有限体上の一般線形群の非等標数モジュラー表現論
（第１章〜第７章）

有木　進
（大阪大学情報科学研究科）

注：平成 22 年度 7 月現在の原稿（全８章）

目　次

第 1 章
一般線形群の導入とその群論的基本性質

1.1 線形代数群

可逆な複素行列全体のなす集合 $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ を考えよう．G は行列の積により群であり，しかも C^ω 多様体でもある．そして積写像 $(g,h) \in G \times G \mapsto gh \in G$ および逆元を与える写像 $g \in G \mapsto g^{-1} \in G$ はともに C^ω 写像である．このように，群構造を備えた C^ω 多様体を Lie 群というのであった．そして，適当な n を選べば $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の閉部分群として実現できる Lie 群をとくに線形 Lie 群というのであった．C^ω 多様体の代わりに代数多様体で考えると代数群が得られる．すなわち，代数群とは一言でいえば群構造を備えた代数多様体のことである．

代数幾何の初歩で習うように，$\mathbb{E}$ 上定義された affine 代数多様体は可換 $\mathbb{E}$-代数の言葉で記述できる．すなわち $\mathbb{E}$ 上有限生成な可換 $\mathbb{E}$-代数 R を用いて，$X = \operatorname{Spec} R$ と書ける．そして，今 $\mathbb{E}$ が代数閉体であることより $X(\mathbb{E}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{E}\text{-alg}}(R, \mathbb{E})$ が古典的な意味での多様体と対応するのであった．さて，affine 代数多様体 $G = \operatorname{Spec} R$ が代数群になっているとしよう．すると，G に群構造が載っていることに対応して R に上部構造が載ることとなる．具体的には Hopf 代数構造が載る．かくして線形代数群は可換 $\mathbb{E}$-Hopf 代数の言葉で記述されることとなる．以下ではこのような考え方のもとに一般線形群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{E})$ を導入する．

定義 1.1　L を体とする．（可換とは限らない）L-代数 H が **Hopf 代数**で

あるとは,

- L-代数準同型 $\varDelta : H \to H \boxtimes_L H$
- L-代数準同型 $\varepsilon : H \to L$
- 反自己準同型 $S : H \to H$

が与えられていて，次を満たすときをいう．

(1) $(\varDelta \boxtimes \mathrm{Id}) \circ \varDelta = (\mathrm{Id} \boxtimes \varDelta) \circ \varDelta$

(2) $(\varepsilon \otimes \mathrm{Id}) \circ \varDelta = (\mathrm{Id} \otimes \varepsilon) \circ \varDelta = \mathrm{Id}$

(3) $(S \otimes \mathrm{Id}) \circ \varDelta = (\mathrm{Id} \otimes S) \circ \varDelta = \eta \circ \varepsilon$

ここで $\eta : L \hookrightarrow H$ は $\lambda \mapsto \lambda \cdot 1_H$ で定めた係数体の埋めこみ写像，$\boxtimes$ は普通のテンソル積を，$\otimes$ は $\boxtimes$ と積との合成を表す．また，$H \boxtimes_L H$ は

$$(h_1 \boxtimes h_1')(h_2 \boxtimes h_2') = h_1 h_2 \boxtimes h_1' h_2'$$

により L-代数である．

より具体的には，$h \in H$ に対して $\varDelta(h) = \sum_{i=1}^{n} h_i^{(1)} \boxtimes h_i^{(2)}$ と書くと，

(1) $\sum_{i=1}^{n} \varDelta(h_i^{(1)}) \boxtimes h_i^{(2)} = \sum_{i=1}^{n} h_i^{(1)} \boxtimes \varDelta(h_i^{(2)}) \in H \boxtimes_L H \boxtimes_L H$

(2) $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon(h_i^{(1)}) h_i^{(2)} = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon(h_i^{(2)}) h_i^{(1)} = h$

(3) $\sum_{i=1}^{n} S(h_i^{(1)}) h_i^{(2)} = \sum_{i=1}^{n} h_i^{(1)} S(h_i^{(2)}) = \varepsilon(h) 1_H$

である．$\varDelta$ は coproduct，ε は counit，S は antipode とよばれる．antipode に関する仮定はもっと弱く $\mathbb{E}$-線型写像としてもよい．この弱い仮定のもとでも必然的に反自己準同型にならざるを得ないことが証明できる．

補題 1.1　$\mathbb{E}[\mathrm{GL}_n] := \mathbb{E}[\{X_{ij}\}_{1 \le i,j \le n}, \dfrac{1}{\det X}]$ とおき，$\varDelta_{ij}$ を不定元 X_{ij} を成分とする行列 $X = (X_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ の (i,j)-余因子とする．すなわち X から i 行目と j 列目を除いて得られる小行列式を D_{ij} として $\varDelta_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ji}$ である．このとき，

$$\Delta(X_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} X_{ik} \boxtimes X_{kj}, \quad \varepsilon(X_{ij}) = \delta_{ij}, \quad S(X_{ij}) = \frac{1}{\det X}\Delta_{ij}$$

により $\mathbb{E}[\mathrm{GL}_n]$ に可換 Hopf 代数の構造が一意的に定まる．

証明　線形代数を思い出せば，$\sigma \in S_n$ の転倒数

$$\gamma(\sigma) = |\{(i,j) \mid i < j,\ \sigma(i) > \sigma(j)\}|$$

を用いて $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^{\gamma(\sigma)}$ とおけば，S_n の 1 次元表現 $\mathrm{sgn} : S_n \to \{\pm 1\}$ が定まり，行列式が

$$\det X = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) X_{1\sigma(1)} \cdots X_{n\sigma(n)}$$

と定義されたのであった．$\Delta(X_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} X_{ik} \boxtimes X_{kj}$ と定めると，

$$\Delta : \mathbb{E}[\{X_{ij}\}_{1 \le i,j \le n}] \to \mathbb{E}[\mathrm{GL}_n] \boxtimes_{\mathbb{E}} \mathbb{E}[\mathrm{GL}_n]$$

がただ 1 通りに定義されて，

$$\Delta(\det X) = \sum_{k_1,\cdots,k_n=1}^{n} X_{1k_1} \cdots X_{nk_n} \boxtimes \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) X_{k_1\sigma(1)} \cdots X_{k_n\sigma(n)}$$

であるが，

$$\sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) X_{k_1\sigma(1)} \cdots X_{k_n n\sigma(n)} = \begin{vmatrix} X_{k_1 1} & \cdots & X_{k_1 n} \\ & \cdots & \\ X_{k_n 1} & \cdots & X_{k_n n} \end{vmatrix}$$

つまり，X の $k_1, \cdots, k_n$ 行目を並べて作った行列式であることに注意すると，$k_1, \cdots, k_n$ が相異なるとき以外は上の和に寄与せず，相異なるときは唯一の $\tau \in S_n$ が存在して $k_i = \tau(i)$ $(1 \le i \le n)$ と書けて

$$\sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) X_{k_1\sigma(1)} \cdots X_{k_n n\sigma(n)} = \mathrm{sgn}(\tau) \det X$$

として寄与する．よって，

$$\Delta(\det X) = \sum_{\tau \in S_n} \mathrm{sgn}(\tau) X_{1\tau(1)} \cdots X_{n\tau(n)} \boxtimes \det X = \det X \boxtimes \det X.$$

ゆえに，$\Delta(\dfrac{1}{\det X}) = \dfrac{1}{\det X} \boxtimes \dfrac{1}{\det X}$ と定義する以外なく，このとき

$$\Delta : \mathbb{E}[\mathrm{GL}_n] \to \mathbb{E}[\mathrm{GL}_n] \boxtimes \mathbb{E}[\mathrm{GL}_n]$$

が well-defined になる．

同様に $\varepsilon(\dfrac{1}{\det X}) = 1$ と定義する以外なく，$\varepsilon : \mathbb{E}[\mathrm{GL}_n] \to \mathbb{E}$ がただ 1 通りに定義されて well-defined.

逆行列の公式より $S(X_{ij})$ は $Y := X^{-1}$ の (i, j) 成分であるから，

$$S(\det X) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) Y_{n\sigma(n)} \cdots Y_{1\sigma(1)} = \det Y = \frac{1}{\det X}.$$

ゆえに，$S(\dfrac{1}{\det X}) = \det X$ と定義する以外なく，$S : \mathbb{E}[\mathrm{GL}_n] \to \mathbb{E}[\mathrm{GL}_n]$ もただ 1 通りに定義されて well-defined である．

さて，$\mathbb{E}[\mathrm{GL}_n]$ が Hopf 代数であることを示すには $h = X_{ij}$ に対して公理 (1)(2)(3) を確かめれば十分であるが，公理 (1)(2) は定義より明らかで，公理 (3) は逆行列の公式に他ならない． □

補題 1.2　L を体とし，L-代数 H が Hopf 代数，R を可換 L-代数とする．このとき，$G(R) := \mathrm{Hom}_{L\text{-alg}}(H, R)$ は次の積により群である．

$$\varphi\psi := (\varphi \otimes \psi) \circ \Delta \quad (\varphi, \psi \in G(R))$$

証明　$\varepsilon : H \to L$ を $h \mapsto \varepsilon(h)1_R$ により $H \to R$ とみなし，ε が $G(R)$ の単位元であることを示す．実際，$\varphi \in G(R)$ に対し

$$\varphi\varepsilon = (\varphi \otimes \varepsilon) \circ \Delta = \varphi \circ (\mathrm{Id} \otimes \varepsilon \circ \Delta) = \varphi$$

より明らか．同様に $\varepsilon\varphi = \varphi$ である．

次に結合則が成立することを示す．

$$(\varphi_1\varphi_2)\varphi_3 = ((\varphi_1 \otimes \varphi_2) \circ \Delta \otimes \varphi_3) \circ \Delta$$

$$= (\varphi_1 \otimes \varphi_2 \otimes \varphi_3) \circ (\Delta \boxtimes \mathrm{Id}) \circ \Delta$$
$$= (\varphi_1 \otimes \varphi_2 \otimes \varphi_3) \circ (\mathrm{Id} \boxtimes \Delta) \circ \Delta$$
$$= (\varphi_1 \otimes (\varphi_2 \otimes \varphi_3) \circ \Delta) \circ \Delta = \varphi_1(\varphi_2\varphi_3).$$

最後に逆元の存在を示す．$\varphi \in G(R)$ に対して，φ^{-1} を合成 $H \xrightarrow{S} H \xrightarrow{\varphi} R$ で定めると，φ が L-代数準同型，R が可換であることより

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}(h_1h_2) &= \varphi(S(h_2)S(h_1)) = \varphi(S(h_2))\varphi(S(h_1)) \\ &= \varphi^{-1}(h_2)\varphi^{-1}(h_1) = \varphi^{-1}(h_1)\varphi^{-1}(h_2)\end{aligned}$$

が成り立つ．したがって $\varphi^{-1} \in G(R)$ である．ここで可換図式

$$\begin{tikzcd} \varphi\otimes\varphi : H \boxtimes H \arrow[r] \arrow[d, "積"'] & R \\ H \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

が成り立つので，

$$\begin{aligned}\varphi\varphi^{-1} &= (\varphi \otimes \varphi^{-1}) \circ \Delta = (\varphi \otimes \varphi) \circ (\mathrm{Id} \boxtimes S) \circ \Delta \\ &= \varphi((\mathrm{Id} \otimes S) \circ \Delta) = \varphi(\eta \circ \varepsilon) \\ &= \varepsilon : H \to L \hookrightarrow R.\end{aligned}$$

同様に $\varphi^{-1}\varphi = \varepsilon$ が成立する． □

補題 1.3 R を可換 $\mathbb{E}$-代数とする．$\varphi \in \mathrm{GL}_n(R) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{E}\text{-alg}}(\mathbb{E}[\mathrm{GL}_n], R)$ に $(\varphi(X_{ij}))_{1\le i,j\le n}$ を対応させることにより，$\mathrm{GL}_n(R)$ を R 成分の n 次可逆行列の全体と同一視できる．このとき，$\mathrm{GL}_n(R)$ の積は行列の積に他ならない．

証明 $\Phi(\varphi) := (\varphi(X_{ij}))_{1\le i,j\le n}$ とすると，

$$\Phi(\varphi\psi)_{ij} = \varphi\psi(X_{ij}) = (\varphi \otimes \psi) \circ \Delta(X_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} \Phi(\varphi)_{ik}\Phi(\psi)_{kj}$$

