときはメビウスの帯という「向きづけが不可能な図形(裏と表の区別ができない図形)」なのに対して、4和音のときはドーナツ(ソリッドトーラス)という「向きづけが可能な図形(1周して戻ってきたとき右手が左手になっているようなことはない)」になる。

(i) は頂点が増えて次元が上がるということで、特に不思議なことではありませんので、(ii) について解説しておきましょう。

以下、ドレミファソラシドというのはファの部分を書きにくいので、

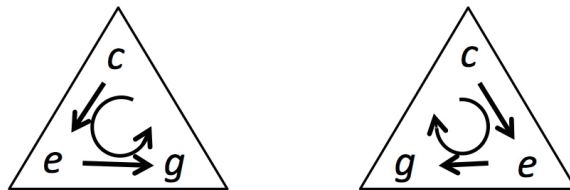
ド $\mapsto c$, レ $\mapsto d$, ミ $\mapsto e$ ファ $\mapsto f$, ソ $\mapsto g$, ラ $\mapsto a$, シ $\mapsto b$

とアルファベットで書き直します。大文字を使わないのは、和音と区別をしやすいするためです。

さて、八長調の3和音は、

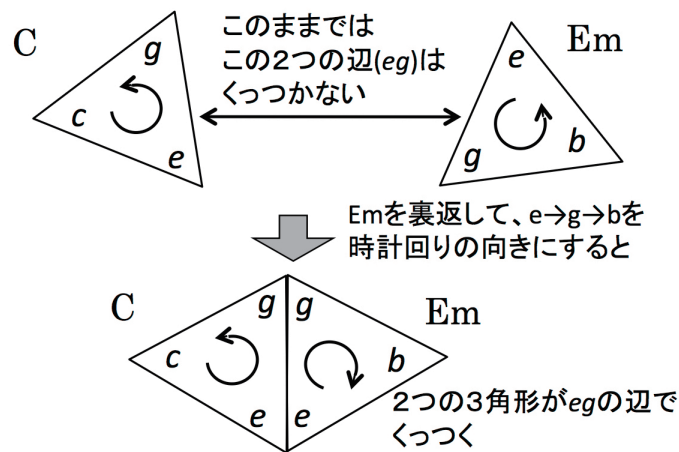
C(*ceg*)、Dm(*dfa*)、Em(*egb*)、F(*fac*)、G(*gbd*)、Am(*ace*)、Bm(*b5*)(*bd \bar{f}*)

の7つです。Cの和音(*ceg*、ドミソ)の*c, e, g*の音を3角形の頂点に割り当てるときに、 $c \rightarrow e \rightarrow g$ の順番にたどると、反時計回りとなる場合と時計回りになる場合があります。頂点に音の名前をつけると、反時計回りか時計回りの向きが定まることとなります。



(線形代数学の行列式の定義のところ「置換」のことを学んだ人は、偶置換と奇置換について思い出してください。反時計回りのものを偶置換で順番を入れ替えると、もと同じ反時計回りになり、奇置換で順番を入れ替えると、もとは逆の時計回りになります。)

さて、 C の eg の辺とつながるのは E_m の eg の辺ですが、ここで、つなげるときに注意することがあります。 C の ceg が反時計回りの向きになるように頂点に割り当てられているとき、 E_m の egb に同じ反時計回り ($e \rightarrow g \rightarrow b$ が反時計回り) の向きになるように頂点に割り当てられていると、そのままでは e と g の頂点が合うように2つの3角形がくっつかないのです。そこで、くっつけるためには E_m の3角形を裏返して e と g の位置を合わせなければなりません。このとき、 E_m の egb には時計回りの向きがつくことになります。

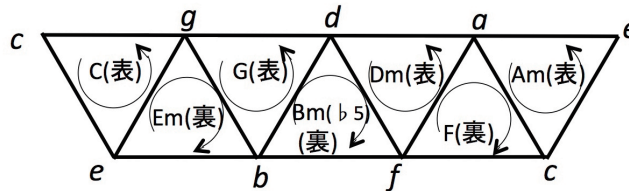


他の和音にもそれぞれ $D_m(d \rightarrow f \rightarrow a)$ 、 $F(f \rightarrow a \rightarrow c)$ 、 $G(g \rightarrow b \rightarrow d)$ 、 $A_m(a \rightarrow c \rightarrow e)$ 、 $B_m(b \rightarrow d \rightarrow f)$ の順番を考えておくと、3角形の頂点に音を割り当てたときに向きがつかますが、それが反時計回りの向きの際に「表面」、時計回りの際に「裏面」ということにします。上の E_m の例でわかるように、反時計回りの「表面」をひっくり返すと時計回りの「裏面」になります。 C と E_m をくっつけるときには、「表面」と「表面」をそのままでは頂点が合うようにくっつけることができず、 E_m を裏返して、 C の「表面」と E_m の「裏面」を eg の辺でくっつけたわけです。同様に

