Hom 複体が与えるグラフの彩色数の下界について

松下尚弘 (東京大学)

Abstract. 単純グラフ G に対し，辺で結ばれている頂点では異なるように，G の頂点に色を与えることを G の彩色という．G の彩色に必要な色の個数を G の彩色数といい，$\chi(G)$ で表す．

Hom 複体とは，二つのグラフ T, G に対して定義される CW 複体であり，$\mathrm{Hom}(T,G)$ で表す．任意のグラフ G に対し，

$$\chi(G) > \mathrm{conn}(\mathrm{Hom}(T,G)) + \chi(T)$$

なる不等式が成り立つとき，T をホモトピーテストグラフであるという．ここで，$\mathrm{conn}(X)$ は，位相空間 X が n-連結となる最大の (-1) 以上の整数（ただし $X = \emptyset$ のときは $-\infty$ とする）である．ホモトピーテストグラフの例としては，$n \geq 2$ に対する完全グラフ K_n (Lovász, Babson- Kozlov) や，奇数次のサイクル C_{2r+1} (Babson-Kozlov) などが知られている．

しかし $T = K_2$ のときは，ホム複体の与える彩色数の下限と，実際の彩色数とが一致しない例が知られている．特に Walker は 1983 年の論文において,「任意の正の整数 n に対し，上記の下界と，G の彩色数が n 以上差がある G の例」や「$\mathrm{Hom}(K_2, G)$-複体がホモトピー同値だが，彩色数が 1 異なる例」を発見している．

本講演では，上の Walker の結果を，以下のように一般化することを考える．任意の有限グラフ T と，彩色数が 3 以上のグラフ G，および任意の整数 n に対して，G を部分グラフとして含む H であって，以下の二つの性質を満たすものが存在する．一つの性質は包含 $\mathrm{Hom}(T,G) \to Hom(T,H)$ がホモトピー同値であること，もう一つは H の彩色数が n より大きいことである．特に任意の有限グラフ T に対して，$\mathrm{Hom}(T,G)$ のホモトピー不変量は G の彩色数の上界を与えないことがこのことからわかる．