であるから，$\Phi(\varphi\psi) = \Phi(\varphi)\Phi(\psi)$．また，$\Phi(\varepsilon)$ が単位行列であることと $\varphi\varphi^{-1} = \varepsilon$ に注意すれば，$\Phi(\varphi)$ は可逆行列である．よって，Φ は $\mathrm{GL}_n(R)$ から R 成分

n 次可逆行列の全体がなす群への群準同型を定める．R 成分 n 次可逆行列 C が与えられたとき，$\varphi(X_{ij}) = c_{ij}$ と定めることにより $\Phi(\varphi) = C$ となる $\varphi \in \mathrm{GL}_n(R)$ がただひとつ存在するので，この準同型は全射かつ単射である．　□

定義 1.2　$\mathbb{E}$ 上有限生成である $\mathbb{E}$-代数 $\mathbb{E}[G]$ が可換 Hopf 代数のとき，$G(\mathbb{E}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{E}\text{-alg}}(\mathbb{E}[G], \mathbb{E})$ を $\mathbb{E}$ 上の**線形代数群**という．

$\mathbb{E}[G]$ を代数的な意味での $G(\mathbb{E})$ 上の関数環と思いたいわけであるが，Hilbert の零点定理より，$G(\mathbb{E})$ 上の関数 $f \in \mathbb{E}[G]$ が $G(\mathbb{E})$ 上の関数として恒等的に 0 であっても $f = 0$ とは限らず，$f = 0$ と結論できるためには $\mathbb{E}[G]$ が reduced である必要がある．つまりベキ零元が 0 に限るという仮定が必要である．

線形代数群という場合は，普通は $\mathbb{E}[G]$ が reduced であることを仮定する．たとえば，$\mathbb{E}[\mathrm{GL}_n]$ は整域であるから reduced である．

$\mathbb{E}[G]$ をそのベキ零根基で割った $\mathbb{E}[G]/\sqrt{0}$ で置きかえる操作により，$G(\mathbb{E})$ の位相群としての構造を変えることなく $\mathbb{E}[G]$ をいつでも reduced に改変することができる．

$\mathbb{E}[G]$ を reduced とし，$f \in \mathbb{E}[G]$ を $G(\mathbb{E})$ 上の関数と同一視しよう．$g \in G(\mathbb{E})$ に対し $g(f)$ を $f(g)$ と書くことにすれば，

- $\Delta(f) = \sum f_i^{(1)} \boxtimes f_i^{(2)}$ と書けば $f(g_1 g_2) = \sum f_i^{(1)}(g_1) f_i^{(2)}(g_2)$.
- $f(g^{-1}) = S(f)(g)$.
- $G(\mathbb{E})$ の単位元を 1_G と書けば，$\varepsilon(f) = f(1_G)$.

これらは補題 1.2 とその証明より明らかであるが，Hopf 代数構造を与える coproduct, counit, antipode の意味を明らかにする基本的な公式である．

次の補題のようにして Hopf 代数準同型が誘導する群準同型を線形代数群の準同型という．

補題 1.4　$G_1(\mathbb{E}), G_2(\mathbb{E})$ を線形代数群とする．Hopf 代数準同型

$$\varphi^\sharp : \mathbb{E}[G_2] \longrightarrow \mathbb{E}[G_1]$$

が存在するとき，$g \mapsto g \circ \varphi^\sharp$ により定めた写像

$$\varphi : G_1(\mathbb{E}) \longrightarrow G_2(\mathbb{E})$$

は群準同型である．

証明 任意の $f \in \mathbb{E}[G_2]$ に対し

$$\begin{aligned} f(\varphi(gh)) &= (g \otimes h) \circ \Delta_1 \circ \varphi^\sharp(f) \\ &= (g \otimes h) \circ \varphi^\sharp \circ \Delta_2(f) \\ &= (g \circ \varphi^\sharp) \otimes (h \circ \varphi^\sharp) \circ \Delta_2(f) \\ &= f(\varphi(g)\varphi(h)) \end{aligned}$$

より $\varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h)$ である．同様に

$$f(\varphi(g^{-1})) = g \circ S_1 \circ \varphi^\sharp(f) = g \circ \varphi^\sharp \circ S_2(f) = \varphi(g) \circ S_2(f) = f(\varphi(g)^{-1})$$

より $\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1}$ を得る．また $1_{G_1} = \varepsilon_1, 1_{G_2} = \varepsilon_2$ に注意すれば

$$f(\varphi(1_{G_1})) = \varepsilon_1 \circ \varphi^\sharp(f) = \varepsilon_2(f) = f(1_{G_2})$$

である．以上から φ は群準同型である． □

定義 1.3 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{E}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{E}\text{-alg}}(\mathbb{E}[\mathrm{GL}_n], \mathbb{E})$ を $\mathbb{E}$ 上の**一般線形群**という．

本節では Hopf 代数を用いて一般線形群を $\mathrm{Spec}\,\mathbb{E}[\mathrm{GL}_n]$ の $\mathbb{E}$ 値点のなす群と定義した．線形代数群 G の加群圏は有限次元 $\mathbb{E}[G]$-余加群のなす Abel 圏と定義され，一般線形群の表現論を $\mathbb{E}[\mathrm{GL}_n]$ を用いて展開できる．

この考え方の利点は，可換性をはずすことによっても同じ理論の枠組みで扱えることであり，実際このような考え方で $\mathbb{E}[\mathrm{GL}_n]$ の量子変形とよばれる E-代数 $\mathbb{E}_q[\mathrm{GL}_n]$ を導入して表現論が展開できる．ただし，補題 1.2 からもわかるように $\mathbb{E}[\mathrm{GL}_n]$ を $\mathbb{E}_q[\mathrm{GL}_n]$ に取り換えても $\mathbb{E}$ 値点のなす群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{E})$ が群でない代数に量子変形されるわけではない．量子変形されるのはあくまで関数環 $\mathbb{E}[\mathrm{GL}_n]$ とその双対 Hopf 代数である普遍包絡代数 $U(\mathfrak{gl}_n)$ である．

この量子変形 $\mathbb{E}_q[\mathrm{GL}_n]$ を考えることが有限体上の一般線形群の表現論を考えるにあたって非常に重要である．この点に少し触れて本節を終わりとしよう．

$\mathbb{E}[\mathrm{GL}_n]$ の中で X_{ij} の多項式部分だけを考え，$r \geq 0$ に対し r 次斉次部分

$\mathbb{E}[\mathrm{GL}_n](r)$ をとると，$\Delta(\mathbb{E}[\mathrm{GL}_n](r)) \subset \mathbb{E}[\mathrm{GL}_n](r) \boxtimes \mathbb{E}[\mathrm{GL}_n](r)$ であるから，$S(n,r) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{E}}(\mathbb{E}[\mathrm{GL}_n](r), \mathbb{E})$ は有限次元 $\mathbb{E}$ 代数である．$S(n,r)$ を Schur 代数と呼ぶ．Schur 代数は $U(\mathfrak{gl}_n)$ を用いても定義できる．

$\mathbb{E}_q[\mathrm{GL}_n]$ に対しても同様に考えよう．こうして定義されるのが量子化 Schur 代数（q-Schur 代数）である．$\mathfrak{gl}_n$ の量子化普遍包絡代数，つまり神保の意味での量子群，を用いて定義できるのも同様である．この q-Schur 代数の分解係数こそが次節で導入する Lie 型有限群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ の非等標数モジュラー表現論の分解係数を統制しているのであるが，残念ながら本書ではそこまで述べることができなかった．

q-Schur 代数の分解係数は q の位数を一定に保ちつつ ℓ を大きくすると一定の値で安定し，複素数体上で q を 1 のベキ根として考えたときの分解係数に一致する．この場合の q-Schur 代数は，偏屈層を用いた幾何的構成や，Fock 空間との関係，対称群に付随した有理 Cherednik 代数の圏 $\mathcal{O}$ との森田同値など，豊富な話題に満ち溢れている．

1.2　Frobenius 写像

本節では，本書の主題である有限体上の一般線形群を導入する．

定義 1.4　$\mathbb{E}$-代数 H が可換 Hopf 代数とする．H の $\mathbb{F}_q$-部分代数 H_0 が

(1) $\mathbb{E}$-代数として $H \cong H_0 \boxtimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{E}$
(2) $\Delta(H_0) \subseteq H_0 \boxtimes_{\mathbb{F}_q} H_0$
(3) $\varepsilon(H_0) \subseteq \mathbb{F}_q$
(4) $S(H_0) \subseteq H_0$

を満たすとき，H_0 を H の **$\mathbb{F}_q$-構造**という．このとき，

$$\sigma_q : H \cong H_0 \boxtimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{E} \to H_0 \boxtimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{E} \cong H$$

が $h_0 \boxtimes \lambda \mapsto h_0 \boxtimes \lambda^q$ により定義される．$G(\mathbb{E}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{E}\text{-alg}}(H, \mathbb{E})$ とおく．

$\mathbb{E}$-代数自己準同型 $F^{\#} : H \to H$ を $F^{\#} \circ \sigma_q(h) = h^q$ $(h \in H)$ で定め，

$$F : G(\mathbb{E}) \to G(\mathbb{E})$$

を $\varphi \mapsto \varphi \circ F^{\#}$ と定義する．このとき，F を $\mathbb{F}_q$-構造 H_0 から定まる**標準 Frobenius 写像**という．

$F^{\#}$ は H_0 上 q 乗写像であり，逆に H_0 上の q 乗写像は H_0 の $\mathbb{F}_q$-代数自己準同型であるから H の $\mathbb{E}$-代数自己準同型を定め，かつ $F^{\#} \circ \sigma_q(h) = h^q$ を満たす．よって，$\mathbb{F}_q$-構造 H_0 に対して $F^{\#}$ はかならずただひとつ存在する．

例 1.1　$H = \mathbb{E}[\mathrm{GL}_n]$ に対し，$H_0 = \mathbb{F}_q[\mathrm{GL}_n] := \mathbb{F}_q[\{X_{ij}\}_{1 \le i,j \le n}, \dfrac{1}{\det X}]$ とおくと，H_0 は H の $\mathbb{F}_q$-構造である．$\varphi \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{E}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{E}\text{-alg}}(H, \mathbb{E})$ に対して

$$F(\varphi)(X_{ij}) = \varphi(X_{ij}^q) = \varphi(X_{ij})^q$$

であるから，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{E})$ を $\mathbb{E}$ 成分 n 次可逆行列のなす群と思うとき Frobenius 写像は各成分を q 乗する写像である．

補題 1.5　$\mathbb{E}$-代数 H を可換 Hopf 代数とし，H_0 を H の $\mathbb{F}_q$-構造とする．このとき，H_0 から定まる標準 Frobenius 写像は群準同型である．

証明　coproductΔ に関して次の可換図式が成立する．

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r] \arrow[d, "F^{\#}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H \boxtimes_{\mathbb{E}} H \arrow[d, "F^{\#} \boxtimes F^{\#}"] \\ H \arrow[r] & H \boxtimes_{\mathbb{E}} H \end{tikzcd}$$

実際，H の代わりに H_0 で証明すればよく，$h \in H_0$ ならば $F^{\#}(h) = h^q$ より $\Delta \circ F^{\#}(h) = \Delta(h)^q \in H_0 \boxtimes H_0$．ここで，

$$\Delta(h) = \sum_i h_i^{(1)} \boxtimes h_i^{(2)} \quad (h_i^{(1)}, h_i^{(2)} \in H_0)$$

と書けば，$\Delta(h)^q = \sum_i {h_i^{(1)}}^q \boxtimes {h_i^{(2)}}^q$ より

$$\Delta(h)^q = F^{\#} \boxtimes F^{\#}(\sum_i h_i^{(1)} \boxtimes h_i^{(2)}) = (F^{\#} \boxtimes F^{\#}) \circ \Delta(h).$$

よって，$\Delta \circ F^{\#} = (F^{\#} \boxtimes F^{\#}) \circ \Delta$ を得る．ゆえに，

$$\begin{aligned}F(\varphi)F(\psi) &= ((\varphi \circ F^{\#}) \otimes (\psi \circ F^{\#})) \circ \Delta \\ &= (\varphi \otimes \psi) \circ (F^{\#} \boxtimes F^{\#}) \circ \Delta \\ &= (\varphi \otimes \psi) \circ \Delta \circ F^{\#} = (\varphi\psi) \circ F^{\#} = F(\varphi\psi).\end{aligned}$$

つまり F は群準同型である．　□

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{E})$ を考えると Frobenius 写像は各成分を q 乗するだけだから，補題よりさらに強く，Frobenius 写像が $\mathrm{GL}_n(\mathbb{E})$ の群自己同型を導くことも明らかであろう．