Em と G の gb 、G と Bm(b5) の bd 、Bm(b5) と Dm の df 、
Dm と F の fa 、F と Am の ac 、Am と C の ce

をくっつけるときにも「表面」と「表面」、あるいは「裏面」と「裏面」のままでは頂点を合わせてくっつけることができません。必ず、片方が「表面」ならもう一方は「裏面」のときに頂点を合わせてくっつけることができます。

こうして、最初の C を「表面」にしてそれ以下の和音をくっつけていくと下のようになります。



最後に、Am の ce と C の ce をくっつけるわけですが、頂点を合わせるには「表面」と「裏面」でなければならず、どちらかを裏返してくっつけなければなりません。こうしてメビウスの帯ができるわけです。

つまり、

- 2つの共通する2音がある和音をくっつけるとき、2頂点を合わせるには「表面」と「裏面」にしなければならない(「表面」と「表面」、あるいは「裏面」と「裏面」では2頂点を合わせてつけることはできない)。
- 和音は C、Dm、Em、F、G、Am、Bm(b5) の7個で、7が奇数である。

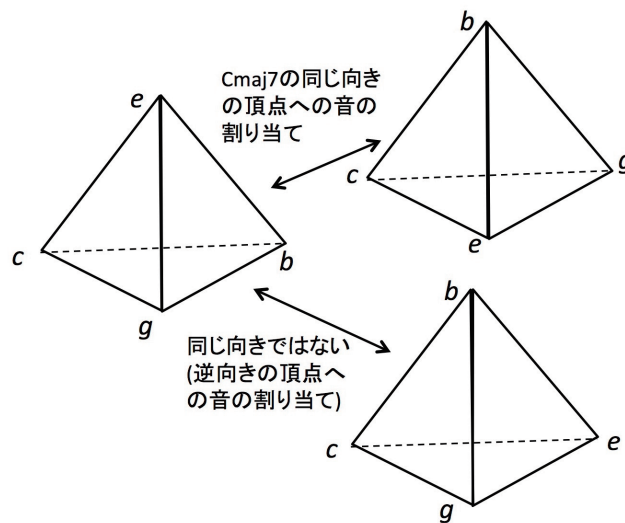
ということからメビウスの帯ができるわけです。

次に4和音の場合を考えてみましょう。

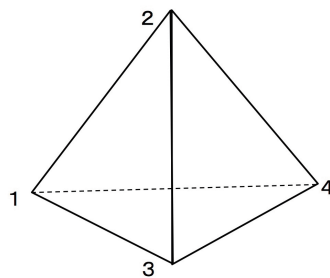
4和音の場合、

Cmaj7(ceg b)、Dm7(df ac)、Em7(eg bd)、Fmaj7(f ace)、G7(gb df)、
Am7(ac eg)、Bm7(b5)(bd fa)

の7個の和音です。正4面体を考え、1つの和音に対し、正四面体の頂点に1つずつ音を割り当てていくとき、合計 $4! = 24$ 通りの音の割り当て方があるわけですが、このうち回転して合わせることができるものを「同じ向き」の頂点への音の割り当てということにしましょう。回転して合わせることができるものは同じと考えると、2種類の頂点への音の割り当て方があり、これを4面体の向きということにします。



さて、7つの4和音すべてについて、上の和音の書いている音を前から順番に下図の1, 2, 3, 4につけていきましょう。



例えば、Cmaj7なら $c \rightarrow 1, e \rightarrow 2, g \rightarrow 3, b \rightarrow 4$ 、Em7なら $e \rightarrow 1, g \rightarrow 2, b \rightarrow 3, d \rightarrow 4$ 、です。このようにして7つの4面体にそれぞれに7つの和音の音を割り当てていきます。

3和音のときとちがって、4和音のときは、このようにして音を割り当てると、向きを変えることなく Cmaj7 の egb の3角形と Em の egb の3角形をくっつけることができます(回転はしてよい)。

そのまま、
Em7 と G7 の *gbd*、G7 と Bm7(b5) の *bdf*、Bm7(b5) と Dm7 の *dfa*、
Dm7 と Fmaj7 の *fac*、Fmaj7 と Am7 の *ace*、Am7 と Cmaj7 の *ceg*
をくっつけていくことができます。最後につけるところは硬い4面体の
ままでは無理なのですが、ゴムや粘土のようなやわらかくてのばしたり
縮めたりすることができる素材であれば、つけることができ、ドーナツ
(ソリッドトーラス) が出来上がるわけです。

以上が和音をつなげて作る図形の3和音のときのメビウスの帯と4和
音のときのドーナツ(ソリッドトーラス)の「向き」に関する説明ですが、
ホモロジー群を勉強した人、あるいはこれから勉強する人に向けて、別
のところに補足の説明をつけておきます。

(原 靖浩)