定義 1.5　$G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{E})$ とする．このとき，

$$G^F = \{g \in G | F(g) = g\}$$

を有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の**一般線形群**とよび，$\mathrm{GL}_n(q)$ または $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ で表す．行列群としては

$$\mathrm{GL}_n(q) = \{g = (g_{ij})_{1 \le i,j \le n} \mid g_{ij} \in \mathbb{F}_q, \det g \neq 0\}$$

である．

ここでは $\mathrm{GL}_n(q)$ を Frobenius 固定点のなす群として導入したが，Frobenius 写像で固定されるという条件をイデアルを用いて記述すれば線形代数群としても導入できる．実際，$\{X_{ij}^q - X_{ij}\}_{1 \le i,j \le n}$ で生成される $\mathbb{E}[\mathrm{GL}_n]$ のイデアルを I_q とおけば $\mathbb{E}[GL_n]/I_q$ も可換 Hopf 代数であり，また

$$\mathrm{GL}_n(q) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{E}\text{-alg}}(\mathbb{E}[GL_n]/I_q, \mathbb{E})$$

である．

1.3　$\mathrm{GL}_n(\mathbb{E})$ の特別な閉部分群

本節では，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{E})$ の構造論上重要な役割を果たす $\mathrm{GL}_n(\mathbb{E})$ の閉部分群を導入する．

定義 1.6　L を体，L-代数 H が Hopf 代数とする．H の両側イデアル I が **Hopf イデアル**とは，

(1) $\Delta(I) \subseteq I \boxtimes_L H + H \boxtimes_L I$
(2) $\varepsilon(I) = 0$
(3) $S(I) \subseteq I$

を満たすときをいう．このとき，H/I も Hopf 代数の構造をもつ．

定義 1.7　$G(\mathbb{E}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{E}\text{-alg}}(\mathbb{E}[G], \mathbb{E})$ を $\mathbb{E}$ 上の線形代数群とする．$\mathbb{E}[G]$ のイデアル I_K が Hopf イデアルのとき，$\mathbb{E}[K] := \mathbb{E}[G]/I_K$ と定め，

$$K(\mathbb{E}) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{E}\text{-alg}}(\mathbb{E}[K], \mathbb{E}) \subseteq G(\mathbb{E})$$

を $G(\mathbb{E})$ の**閉部分群**という．

たとえば，$I_q = (\{X_{ij}^q - X_{ij}\}_{1 \le i,j \le n})$ は $\mathbb{E}[\mathrm{GL}_n]$ の Hopf イデアルであり，$\mathrm{GL}_n(q)$ は $\mathrm{GL}_n(\mathbb{E})$ の閉部分群である．実際，

$$\Delta(X_{ij}^q - X_{ij}) = \sum_{k=1}^n (X_{ik}^q - X_{ik}) \boxtimes X_{kj}^q + \sum_{k=1}^n X_{ik} \boxtimes (X_{kj}^q - X_{kj})$$

と $\varepsilon(X_{ij}^q - X_{ij}) = 0$ より (1), (2) は明らかである．また，$(\det X)^q - \det X \in I_q$ より $(\det X)^{-q} - (\det X)^{-1} \in I_q$ でもあるから，$S(X_{ij}^q - X_{ij})$ に対しても (1) と同様の変形を施せば $S(X_{ij}^q - X_{ij}) \in I_q$ であり，(3) が成り立つ．

補題 1.6

(1) $\mathbb{E}[\mathrm{GL}_n]$ のイデアルで $\{X_{ij}\}_{1 \le j < i \le n}$ で生成されるものを I_B とする．I_B は $\mathbb{E}[\mathrm{GL}_n]$ の Hopf イデアルである．
(2) $\mathbb{E}[\mathrm{GL}_n]$ のイデアルで $\{X_{ij}\}_{1 \le j \ne i \le n}$ で生成されるものを I_T とする．I_T は $\mathbb{E}[\mathrm{GL}_n]$ の Hopf イデアルである．

証明　(1) $i > j$ とする．$\Delta(X_{ij}) = \sum_{k=1}^n X_{ik} \boxtimes X_{kj}$ において，$1 \le k < i$ の項に対しては $X_{ik} \in I_B$ であり，$i \le k \le n$ のときは $X_{kj} \in I_B$ であるから

$$\Delta(I_B) \subseteq I_B \boxtimes_{\mathbb{E}} H + H \boxtimes_{\mathbb{E}} I_B.$$

$\varepsilon(I_B) = 0$ は明らか.

$S(X_{ij}) = \Delta_{ij}/\det X \in I_B$ を示すには $D_{ji} \in I_B$ を示せばよいが，D_{ji} の各項は $1, \cdots, i-1, i+1, \cdots, n$ の並べかえ $k_1, \cdots, k_{j-1}, k_{j+1}, \cdots, k_n$ を用いて

$$\pm X_{1k_1} \cdots X_{j-1k_{j-1}} X_{j+1k_{j+1}} \cdots X_{nk_n}$$

の形をしているので，もし仮に

$$1 \leq k_1,\ \cdots,\ j-1 \leq k_{j-1},\ j+1 \leq k_{j+1},\ \cdots,\ n \leq k_n$$

とすると，$i \geq j+1$ より $k_n = n,\ \cdots,\ k_{i+1} = i+1$ かつ $i \leq k_i$ であるが，これは $k_i \leq i-1$ に矛盾する.

(2) $i \neq j$ とすると，$i \neq k$ または $k \neq j$ が成り立つので

$$\Delta(I_T) \subseteq I_T \boxtimes_{\mathbb{E}} H + H \boxtimes_{\mathbb{E}} I_T$$

である．$\varepsilon(I_T) = 0$ は明らか.

D_{ji} の各項は $1, \cdots, i-1, i+1, \cdots, n$ の並べかえ $k_1, \cdots, k_{j-1}, k_{j+1}, \cdots, k_n$ を用いて $\pm X_{1k_1} \cdots X_{j-1k_{j-1}} X_{j+1k_{j+1}} \cdots X_{nk_n}$ の形をしているので，

$$1 = k_1,\ \cdots,\ j-1 = k_{j-1},\ j+1 = k_{j+1},\ \cdots,\ n = k_n$$

とすると，$i \neq j$ に矛盾する. □

定義 1.8　$\mathbb{E}[B_n] := \mathbb{E}[\mathrm{GL}_n]/I_B, \mathbb{E}[T_n] := \mathbb{E}[\mathrm{GL}_n]/I_T$ とおき，

$$B_n := \mathrm{Hom}_{\mathbb{E}\text{-alg}}(\mathbb{E}[B_n], \mathbb{E}) \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{E})$$

を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{E})$ の**標準 Borel 部分群**,

$$T_n := \mathrm{Hom}_{\mathbb{E}\text{-alg}}(\mathbb{E}[T_n], \mathbb{E}) \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{E})$$

を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{E})$ の**標準極大 torus** とよぶ.

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{E})$ を E 成分可逆行列の全体と思ったとき，B_n は可逆な上三角行列の全体，T_n は可逆な対角行列の全体である.

B_n と共役な $\mathrm{GL}_n(\mathbb{E})$ の部分群を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{E})$ の **Borel 部分群**，T_n と共役な $\mathrm{GL}_n(\mathbb{E})$ の部分群を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{E})$ の**極大 torus** とよぶ．

例 1.1 にあるように，F を $\mathbb{F}_q$-構造 $\mathbb{F}_q[\mathrm{GL}_n]$ から定まる標準 Frobenius 写像とすると，$F(B_n) = B_n$，$F(T_n) = T_n$ が成り立つ．$B_n(q) := B_n^F$ を $\mathrm{GL}_n(q)$ の**標準 Borel 部分群**，$T_n(q) := T_n^F$ を $\mathrm{GL}_n(q)$ の**標準極大 torus** とよぶ．

より一般に，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{E})$ の Borel 部分群 B が $F(B) = B$ を満たすとき，B^F を $\mathrm{GL}_n(q)$ の **Borel 部分群**，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{E})$ の極大 torus T が $F(T) = T$ を満たすとき，T^F を $\mathrm{GL}_n(q)$ の**極大 torus** とよぶ．

定義 1.9 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{E})$ の閉部分群 P が標準 Borel 部分群 B_n を含むとき，P を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{E})$ の**標準放物型部分群**とよぶ．また，標準放物型部分群と共役な $\mathrm{GL}_n(\mathbb{E})$ の部分群を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{E})$ の**放物型部分群**とよぶ．

n 次単位行列を $(e_1, \cdots, e_n)$ と書くと $\{e_1, \cdots, e_n\}$ は $\mathbb{E}^n$ の基底であり，$\sigma \in S_n$ に対し $g(\sigma)e_i = e_{\sigma(i)}$ $(1 \le i \le n)$ により $g(\sigma) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{E})$ を定義するとき，$W_n = \{g(\sigma) \mid \sigma \in S_n\}$ は $\sigma \mapsto g(\sigma)$ により S_n と同型である．また，

$$N_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{E})}(T_n)/T_n = W_n T_n/T_n \simeq W_n$$

である．この関係を称して W_n は $\mathrm{GL}_n(\mathbb{E})$ の **Weyl 群**である，という．Weyl 群が部分群として実現されているのは一般線形群の特殊事情である．以後，S_n を W_n と同一視し，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{E})$ の部分群とみなす．任意の q に対して S_n は $\mathrm{GL}_n(q) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{E})^F$ の部分群である．

定義 1.10 $\mathrm{GL}_n(q)$ の部分群 P が標準 Borel 部分群 $B_n(q)$ を含むとき，P を $\mathrm{GL}_n(q)$ の**標準放物型部分群**とよぶ．また，標準放物型部分群と共役な $\mathrm{GL}_n(q)$ の部分群を $\mathrm{GL}_n(q)$ の**放物型部分群**とよぶ．

1.4 位数多項式と Φ_d-torus

$\mathrm{GL}_n(q)$ の位数を求めるには，$\mathbb{F}_q^n$ の n 個の 1 次独立なベクトルの選びかたの数を求めればよいから，

$$
\begin{aligned}
|\,\mathrm{GL}_n(q)| &= (q^n-1)(q^n-q)\cdots(q^n-q^{n-1}) \\
&= q^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{i=1}^{n}(q^i-1)
\end{aligned}
$$

である．

$$
O_n(X) = X^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{i=1}^{n}(X^i-1)
$$

を $\mathrm{GL}_n(q)$ の**位数多項式**という．ここで $\varPhi_d(X)$ を 1 の原始 d 乗根を根にもつ円分多項式とすると，

$$
\prod_{i=1}^{n}(X^i-1) = \prod_{d\geq 1}\varPhi_d(X)^{[\frac{n}{d}]}
$$

と書ける．

補題 1.7　任意の $1 \leq a \leq [\dfrac{n}{d}]$ に対し T_n の閉部分群と共役な $\mathrm{GL}_n(\mathbb{E})$ の閉部分群 S が存在して

- 標準 Frobenius 写像 F に対し $F(S) = S$
- $|S^F| = \varPhi_d(q)^a$

とできる．

証明　$n = d$ かつ $a = 1$ のときに示せば十分である．$\mathbb{F}_{q^d}^{\times}$ は巡回群であるから，$\mathbb{E}$ には 1 の原始 q^d-1 乗根が存在する．ζ を 1 の原始 q^d-1 乗根とし，

$$
g = \begin{pmatrix}
1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\
\zeta & \zeta^q & \cdots & \cdots & \zeta^{q^{d-1}} \\
\zeta^2 & (\zeta^q)^2 & \cdots & \cdots & (\zeta^{q^{d-1}})^2 \\
 & \vdots & \ddots & & \\
 & \vdots & & \ddots & \\
\zeta^{d-1} & & \cdots & \cdots & (\zeta^{q^{d-1}})^{d-1}
\end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{E})
$$

とおくと

$$F(g) = g\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & \\ 0 & 1 & \ddots & & \\ & \vdots & \ddots & \ddots & \\ & & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

であるから，$T' = gT_n g^{-1}$ に対し，$F(T') = T'$ かつ

$$F : g\begin{pmatrix} t_1 & & & \\ & t_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & t_d \end{pmatrix}g^{-1} \mapsto g\begin{pmatrix} t_d^q & & & \\ & t_1^q & & \\ & & \ddots & \\ & & & t_{d-1}^q \end{pmatrix}g^{-1}$$

である．T' の Frobenius 固定点は

$$g\begin{pmatrix} t & & & \\ & t^q & & \\ & & \ddots & \\ & & & t^{q^{d-1}} \end{pmatrix}g^{-1} \quad (t \in \mathbb{F}_{q^d}^{\times})$$

である．$\varphi(d)$ を $\{1, \cdots, d-1\}$ の元で d と互いに素なものの個数とし

$$\Phi_d(X) = X^{\varphi(d)} + a_1 X^{\varphi(d)-1} + \cdots + a_{\varphi(d)-1}X + 1 \quad (a_1, \cdots, a_{\varphi(d)-1} \in \mathbb{Z})$$

と書く．行番号 $1, \cdots, d$ を $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ の元と思って，関係式

$$t_i t_{i+1}^{a_{\varphi(d)-1}} \cdots t_{i+\varphi(d)-1}^{a_1} t_{i+\varphi(d)} = 1 \quad (i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z})$$

により T' の閉部分群 S を定めると，$F(S) = S$ であり，また T' の Frobenius 固定点が上記の関係式をみたすのは

$$t^{1+a_{\varphi(d)-1}q+\cdots+a_1 q^{\varphi(d)-1}+q^{\varphi(d)}} = t^{\Phi_d(q)} = 1 \quad (t \in \mathbb{F}_{q^d}^{\times})$$

のときだから，この方程式の根の個数を見れば $|S^F| = \Phi_d(q)$ である． □

この補題で存在が示された torus を **Φ_d-torus** という．また，証明中で構成した T' を $\mathrm{GL}_d(\mathbb{E})$ の **Coxeter torus** という．

Φ_d-torus S が与えられたとき，S の各元と可換な元全体のなす $\mathrm{GL}_n(\mathbb{E})$ の閉部分群を **d-分裂 Levi 部分群**とよぶ．

これらの概念は $\mathrm{GL}_n(q)$ の非等標数モジュラー表現論においてブロック理論を考えるとき重要になる．

例 1.2　$n = d = 6$ とする．$T' = gT_6g^{-1}$ を Coxeter torus とすると，$\Phi_6(X) = X^2 - X + 1$ より $\mathrm{GL}_6(\mathbb{E})$ の Φ_6-torus は

$$g\begin{pmatrix} t_1 & & & \\ & t_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & t_6 \end{pmatrix} g^{-1} \quad (t_1t_3 = t_2, t_2t_4 = t_3, \cdots, t_5t_1 = t_6, t_6t_2 = t_1)$$

の全体のなす T' の閉部分群である．$t_1, \cdots, t_6$ に対する条件式を解けば

$$t_1 = t_5^{-1}t_6,\ t_2 = t_5^{-1},\ t_3 = t_6^{-1},\ t_4 = t_5t_6^{-1}$$

となるので，Φ_6-torus は $\mathbb{E}^\times \times \mathbb{E}^\times$ に同型である．また，Frobenius 固定点になる，すなわち $\mathrm{GL}_6(q)$ の元になるのは $t_5 = t_6^{1-q}, t_6^{q^2-q+1} = 1$ のときである．

上記の補題は位数多項式の素因子に関する結果であったが，位数の素因子に関する結果は次のとおりである．一般に G を有限群とし，G の位数 $|G|$ が ℓ でちょうど a 回割り切れたとする．このとき，G は位数 ℓ^a の部分群を共役を除いてただひとつ持つ．この部分群を G の **Sylow ℓ-部分群**とよぶのであった．

定義 1.11　e を $q \bmod \ell$ の位数とする．すなわち，

$$e = \min\{k \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \mid q^k - 1 \text{ は } \ell \text{ で割り切れる.}\}$$

とする．$n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対し

$$n = n_{-1} + \sum_{k \geq 0} n_k e \ell^k \quad (0 \leq n_{-1} < e, 0 \leq n_k < \ell)$$

を (e,ℓ)**-進展開**とよぶ.

補題 1.8　S_0 を $\mathrm{GL}_e(q)$ の Φ_e-torus の Frobenius 固定点のなす部分群の Sylow ℓ-部分群とする．ℓ を奇素数とすると次が成立.

(1) S_0 は $\mathrm{GL}_e(q)$ の Sylow ℓ-部分群である.

(2) ℓ-部分群 $S_k \subseteq \mathrm{GL}_{e\ell^k}(q)$ が Sylow ℓ-部分群とする.

$$S_k^{\times \ell} \subseteq \mathrm{GL}_{e\ell^k}(q)^{\times \ell} \subseteq \mathrm{GL}_{e\ell^{k+1}}(q)$$

には

$$w(i) = \begin{cases} i + e\ell^k & (1 \le i \le e\ell^{k+1} - e\ell^k) \\ i + e\ell^k - e\ell^{k+1} & (e\ell^{k+1} - e\ell^k + 1 \le i \le e\ell^{k+1}) \end{cases}$$

で定めた $S_{e\ell^{k+1}}$ の元 w が生成する位数 ℓ の巡回群が作用するので，この位数 ℓ の巡回群と $S_k^{\times \ell}$ の半直積を S_{k+1} とする．このとき，S_{k+1} は $\mathrm{GL}_{e\ell^{k+1}}(q)$ の Sylow ℓ-部分群である.

(3) n の (e,ℓ)-進展開を

$$n = n_{-1} + \sum_{k \ge 0} n_k e\ell^k$$

とすると，$\mathrm{GL}_n(q)$ の Sylow ℓ-部分群のひとつは次で与えられる.

$$\{1\} \times \prod_{k \ge 0} S_k^{\times n_k} \subseteq \mathrm{GL}_{n_{-1}}(q) \times \prod_{k \ge 0} \mathrm{GL}_{e\ell^k}(q)^{\times n_k} \subseteq \mathrm{GL}_n(q)$$

証明　(1) $q-1, q^2-1, \cdots, q^{e-1}-1$ は ℓ で割り切れないので，$\mathrm{GL}_e(q)$ の Sylow ℓ-部分群の位数は Coxeter torus の Frobenius 固定点のなす巡回群 $\mathbb{F}_{q^e}^\times$ の Sylow ℓ-部分群の位数に等しい．さらに,

$$q^e - 1 = \prod_{k \text{ は } e \text{ の約数}} \Phi_k(q)$$

であるが，$\Phi_k(q)$ が ℓ で割り切れれば $q^k - 1$ が ℓ で割り切れるので，ℓ は $\Phi_e(q)$ のみを割り切る．以上から $\mathrm{GL}_e(q)$ の Sylow ℓ-部分群の位数は S_0 の位数に等

しいことになり題意を得る．

(2) q^k-1 が ℓ で割り切れるならば $q \bmod \ell$ の k 乗が 1 になるので k は e の倍数である．以下 $k=ek'$ とする．q^e-1 が ℓ でちょうど a 回割り切れたとすると ℓ で割り切れない整数 b が存在して $q^e=1+\ell^a b$ とかけるから，

$$q^k=(1+\ell^a b)^{k'}=1+k'\ell^a b+\sum_{r=2}^{k'}\binom{k'}{r}\ell^{ra}b^r$$

となるが，$c\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ と ℓ で割り切れない整数 d を用いて $k'=\ell^c d$ と書くと

$$\binom{k'}{r}\ell^{ra}\quad (r\geq 2)$$

は ℓ^{a+c+1} で割り切れる．実際，r が ℓ^c で割り切れれば，$\ell\geq 3$ より

$$ra\geq \ell^c a=a+(\ell-1)(\ell^{c-1}+\cdots+\ell+1)a\geq a+2ca>a+c$$

であり，$0\leq i<c$ に対し r が ℓ でちょうど i 回割り切れるときは，2 項係数が ℓ で割り切れる回数

$$\sum_{k\geq 1}\left([\frac{k'}{\ell^k}]-[\frac{k'-r}{\ell^k}]-[\frac{r}{\ell^k}]\right)$$

を見ると，$k=i+1,\cdots,c$ のときは

$$[\frac{k'}{\ell^k}]-[\frac{k'-r}{\ell^k}]-[\frac{r}{\ell^k}]=\frac{k'}{\ell^k}-\left(\frac{k'}{\ell^k}-[\frac{r}{\ell^k}]-1\right)-[\frac{r}{\ell^k}]=1$$

であるから，2 項係数は ℓ で少なくとも $c-i$ 回割り切れることがわかるので，$i=0$ なら $r\geq 2$ より

$$ra+c\geq 2a+c>a+c$$

$i\geq 1$ なら $\ell\geq 3$ より $\ell^i\geq i+2$ が成り立つので

$$ra+c-i\geq \ell^i a-i+c\geq (i+2)a-i+c=2a+(a-1)i+c>a+c$$

であることより ℓ^{a+c+1} で割り切れることがわかる．

以上から，k' が ℓ でちょうど c 回割り切れるならば q^k-1 は ℓ でちょうど $a+c$ 回割り切れることがわかった．つまり自然数 N に対し ℓ で割り切れる回数を $\nu_\ell(N)$ と書けば

$$\nu_\ell(|\mathrm{GL}_n(q)|)=\sum_{k=1}^{n}\nu_\ell(q^k-1)=\sum_{k'=1}^{[\frac{n}{e}]}\nu_\ell(q^{ek'}-1)=\sum_{k'=1}^{[\frac{n}{e}]}(a+\nu_\ell(k'))$$

が得られた．故に，n の (e,ℓ)-進展開を用いれば

$$\begin{aligned}\nu_\ell(|\mathrm{GL}_n(q)|)&=\frac{n-n_{-1}}{e}a+\sum_{k\geq 1}n_k(\ell^{k-1}+\cdots+\ell+1)\\&=\sum_{k\geq 0}n_k(\ell^k a+\ell^{k-1}+\cdots+\ell+1)\end{aligned}$$

である．よって，$\nu_\ell(|\mathrm{GL}_{e\ell^k}(q)|)=\ell^k a+\ell^{k-1}+\cdots+\ell+1$ かつ

$$\nu_\ell(|\mathrm{GL}_{e\ell^{k+1}}(q)|)=\ell\nu_\ell(|\mathrm{GL}_{e\ell^k}(q)|)+1$$

を得るから，

$$\nu_\ell(|S_{k+1}|)=\ell\nu_\ell(|S_k|)+1=\ell\nu_\ell(|\mathrm{GL}_{e\ell^k}(q)|)+1=\nu_\ell(|\mathrm{GL}_{e\ell^{k+1}}(q)|)$$

となり，S_{k+1} は $\mathrm{GL}_{e\ell^{k+1}}(q)$ の Sylow ℓ-部分群である．

(3) ここまでの議論から

$$\nu_\ell(|\mathrm{GL}_n(q)|)=\sum_{k\geq 0}n_k\nu_\ell(|\mathrm{GL}_{e\ell^k}(q)|)$$

がわかるので明らか．　□

1.5　対称群の転倒数と Young 部分群

Weyl 群の一般論はあるベクトル空間の有限部分集合 Δ を用いて展開される．Δ はルート系と呼ばれ，正ルートの集合 Δ^+ と負ルートの集合 $\Delta^-=-\Delta^+$ の排他的集合和であって，Weyl 群の元 w に対し定義される

$$\gamma(w)=|w\Delta^+\cap\Delta^-|$$

という量が理論展開上重要な役割を果たす．実は，この理論は対称群の転倒数の理論を一般化したものに他ならないのである．ここで，$w \in S_n$ に対し w の転倒数とは $w(1) \cdots w(n)$ の中で任意の 2 つの数字を較べたとき左の方が右の方より大きいものの個数であって，

$$\gamma(w) = |\{(i,j) \mid 1 \le i < j \le n,\ w(i) > w(j)\}|$$

で定義されるのであった．本節では対称群の転倒数の理論を述べる．

定義 1.12　$s_i \in S_n$ を i と $i+1$ の互換 $(i, i+1)$，すなわち

$$s_i(i) = i+1,\ \ s_i(i+1) = i,\ \ s_i(k) = k\ \ (k \ne i, i+1)$$

で定義し，$\{s_i\}_{1 \le i < n}$ を S_n の **Coxeter 生成元**とよぶ．

定義 1.13　$w \in S_n$ を Coxeter 生成元の積 $w = s_{i_1} \cdots s_{i_r}$ で表したとき，w の**表示**といい，r を表示の長さという．w の表示の中で長さが最小のものを w の**最短表示**といい，最短表示の長さを $\ell(w)$ で表す．

補題 1.9　$w, s_i w \in S_n$ の転倒数に対し，

$$\gamma(s_i w) = \begin{cases} \gamma(w) + 1 & (w^{-1}(i) < w^{-1}(i+1)) \\ \gamma(w) - 1 & (w^{-1}(i) > w^{-1}(i+1)) \end{cases}$$

が成立．

証明　集合 $\{(j,k) \mid j < k, s_i w(j) > s_i w(k)\}$ を次の集合の和に分割する．

(i) $j, k \notin \{w^{-1}(i), w^{-1}(i+1)\}$
(ii) $j = w^{-1}(i), k \ne w^{-1}(i+1)$
(iii) $j = w^{-1}(i+1), k \ne w^{-1}(i)$
(iv) $j \ne w^{-1}(i+1), k = w^{-1}(i)$
(v) $j \ne w^{-1}(i), k = w^{-1}(i+1)$
(vi) $\{j, k\} = \{w^{-1}(i), w^{-1}(i+1)\}$

(i) から (v) では $s_i w(j) > s_i w(k)$ は $w(j) > w(k)$ と同値であるから題意の式を得る．　□

次の性質は松本交換条件とよばれる．

補題 1.10 $w \in S_n$ の表示 $w = s_{i_1} \cdots s_{i_r}$ に対し，$\gamma(w) < r$ ならばある $j < k$ が存在して

$$w = s_{i_1} \cdots \widehat{s_{i_j}} \cdots \widehat{s_{i_k}} \cdots s_{i_r}$$

と表示の長さを短くできる．

証明 まず最初に，補題 1.9 より

$$\gamma(s_i w) = \gamma(w) + 1 \Longleftrightarrow w^{-1}(i) < w^{-1}(i+1)$$

$$\gamma(s_i w) = \gamma(w) - 1 \Longleftrightarrow w^{-1}(i) > w^{-1}(i+1)$$

かつ $\gamma(w) = \gamma(w^{-1})$ より

$$\gamma(w s_i) = \gamma(w) + 1 \Longleftrightarrow w(i) < w(i+1)$$

$$\gamma(w s_i) = \gamma(w) - 1 \Longleftrightarrow w(i) > w(i+1)$$

であることを注意しておく．もし仮にすべての $1 \leq k < r$ について

$$s_{i_1} \cdots s_{i_k}(i_{k+1}) < s_{i_1} \cdots s_{i_k}(i_{k+1} + 1)$$

が成り立つとすると，上の注意より $1 \leq k < r$ に対して $\gamma(s_{i_1} \cdots s_{i_{k+1}}) = \gamma(s_{i_1} \cdots s_{i_k}) + 1$ となるから，$\gamma(w) = r$ となって $\gamma(w) < r$ の仮定に反する．よってある $1 \leq k < r$ に対し

$$s_{i_1} \cdots s_{i_k}(i_{k+1}) > s_{i_1} \cdots s_{i_k}(i_{k+1} + 1)$$

となるが，$i_{k+1} < i_{k+1} + 1$ だから，$s_{i_k}, s_{i_{k-1}}, \cdots, s_{i_1}$ と順にかけていくうちにどこかで大小関係が逆転しなければならない．ゆえに，ある j が存在して，$a = s_{i_{j+1}} \cdots s_{i_k}(i_{k+1}), b = s_{i_{j+1}} \cdots s_{i_k}(i_{k+1} + 1)$ とおいたとき，$a < b$ かつ $s_{i_j}(a) > s_{i_j}(b)$ となることがわかる．そこで

(1) $a, b \in \{i_j, i_j + 1\}$

(2) $a = i_j, b \notin \{i_j, i_j + 1\}$

(3) $a = i_j + 1, b \notin \{i_j, i_j + 1\}$

(4) $a \notin \{i_j, i_j+1\}, b = i_j$

(5) $a \notin \{i_j, i_j+1\}, b = i_j+1$

と場合分けすれば，$a = i_j, b = i_j+1$ しかありえないこともわかる．

一般に $w(i) = k, w(i+1) = k'$ ならば $ws_iw^{-1} = (k, k')$（互換）なので，$s_{i_{j+1}} \cdots s_{i_k}(i_{k+1}) = i_j$, $s_{i_{j+1}} \cdots s_{i_k}(i_{k+1}+1) = i_j+1$ より

$$s_{i_{j+1}} \cdots s_{i_k} s_{i_{k+1}} s_{i_k} \cdots s_{i_{j+1}} = s_{i_j}$$

である．故に $s_{i_j} s_{i_{j+1}} \cdots s_{i_k} = s_{i_{j+1}} \cdots s_{i_{k+1}}$ となって

$$w = s_{i_1} \cdots s_{i_j} \underbrace{s_{i_{j+1}} \cdots s_{i_{k+1}}} \cdots s_{i_r}$$

のカッコで囲った部分を $s_{i_j} \cdots s_{i_k}$ で置きかえれば，w の表示から s_{i_j} と $s_{i_{k+1}}$ がキャンセルする．□

命題 1.1　$w \in S_n$ に対して $\gamma(w) = \ell(w)$ が成り立つ．

証明　$w = s_{i_1} \cdots s_{i_r}$ を最短表示とすると補題 1.9 より

$$\gamma(w) \leq \gamma(s_{i_2} \cdots s_{i_r}) + 1 \leq \cdots \leq r = \ell(w)$$

である．ここで $\gamma(w) < r$ とすると，松本交換条件より $s_{i_1} \cdots s_{i_r}$ が最短表示であるという仮定に反するから等号が成立し，題意を得る．□

定義 1.14　S_n の Coxeter 生成元の集合を $S = \{s_i\}_{1 \leq i < n}$ とする．$I \subseteq S$ に対し，S_n 中で I の生成する部分群を S_n の **Young 部分群**，または**放物型部分群**とよび，S_I で表す．

順列 $12 \cdots n$ を考え，$s_i \notin I$ のとき i と $i+1$ のあいだに縦線を入れることによりブロック分割された順列にする．このときブロックの長さを左から順に並べたものを $\mu = (\mu_1, \mu_2, \cdots)$ とする．I が μ から復元できることも明らかであろう．I が μ から復元された S の部分集合のとき，I_μ と書く．

定義 1.15　自然数の数列 $\mu = (\mu_1, \mu_2, \cdots)$ が，ある $I \subseteq S$ から上の手順で作られるとき $\mu \vDash n$ と書き，μ を n の**広義の分割**とよぶ．

$I_\mu \subseteq S$ から定まる Young 部分群を S_μ とも書く．$S_\mu = S_{\mu_1} \times S_{\mu_2} \times \cdots$ である．

定義 1.16 $\mu, \nu \vDash n$ とする．μ が ν の**細分**であるとは，$I_\mu \subseteq I_\nu$ のときをいう．

μ が ν の細分とし，$S_\nu = S_{\nu_1} \times S_{\nu_2} \times \cdots$ と書けば，各 S_{ν_i} の Young 部分群の直積として S_μ が得られる．

補題 1.11 $w = s_{i_1} \cdots s_{i_r}$ を最短表示とする．このとき，$w \in S_\mu$ なら $\{s_{i_1}, \cdots, s_{i_r}\} \subseteq I_\mu$ である．

証明 $w \in S_\mu$ に対し，$\gamma(sw) > \gamma(w)$ が $\forall s \in I_\mu$ に対して成り立つのは $\gamma(w) = 0$，つまり w が単位元のときに限る．実際，これを示すには，$w \in S_n$ が $\gamma(s_i w) > \gamma(w)$ $(1 \leq i < n)$ を満たすときを考えれば十分で，補題 1.9 より

$$w^{-1}(1) < w^{-1}(2) < \cdots < w^{-1}(n)$$

だから $w^{-1}(i) = i$ $(1 \leq i \leq n)$ を得る．

さて題意を $\gamma(w)$ に関する帰納法で証明する．$\gamma(w) = 0, 1$ のときは明らか．$\gamma(w) > 1$ とすると，上で述べたことより $\gamma(sw) < \gamma(w)$ を満たす $s \in I_\mu$ がとれる．このとき松本交換条件より $sw = ss_{i_1} \cdots s_{i_r}$ から 2 箇所キャンセルするが，$w = s_{i_1} \cdots s_{i_r}$ が最短表示より s がある s_{i_k} とキャンセルしなければならない．さらに，

$$\ell(sw) = \gamma(sw) = \gamma(w) - 1 = \ell(w) - 1$$

より

$$s_{i_1} \cdots \widehat{s_{i_k}} \cdots s_{i_r} = sw \in S_\mu$$

も最短表示である．ゆえに帰納法の仮定より s_{i_k} 以外の $s_{i_1}, \cdots, s_{i_r}$ はすべて I_μ に属する．よって $s_{i_k} \in S_\mu$ となり，結局は s_{i_k} も I_μ に属する． □

補題 1.12 $\mu \vDash n, \nu \vDash n$ とするとき，$w \in S_n$ を含む両側剰余類 $S_\mu w S_\nu$ には長さ最小の元がただ 1 つ存在し，この元を $d_{\mu\nu}$ とすると，他の元はすべて

$$\ell(v_1 d_{\mu\nu} v_2) = \ell(v_1) + \ell(d_{\mu\nu}) + \ell(v_2)$$

を満たす $v_1 \in S_\mu, v_2 \in S_\nu$ を用いて $v_1 d_{\mu\nu} v_2$ と書ける．

証明　$u \in S_\mu w S_\nu$ を長さ最小の元であるとする．このとき，$u' \in S_\mu w S_\nu$ に対して，ある $v_1 \in S_\mu$ とある $v_2 \in S_\nu$ が存在して $u' = v_1 u v_2$ と書けるが，v_1, v_2 をうまくとると，

$$\ell(u') = \ell(v_1) + \ell(u) + \ell(v_2)$$

となることを示そう．実際，u, v_1, v_2 の最短表示を各々ひとつずつ固定し

$$u = s_{i_1} \cdots s_{i_r}, \quad v_1 = s_{j_1} \cdots s_{j_m}, \quad v_2 = s_{k_1} \cdots s_{k_l}$$

とすると，

$$u' = s_{j_1} \cdots s_{j_m} s_{i_1} \cdots s_{i_r} s_{k_1} \cdots s_{k_l}$$

であるが，もし $\ell(u') < m + r + l$ であるとすると松本交換条件よりこの表示から 2 ヶ所消すことが出来る．ところが

- v_1 の最短表示を取っているので，$s_{j_1} \cdots s_{j_m}$ の中で消し合うことはなく，
- v_2 の最短表示を取っているので，$s_{k_1} \cdots s_{k_l}$ の中で消し合うことはなく，
- u の最短表示を取っているので，$s_{i_1} \cdots s_{i_r}$ の中で消し合うこともない．

さらに，

- $s_{j_\diamondsuit}$ と $s_{i_\blacklozenge}$ が消し合えば，u より長さの小さい元が $S_\mu w S_\nu$ に存在．
- $s_{i_\diamondsuit}$ と $s_{k_\blacklozenge}$ が消し合えば，u より長さの小さい元が $S_\mu w S_\nu$ に存在．

これはともに $\ell(u)$ の最小性に反するので，消し合いは $s_{j_\diamondsuit}$ と $s_{k_\blacklozenge}$ で起こり，

$$v_1' = s_{j_1} \cdots \widehat{s_{j_\diamondsuit}} \cdots s_{j_m}, \qquad v_2' = s_{k_1} \cdots \widehat{s_{k_\blacklozenge}} \cdots s_{k_l}$$

が存在して $u' = v_1' u v_2'$ となる．以下これを繰り返せば有限回ののち

$$\ell(u') = \ell(v_1) + \ell(u) + \ell(v_2)$$

に到達する．

u' も長さ最小の元としよう．$\ell(u') = \ell(v_1) + \ell(u) + \ell(v_2)$ となるように $v_1 \in S_\mu, v_2 \in S_\nu$ を選んで $u' = v_1 u v_2$ と書けば，$\ell(u') = \ell(u)$ だから

$$\ell(v_1) = \ell(v_2) = 0$$

となり，v_1, v_2 は単位元で $u' = v_1 u v_2 = u$ を得る．よって，長さ最小の元がただひとつ存在することが示された． $\square$

補題 1.13　$w \in S_n$ を含む両側剰余類 $S_\mu w S_\nu$ に対し，$u = d_{\mu\nu} \in S_\mu w S_\nu$ を長さ最小元とすると

$$\begin{cases} \ell(su) > \ell(u) & (\forall s \in I_\mu) \\ \ell(us) > \ell(u) & (\forall s \in I_\nu) \end{cases}$$

が成り立つ．また，この条件を満たす $S_\mu w S_\nu$ の元 u は $d_{\mu\nu}$ に限る．

証明　u が長さ最小であるから $\ell(su) \geq \ell(u)$ かつ $\ell(us) \geq \ell(u)$ である．よって条件が成り立つのは明らか．

u が条件を満たすとする．補題 1.12 より $v_1 \in S_\mu, v_2 \in S_\nu$ が存在して $u = v_1 d_{\mu\nu} v_2$ かつ $\ell(u) = \ell(v_1) + \ell(d_{\mu\nu}) + \ell(v_2)$ とできる．v_1 が単位元でないとするとある $s \in I_\mu$ に対し $\ell(sv_1) < \ell(v_1)$ だから補題 1.9 より

$$\ell(su) \leq \ell(sv_1) + \ell(d_{\mu\nu}) + \ell(v_2) < \ell(u)$$

で条件に反す．v_2 についても同様に議論すれば v_1, v_2 はともに単位元だから $u = d_{\mu\nu}$ を得る． $\square$

以上の議論をもとに Young 部分群に関する両側剰余類分解の代表系として下記の集合を採用する．

定義 1.17　$S_\mu \backslash S_n / S_\nu$ の代表元を

$$\mathcal{D}_{\mu\nu} = \left\{ w \in S_n \middle| \ell(su) > \ell(u)\ (\forall s \in I_\mu),\ \ \ell(us) > \ell(u)\ (\forall s \in I_\nu) \right\}$$

で定める．$\mathcal{D}_{\mu\nu}$ の元を distinguished な代表元という．

$w \in S_n$ を順列 $w(1) \cdots w(n)$ と同一視すると,

- s_i を左からかけるとは, $w(1) \cdots w(n)$ の中の i と $i+1$ を交換すること
- s_i を右からかけるとは, i 番目と $i+1$ 番目の数字を交換すること

である．故に,

$$a_i = \sum_{k=1}^{i-1} \mu_k + 1, \quad b_i = \sum_{k=1}^{i-1} \nu_k + 1$$

とするとき, $\mathcal{D}_{\mu\nu}$ は $1, 2, \cdots, n$ の順列 $w(1) \cdots w(n)$ であって,

$$\begin{cases} a_i, \cdots, a_{i+1} - 1 \text{ は左から右にこの順に並んでいる } \ (i = 1, 2, \cdots) \\ w(b_i) < w(b_i + 1) < \cdots < w(b_{i+1} - 1) \ \ (i = 1, 2, \cdots) \end{cases}$$

を満たすものと同一視できる．

例 1.3　$n = 4$ とし, $\mu = (2, 2) \vDash 4, \nu = (1, 2, 1) \vDash 4$ とする．このとき,

$$I_\mu = \{s_1, s_3\}, \quad I_\nu = \{s_2\}$$

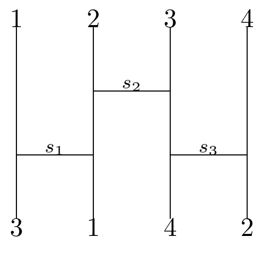
であり，また,

$$\mathcal{D}_{\mu\nu} = \{1234, 1342, 3124, 3142\}.$$

対応する最短表示はあみだくじを書いて求めることができる．今の場合,

$$1342 = s_2 s_3, \ \ 3124 = s_2 s_1, \ \ 3142 = s_2 s_1 s_3$$

である．たとえば, 3142 の場合



でこれを上から読めばよい．

補題 1.14 $\nu \vDash n$ に対し，$S^\nu = \{w \in S_n \mid \ell(ws) > \ell(w)\ (\forall s \in I_\nu)\}$ とおくと，$u \in S^\nu, v \in S_\nu$ に対し $\ell(uv) = \ell(u) + \ell(v)$ が成り立つ．

証明 $\mu = (1^n)$ ととると $S^\nu = \mathcal{D}_{\mu\nu}$ であるから，補題 1.12, 補題 1.13 より u は uS_ν の中で長さ最小である．u と v の最短表示を

$$u = s_{i_1} \cdots s_{i_r}, \quad v = s_{j_1} \cdots s_{j_t}$$

とする．$\ell(uv) < r + t$ ならば松本交換条件より

$$uv = s_{i_1} \cdots s_{i_r} s_{j_1} \cdots s_{j_m}$$

から 2 ヶ所消しあうが，u, v の最短表示を取ったことより

$$uv = s_{i_1} \cdots \widehat{s_{i_\diamond}} \cdots s_{i_r} s_{j_1} \cdots \widehat{s_{j_\blacklozenge}} \cdots s_{j_t}$$

でなければならない．これは u が uS_ν の長さ最小元であることに反するので，$\ell(uv) = \ell(u) + \ell(v)$ を得る． □

補題 1.15 s, t を Coxeter 生成元, $w \in S_n$ とする．もし，$\ell(sw) = \ell(wt)$ かつ $\ell(swt) = \ell(w)$ ならば $sw = wt$ である．

証明 まず $\ell(wt) > \ell(w)$ としよう．仮定より $\ell(sw) > \ell(w)$ でもある．swt の最短表示 $s_{i_1} \cdots s_{i_r}$ をとると，仮定より $\ell(w) = r$ であるから，

$$w = ss_{i_1} \cdots s_{i_r} t$$

から 2 ヶ所がキャンセルする．

- $w = ss_{i_1} \cdots \widehat{s_{i_\diamond}} \cdots \widehat{s_{i_\blacklozenge}} \cdots s_{i_r} t$ ならば $swt = s_{i_1} \cdots \widehat{s_{i_\diamond}} \cdots \widehat{s_{i_\blacklozenge}} \cdots s_{i_r}$ であるから，swt の最短表示を取ったことに反する．
- $w = ss_{i_1} \cdots \widehat{s_{i_\diamond}} \cdots s_{i_r} \widehat{t}$ ならば $sw = s_{i_1} \cdots \widehat{s_{i_\diamond}} \cdots s_{i_r}$ であるから，$\ell(sw) \le r - 1$ となり $\ell(sw) > \ell(w) = \ell(swt) = r$ に反する．
- $w = \widehat{s} s_{i_1} \cdots \widehat{s_{i_\diamond}} \cdots s_{i_r} t$ ならば $wt = s_{i_1} \cdots \widehat{s_{i_\diamond}} \cdots s_{i_r}$ であるから，$\ell(wt) \le r - 1$ となり $\ell(wt) > \ell(w) = r$ に反する．

故に $w = s_{i_1} \cdots s_{i_r} = swt$ より $sw = wt$ を得る．

次に $\ell(wt) < \ell(w)$ としよう．$w' = wt$ とおくと，$\ell(w't) > \ell(w')$ で

(1) $\ell(sw') = \ell(swt) = \ell(w) = \ell(w't)$

(2) $\ell(sw't) = \ell(sw) = \ell(wt) = \ell(w')$

だから上の場合に帰着して $w' = sw't$ である．よって $wt = sw$ を得る．　□

次の補題は Deodhar の補題とよばれる．

補題 1.16　$\mu \vDash n$ に対し，${}^{\mu}S = \{w \in S_n \mid \ell(sw) > \ell(w)\ (\forall s \in I_\mu)\}$ とおく．このとき，Coxeter 生成元 s と $v \in {}^{\mu}S$ に対し，次のいずれかが成立する．

(a) $vs \in {}^{\mu}S$.

(b) ある Coxeter 生成元 $t \in I_\mu$ が存在して，$vs = tv$ となる．

証明　$vs \notin {}^{\mu}S$ とすると，ある $t \in I_\mu$ が存在して $\ell(tvs) < \ell(vs)$ である．他方 $v \in {}^{\mu}S$ より $\ell(tv) > \ell(v)$ であるから，

$$\ell(vs) > \ell(tvs) \geq \ell(tv) - 1 \geq \ell(v)$$

となって，$\ell(tv) = \ell(v) + 1 = \ell(vs)$ かつ $\ell(tvs) = \ell(v)$ が満たされる．よって補題 1.15 より $tv = vs$ となる．　□

定理 1.1　$d \in \mathcal{D}_{\mu\nu}$ ならば $d^{-1}S_\mu d \cap S_\nu = S_{d^{-1}I_\mu d \cap I_\nu}$.

証明　$S_{d^{-1}I_\mu d \cap I_\nu} \subseteq d^{-1}S_\mu d \cap S_\nu$ は明らか故，逆向きの包含関係を示す．$w \in d^{-1}S_\mu d \cap S_\nu$ とすると，$dw \in S_\mu d \cap dS_\nu$ であるから，適当な $v \in S_\mu$ を用いて $dw = vd$ と書くことが出来る．$v \in S_\mu, w \in S_\nu$ かつ $d \in \mathcal{D}_{\mu\nu}$ であるから補題 1.14 より

$$\ell(d) + \ell(w) = \ell(dw) = \ell(vd) = \ell(v) + \ell(d)$$

である．故に $\ell(w) = \ell(v)$ を得る．

$w = s_{i_1} \cdots s_{i_r}$ を最短表示とする．ここで，$d, ds_{i_1}, ds_{i_1}s_{i_2}, \cdots, ds_{i_1} \cdots s_{i_r}$ を考えることにより，$d_i \in {}^{\mu}S$ $(0 \leq i \leq r)$ を次のように帰納的に定める．

(1) $d_0 = d$

(2) $t_1, \cdots, t_k \in I_\mu \cup \{1\}$ が存在して，$ds_{i_1} \cdots s_{i_k} = t_1 \cdots t_k d_k$ と表されているとする．このとき，Deodhar の補題より

$$d_k s_{i_{k+1}} = t_{k+1} d_{k+1} \quad (t_{k+1} \in I_\mu \cup \{1\},\ d_{k+1} \in {}^\mu S)$$

と書けて，

(a) $d_k s_{i_{k+1}} \in {}^\mu S$ ならば $t_{k+1} = 1,\ d_{k+1} = d_k s_{i_{k+1}}$.

(b) $d_k s_{i_{k+1}} \notin {}^\mu S$ ならば $t_{k+1} \in I_\mu,\ d_{k+1} = d_k$.

以上から，$vd = dw = t_1 \cdots t_r d_r$ で，$v, t_1, \cdots, t_r \in S_\mu$ かつ $d, d_r \in {}^\mu S$ であるから $d_r = d, v = t_1 \cdots t_r$ を得る．今，$\ell(v) = \ell(w) = r$ より，$t_k = 1$ は起こり得ず，$d_k = d$ $(0 \le k \le r)$．故に $s_{i_k} = d^{-1} t_k d \in d^{-1} I_\mu d \cap I_\nu$ となるので $w \in S_{d^{-1} I_\mu d \cap I_\nu}$ を得る． □

1.6 Tits 系としての一般線形群

一般線形群は簡約線形代数群である．簡約線形代数群の定義はいくつかあり得るが，簡約線形代数群であることと，Tits 系とよばれる公理系を拡張した簡約 BN 対の公理系をみたすことは同値であり，一般の簡約線形代数群に対して成り立つ多くの結果をこの公理をもとに証明することが出来る．

定義 1.18 G を任意の群とする．G の部分群の対 (B, N) が次の条件

(a) G は B と N で生成される．

(b) $T = B \cap N$ は N の正規部分群.

(c) $W = N/T$ は位数 2 の元の集合 $\{s_i\}_{i \in I}$ で生成される．

(d) $s_i B s_i \neq B$.

(e) $w \in W$ に対し，$s_i B w \subseteq B s_i w B \cup B w B$.

をみたすとき，(B, N) を **Tits 系**，または **BN 対**という．

(d) と (e) は正確には $n_i T = s_i$，$nT = w$ をみたす N の元 n_i，n に対する条件 $n_i B n_i \neq B$ と $n_i B n \subseteq B n_i n B \cup B n B$ であるが，これらの条件は n_i と n の選び方によらないので，上記のように略記する．

定義 1.19　線形代数群 G の閉部分群の対 (B, N) が**簡約 BN 対**とは，BN 対であってさらに次の条件をみたすときをいう．

(f) B を W の元で共役した部分群 wBw^{-1} $(w \in W)$ の共通部分を考えると

$$\bigcap_{w \in W} wBw^{-1} = T.$$

(g) $C_G(T) = T$ かつ Hopf 代数として次の同型が存在．

$$\mathbb{E}[T] \simeq \mathbb{E}[T_1, T_1^{-1}, \cdots, T_r, T_r^{-1}]$$

すなわち $T \simeq (\mathbb{E}^\times)^r$．

(h) B の連結閉正規部分群 U が存在して次が成立．

(i) B は T と U の半直積，すなわち $B = TU$ かつ $U \cap T = 1$．

(ii) U はベキ単．すなわち，G を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{E})$ の閉部分群として実現したときすべての $u \in U$ に対して $(u-1)^n = 0$ が成立．

ベキ単という性質は $\mathrm{GL}_n(\mathbb{E})$ の閉部分群としての実現の仕方によらないことが知られている．さて，Tits 系の公理のもっとも重要な帰結は Bruhat 分解

$$G = \bigsqcup_{w \in W} BwB$$

である．本書では一般線形群のみを扱うので簡約 BN 対の公理をもとに理論展開する必要はなく，本書で必要な性質だけを初等的な方法で証明しておけば十分である．まず Bruhat 分解から始めよう．

命題 1.2　S_n を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{E})$ および $\mathrm{GL}_n(q)$ の部分群とみなすとき次が成立．

(1) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{E}) = \coprod_{w \in S_n} B_n w B_n$.

(2) $\mathrm{GL}_n(q) = \coprod_{w \in S_n} B_n(q) w B_n(q)$.

証明　証明はまったく同じであるから (2) のみ示す．$B_n(q)^{\mathrm{op}}$ を可逆な下三角行列の全体とし，

Dipper-James

$$\mathrm{GL}_n(q) = \coprod_{w \in S_n} B_n(q)^{\mathrm{op}} w B_n(q)$$

を示そう．単位行列を $(e_1, \cdots, e_n)$ と書く．

$g \in \mathrm{GL}_n(q)$ に対して，まず 1 列目を見る．g の $(i, 1)$ 成分が $1 \leq i < i_1$ で 0 で，$i = i_1$ のとき初めて 0 でない値が成分として現われたとすると，基本行列

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & \vdots & \ddots & & \\ & & \lambda & \cdots & 1 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & \lambda & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

を左からかける行基本変形で $g = (e_{i_1} \mid * \cdots *)$ と変形できる．次に基本行列

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & \cdots & \lambda & \\ & & & \ddots & \vdots & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

を右からかける列基本変形でさらに i_1 行目を $(1, 0, \cdots, 0)$ に出来る．ここで，列ベクトルの 1 次独立性に注目すれば，この行列から i_1 行目と 1 列目を除いて得られる行列もまた可逆行列であるから，以下同様の操作を繰り返せば，

$$(e_{i_1} \mid * \cdots *) \mapsto (e_{i_1}, e_{i_2} \mid * \cdots *) \mapsto \cdots \mapsto (e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_n}) \in S_n$$

となり，

$$\mathrm{GL}_n(q) = \bigcup_{w \in S_n} B_n(q)^{\mathrm{op}} w B_n(q)$$

である．今，w_0 を $1 \leq i \leq n$ に対し $(i, n+1-i)$ 成分が 1，それ以外の成分が 0 の行列とすると，$w_0 \in S_n$ かつ $B_n(q)^{\mathrm{op}} = w_0^{-1} B_n(q) w_0$ であるから，

$$\mathrm{GL}_n(q) = w_0 \, \mathrm{GL}_n(q) = \bigcup_{w \in S_n} B_n(q) w_0 w B_n(q)$$

を得る．ここで，$B_n(q)w_1B_n(q) = B_n(q)w_2B_n(q)$ としよう．このとき，

$$w_1 = g^{-1}w_2h \quad (g, h \in B_n(q))$$

と書けるから，

$$w_2^{-1}gw_1e_{w_1^{-1}(i)} = w_2^{-1}ge_i = w_2^{-1}(g_{ii}e_i + \cdots) = g_{ii}e_{w_2^{-1}(i)} + \cdots$$

つまり $he_{w_1^{-1}(i)}$ に $e_{w_2^{-1}(i)}$ が現れるので $w_2^{-1}(i) \leq w_1^{-1}(i)$ である．同様に

$$w_1^{-1}g^{-1}w_2e_{w_2^{-1}(i)} = g_{ii}^{-1}e_{w_1^{-1}(i)} + \cdots$$

つまり $h^{-1}e_{w_2^{-1}(i)}$ に $e_{w_1^{-1}(i)}$ が現れるので $w_1^{-1}(i) \leq w_2^{-1}(i)$ である．よって $w_1 = w_2$ となる． □

系 1.1　1 変数多項式環 $\mathbb{Z}[t]$ 中で次の等式が成立.

$$\sum_{w \in S_n} t^{\ell(w)} = (1+t)(1+t+t^2)\cdots(1+t+\cdots+t^{n-1})$$

証明　$B_n(q)wB_n(q)/B_n(q)$ には $B_n(q)$ が左から作用し，$wB_n(q)/B_n(q)$ の固定化群は $B_n(q) \cap wB_n(q)w^{-1}$ だから，$b = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in B_n(q)$ が固定化群に属するのは，$i > j$ のとき $b_{w(i)w(j)} = 0$ をみたすときである．よって $i < j$ に対し b_{ij} に任意の $\mathbb{F}_q$ の元を書きこめるのは $w^{-1}(i) < w^{-1}(j)$ のときであるから，固定化群の位数は

$$q^{\frac{n(n-1)}{2} - \ell(w^{-1})}(q-1)^n$$

となり，

$$|B_n(q)wB_n(q)/B_n(q)| = \frac{q^{\frac{n(n-1)}{2}}(q-1)^n}{q^{\frac{n(n-1)}{2} - \ell(w^{-1})}(q-1)^n} = q^{\ell(w)}$$

を得る．他方

$$|\,\mathrm{GL}_n(q)/B_n(q)| = \frac{q^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^{n}(q^i - 1)}{q^{\frac{n(n-1)}{2}}(q-1)^n} = \prod_{i=1}^{n} \frac{q^i - 1}{q - 1}$$

であるから，Bruhat 分解より題意の式に $t = q$ と代入した式を得る．ここで，q は任意の p ベキだったからこれは恒等式である． □

次が BN 対の公理の中心をなす性質である．

命題 1.3 $s_i B_n(q) w \subseteq B_n(q) s_i w B_n(q) \cup B_n(q) w B_n(q)$ であり，

(1) $w^{-1}(i) < w^{-1}(i+1)$ ならば，$s_i B_n(q) w \subseteq B_n(q) s_i w B_n(q)$.

(2) $w^{-1}(i) > w^{-1}(i+1)$ ならば，$s_i B_n(q) w \cap B_n(q) w B_n(q) \neq \varnothing$.

証明 $w(k) = i_k$ と書くことにする．$g \in B_n(q)w$ の k 列目は $ge_k = gw^{-1}e_{w(k)} = gw^{-1}e_{i_k}$ より $gw^{-1} \in B_n(q)$ の i_k 列目であるから，i_k 行目に 0 でない成分があり，$i_k + 1, \cdots, n$ 行目は 0 である．また逆にこの条件を満たせば $g \in B_n(q)w$ である．故に，g の k 列目の $\begin{pmatrix} i \text{ 行目} \\ i+1 \text{ 行目} \end{pmatrix}$ 成分は

(1) $i_k > i+1$ ならば $\binom{*}{*}$

(2) $i_k = i+1$ ならば $\binom{*}{*\neq 0}$

(3) $i_k = i$ ならば $\binom{*\neq 0}{0}$

(4) $i_k < i$ ならば $\binom{0}{0}$

となっている．$w(a) = i, w(b) = i+1$ により a, b を定め，$s_i g \in s_i B_n(q) w$ の k 列目を考えよう．$k \neq a, b$ とすると，$i_k \neq i, i+1$ だから (1) または (4) が起こり，したがって i 行目と $i+1$ 行目を交換すると $s_i g$ の k 列目は，

- i_k 行目が 0 でない成分で，
- $i_k + 1, \cdots, n$ 行目の成分は 0

となっている．

次に，$k \in \{a, b\}$ つまり $i_k = i$ または $i_k = i+1$ のときを考えよう．ここで，題意にあるように次の 2 通りの場合が起こる．

(A) $w^{-1}(i) < w^{-1}(i+1)$，つまり $a < b$ ならば，

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{cc} a \text{ 列目} & b \text{ 列目} \end{array} \\ \begin{array}{r} i \text{ 行目} \\ i+1 \text{ 行目} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & * \neq 0 \\ * \neq 0 & * \end{pmatrix} \end{array}$$

となる．ここで 2 次行列の積に関して，$a_{12} \neq 0, a_{21} \neq 0$ ならば

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{a_{22}}{a_{21}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix}$$

となるので，右から $B_n(q)$ の元をかけることにより

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{cc} a\text{ 列目} & b\text{ 列目} \end{array} \\ \begin{array}{r} i\text{ 行目} \\ i+1\text{ 行目} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & * \neq 0 \\ * \neq 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

と出来る．$k \notin \{a, b\}$ の列に対する最初の考察と併せ考えれば，この最後に得られた行列は $B_n(q)s_iw$ の元であるから，

$$s_iB_n(q)w \subseteq B_n(q)s_iwB_n(q)$$

が示された．

(B) $w^{-1}(i) > w^{-1}(i+1)$，つまり $a > b$ ならば，

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{cc} b\text{ 列目} & a\text{ 列目} \end{array} \\ \begin{array}{r} i\text{ 行目} \\ i+1\text{ 行目} \end{array} & \begin{pmatrix} * \neq 0 & 0 \\ * & * \neq 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

となる．次の 2 通りに場合分けをしよう．

- b 列目が $\left(\begin{smallmatrix} *\neq 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ のとき．このときは既に $B_n(q)s_iwB_n(q)$ の元である．
- b 列目が $\left(\begin{smallmatrix} *\neq 0 \\ *\neq 0 \end{smallmatrix}\right)$ のとき．(1) と同様に 2 次行列の積を考えると，

$a_{11} \neq 0, a_{21} \neq 0, a_{22} \neq 0$ ならば

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{a_{22}}{a_{21}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & -\dfrac{a_{11}a_{22}}{a_{21}} \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix}$$

なので，右から $B_n(q)$ の元をかけることにより

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} b\text{ 列目} & a\text{ 列目} \end{array} \\ \begin{array}{c} i\text{ 行目} \\ i+1\text{ 行目} \end{array} & \begin{pmatrix} *\neq 0 & *\neq 0 \\ *\neq 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

の形になる．つまりこのときは $B_n(q)wB_n(q)$ の元になっているので，とくに $s_iB_n(q)w \cap B_n(q)wB_n(q) \neq \varnothing$ が成立する． □

補題 1.9 より，命題 1.3 を次のように言い換えてもよい．

命題 1.4

(i) $\gamma(s_iw) = \gamma(w) + 1$ ならば $s_iB_n(q)w \subseteq B_n(q)s_iwB_n(q)$.

(ii) $\gamma(s_iw) = \gamma(w) - 1$ ならば $s_iB_n(q)w \cap B_n(q)wB_n(q) \neq \varnothing$.

また，命題 1.3 とまったく同じ証明で次が示される．

命題 1.5 $s_iB_nw \subseteq B_ns_iwB_n \cup B_nwB_n$ であり，

(1) $w^{-1}(i) < w^{-1}(i+1)$ ならば，$s_iB_nw \subseteq B_ns_iwB_n$.

(2) $w^{-1}(i) > w^{-1}(i+1)$ ならば，$s_iB_nw \cap B_nwB_n \neq \varnothing$.

1.7 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{E})$ および $\mathrm{GL}_n(q)$ の標準放物型部分群の分類

本節では標準放物型部分群を分類しよう．$\mathrm{GL}_n(\mathbb{E})$ でも $\mathrm{GL}_n(q)$ でも議論は同じであるから，以下では $\mathrm{GL}_n(q)$ だけ考える．

補題 1.17 S_μ を Young 部分群とする．このとき，$B_n(q)S_\mu B_n(q)$ は $\mathrm{GL}_n(q)$ の部分群である．

証明 $B_n(q), S_\mu$ は群なので $g \in B_n(q)S_\mu B_n(q)$ なら $g^{-1} \in B_n(q)S_\mu B_n(q)$ は明らか．各 $w \in S_\mu$ に対し最短表示 $w = s_{i_1} \cdots s_{i_r}$ をひとつ固定する．このとき，補題 1.11 より $s_{i_1}, \cdots, s_{i_r} \in I_\mu$ だから，命題 1.3 より

$$s_{i_1}B_n(q)s_{i_2}B_n(q) \cdots s_{i_r}B_n(q)S_\mu B_n(q) \subseteq B_n(q)S_\mu B_n(q)$$

が成り立つ．これから特に，$w \in S_\mu$ に対し

$$B_n(q)wB_n(q)S_\mu B_n(q) \subseteq B_n(q)S_\mu B_n(q)$$

が成り立つから，$B_n(q)S_\mu B_n(q)$ は積に関しても閉じている．　□

定義 1.20　S_μ を Young 部分群とするとき，$P_\mu(q) := B_n(q)S_\mu B_n(q)$ を μ から定まる**標準放物型部分群**とよぶ．

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{E})$ でも同様にして $P_\mu := B_n S_\mu B_n$ を μ から定まる標準放物型部分群とよぶ．F を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{E})$ に対して以前定義した標準 Frobenius 写像，すなわち各成分を q 乗する写像とすると，$F(P_\mu) = P_\mu$ かつ $P_\mu(q) = P_\mu^F$ である．

ただし，一般には標準 Frobenius 写像が Weyl 群の Coxeter 生成元を固定するわけではないのでこれは今の場合の特殊性である．

具体的には次の形の可逆な上三角ブロック行列の全体が $P_\mu(q)$ である．

$$P_\mu(q) = \left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \overset{\mu_1}{\longleftrightarrow} & \overset{\mu_2}{\longleftrightarrow} & \\ \end{array} \\ \begin{pmatrix} \boxed{*} & * & * \\ 0 & \boxed{*} & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix} \end{array} \right\} \subseteq \mathrm{GL}_n(q).$$

定義 1.21　$\mu \vDash n$ とすると，$P_\mu(q)$ のブロック対角成分は

$$\mathrm{GL}_{\mu_1}(q) \times \mathrm{GL}_{\mu_2}(q) \times \cdots$$

であるが，これを $L_\mu(q)$ と書き，$P_\mu(q)$ の **Levi 部分**とよぶ．このとき自然な全射群準同型 $P_\mu(q) \to L_\mu(q)$ が存在する．次の完全系列

$$1 \to U_\mu(q) \to P_\mu(q) \to L_\mu(q) \to 1$$

により $U_\mu(q)$ を定め，これを $P_\mu(q)$ の**ベキ単根基**とよぶ．要するにブロック対角部分が単位行列である $P_\mu(q)$ の元全体が $U_\mu(q)$ である．

補題 1.18　$w \in S_n$ に対し，$w = s_{i_1} \cdots s_{i_r}$ を最短表示とし

$$I(w) = \{s \in S \mid s = s_{i_j} \text{ となる } j \text{ が存在.}\}$$

とおく．このとき，$\mu \vDash n$ を $I_\mu = I(w)$ により定めると $P_\mu(q) = \langle B_n(q), w\rangle$ である．

証明 $\ell(w)$ に関する帰納法で示す．$\ell(w) = 0$ のときは明らか．$\ell(w) > 0$ のとき $w' = s_{i_2} \cdots s_{i_r}$ とおけば帰納法の仮定より $I_{\mu'} = I(w')$ として

$$P_{\mu'}(q) = \langle B_n(q), w'\rangle$$

である．また，命題 1.4 より，$s_{i_1} B_n(q) w \cap B_n(q) w B_n(q) \neq \varnothing$ だから，$b_1, b_2, b_3 \in B_n(q)$ が存在して $s_{i_1} b_1 w = b_2 w b_3$ と書ける．よって

$$s_{i_1} = b_2 w b_3 w^{-1} b_1^{-1} \in \langle B_n(q), w\rangle$$

を得る．特に $w' = s_{i_1} w \in \langle B_n(q), w\rangle$ となるので

$$P_{\mu'}(q) = \langle B_n(q), w'\rangle \subseteq \langle B_n(q), w\rangle$$

である．故に

$$s_{i_2}, \cdots, s_{i_r} \in B_n(q) S_{\mu'} B_n(q) = P_{\mu'}(q) \subseteq \langle B_n(q), w\rangle$$

だから，$s_{i_1} \in \langle B_n(q), w\rangle$ と併せて次の包含関係を得る．

$$P_\mu(q) \subseteq \langle B_n(q), s_{i_1}, \cdots, s_{i_r}\rangle \subseteq \langle B_n(q), w\rangle \subseteq P_\mu(q).$$

よって，$P_\mu(q) = \langle B_n(q), w\rangle$ が示された． □

ここでは証明しないが実は $I(w)$ は w の最短表示の取り方に依らず決まり，$\mathrm{supp}(w)$ という記号で表す習慣である．

次の命題より，$\mathrm{GL}_n(q)$ の標準放物型部分群は $\{P_\mu(q)\}_{\mu \vDash n}$ 以外ないことがわかる．

命題 1.6 P が $\mathrm{GL}_n(q)$ の標準放物型部分群ならば，ある $\mu \vDash n$ が存在して $P = P_\mu(q)$ と書ける．

証明 Bruhat 分解より，S_n の部分群 W が存在して

$$P = \coprod_{w \in W} B_n(q) w B_n(q)$$

と書ける．各 $w \in W$ に対しその最短表示をひとつ固定し，$\mu \vDash n$ を

$$I_\mu = \bigcup_{w \in W} I(w), \quad \text{ただし } I(w) = \{s \in S \mid s \text{ は } w \text{ の最短表示に現れる}\}$$

により定める. すると $W \subseteq S_\mu$ より $P \subseteq P_\mu(q)$ であるが，他方 $w \in W$ に対して補題 1.18 より

$$I(w) \subseteq B_n(q) S_{I(w)} B_n(q) = \langle B_n(q), w \rangle \subseteq P$$

なので $I \subseteq P$ である．特に $S_\mu \subseteq P$ なので $P_\mu(q) = B_n(q) S_\mu B_n(q) \subseteq P$ を得る．つまり逆の包含関係も得られたので，$P = P_\mu(q)$ の形である． □

補題 1.19 $w \in S_n$ に対し次が成立.

(1) $P_\mu(q) w P_\nu(q) = B_n(q) S_\mu w S_\nu B_n(q)$

(2) $(P_\mu(q) w P_\nu(q)) \cap S_n = S_\mu w S_\nu$

証明 命題 1.3 より $s_i B_n(q) w \subseteq B_n(q) s_i w B_n(q) \cup B_n(q) w B_n(q)$ だから，$v \in S_\mu$ の長さに関する帰納法で $S_\mu B_n(q) w \subseteq B_n(q) S_\mu w B_n(q)$ を得る．同様に，$w B_n(q) S_\nu \subseteq B_n(q) w S_\nu B_n(q)$ が成立．故に

$$\begin{aligned} S_\mu w B_n(q) S_\nu &= \bigcup_{w' \in S_\mu w} w' B_n(q) S_\nu \\ &\subseteq \bigcup_{w' \in S_\mu w} B_n(q) w' S_\nu B_n(q) = B_n(q) S_\mu w S_\nu B_n(q) \end{aligned}$$

となる．よって，

$$\begin{aligned} P_\mu(q) w P_\nu(q) &= B_n(q)(S_\mu B_n(q) w) B_n(q) S_\nu B_n(q) \\ &\subseteq B_n(q)(S_\mu w B_n(q) S_\nu) B_n(q) \\ &\subseteq B_n(q) S_\mu w S_\nu B_n(q) \subseteq P_\mu(q) w P_\nu(q). \end{aligned}$$

故に $P_\mu(q) w P_\nu(q) = B_n(q) S_\mu w S_\nu B_n(q)$ となって (1) が示された．ここで Bruhat 分解より $(B_n(q) w B_n(q)) \cap S_n = \{w\}$ なので

$$(P_\mu(q)wP_\nu(q)) \cap S_n = (B_n(q)S_\mu w S_\nu B_n(q)) \cap S_n = S_\mu w S_\nu$$

となって (2) も示された. □

命題 1.7　$\mathcal{D}_{\mu\nu}$ は $P_\mu(q)\backslash \mathrm{GL}_n(q)/P_\nu(q)$ の完全代表系である.

証明　$w \mapsto P_\mu(q)wP_\nu(q)$ により写像

$$\mathcal{D}_{\mu\nu} \to P_\mu(q)\backslash \mathrm{GL}_n(q)/P_\nu(q)$$

を定める. Bruhat 分解より, 任意の $(P_\mu(q), P_\nu(q))$-両側剰余類は $P_\mu(q)wP_\nu(q)$ と書けるが, 補題 1.19(1) より $P_\mu(q)wP_\nu(q) = B_n(q)S_\mu w S_\nu B_n(q)$ なので, w として $S_\mu\backslash S_n/S_\nu$ の完全代表系である $\mathcal{D}_{\mu\nu}$ の元を取れる. つまりこの写像は全射である. 他方, $P_\mu(q)w_1P_\nu(q) = P_\mu(q)w_2P_\nu(q)$ ならば, 補題 1.19(2) より $S_\mu w_1 S_\nu = S_\mu w_2 S_\nu$ なので, $w_1, w_2 \in \mathcal{D}_{\mu\nu}$ より $w_1 = w_2$ となり, この写像は単射でもある. □

定理 1.2　$\{P_\mu(q)\}_{\mu\vDash n}$ は放物型部分群の共役類の完全代表系である.

証明　ある $g \in \mathrm{GL}_n(q)$ に対して $P_\mu(q) = gP_\nu(q)g^{-1}$ と書けたとすると, 命題 1.7 より $w \in \mathcal{D}_{\mu\nu}$ が存在して $P_\mu(q) = wP_\nu(q)w^{-1}$ となる. 順列 $w(1)\cdots w(n)$ の中に現われる $1, \cdots, \mu_1$ に対し,

$$w(i) = i \quad (1 \le i \le \mu_1)$$

であることを示そう. 実際, そうでないとすれば $1 \le a < b \le n$ であって $w(a) > \mu_1, w(b) \le \mu_1$ を満たすものが存在するから, E_{ij} を行列単位として

$$1 + \mathbb{F}_q E_{w(a)w(b)} = w(1 + \mathbb{F}_q E_{ab})w^{-1} \subseteq wP_\nu(q)w^{-1} = P_\mu(q)$$

となり矛盾である. 以下, 同様に考えれば w が単位元であることがわかり $P_\mu(q) = P_\nu(q)$, つまり $\mu = \nu$ を得る. □

$P = wP_\mu(q)w^{-1}$（$w \in S_n$）の形の放物型部分群に対しても, Levi 部分とベキ単根基を定義しておこう.

定義 1.22　放物型部分群 P が $P = wP_\mu(q)w^{-1}$（$w \in S_n$）の形とする.

このとき，$U := wU_\mu(q)w^{-1}$ を P の**ベキ単根基**とよび，$L := wL_\mu(q)w^{-1}$ を P の **Levi 部分**とよぶ.

次章では，Levi 部分群 L がまず与えられて，それに対して $P = wP_\mu(q)w^{-1}$ の形の放物型部分群を取ることになる．たとえば,

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 & * & 0 \\ 0 & * & 0 & * \\ * & 0 & * & 0 \\ 0 & * & 0 & * \end{pmatrix} \right\}$$

のとき $\mu = (2,2) \models 4$ で

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & 0 & * \\ * & * & * & * \\ 0 & * & 0 & * \end{pmatrix} \right\} \qquad P = \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 & * & 0 \\ * & * & * & * \\ * & 0 & * & 0 \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \right\}$$

などを取る.

第 2 章

Harish-Chandra 系列

2.1　Harish-Chandra 誘導

種々の Lie 理論において既約表現を分類する基本原理は Harish-Chandra 系列の理論である．本書でも Harish-Chandra 系列への分割および各 Harish-Chandra 系列に属する既約 $\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)$-加群の分類という方針で進む．Harish-Chandra 誘導を定義するところから始めよう．

まず，G を有限群，H を G の部分群とするとき，有限次元 $\mathbb{F}G$-加群 M に対し $\mathrm{Ind}_H^G(M) := \mathbb{F}G \boxtimes_{\mathbb{F}H} M$ と定義するのであった．このとき $m \mapsto 1 \boxtimes m$ $(m \in M)$ により $\iota : M \to \mathrm{Ind}_H^G(M)$ が定義され，$(\mathrm{Ind}_H^G(M), \iota)$ は次の普遍性をもつ．

> 任意の $\mathbb{F}G$-加群 N と $\mathbb{F}H$-加群準同型 $M \to \mathrm{Res}_H^G(N)$ に対し $\mathbb{F}G$-加群準同型 $\mathrm{Ind}_H^G(M) \to N$ が唯 1 つ存在して $\mathbb{F}$ 上の線形写像として次の可換図式が成立．

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r] \arrow[d, "\iota"'] & N \\
\mathrm{Ind}_H^G(M) \arrow[ur, dashed, "\exists 1"'] &
\end{tikzcd}$$

すなわち任意の $N \in \mathbb{F}G\text{-}\mathrm{mod}$ に対して $f \mapsto f|_M := f \circ \iota$ により

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}G}(\mathrm{Ind}_H^G(M), N) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}H}(M, \mathrm{Res}_H^G(N))$$

が成立する．この事実は **Frobenius 相互律**とよばれ，有限群の群代数だけにとどまらずかなり一般的な状況で成立する．

$f : M \to N$ を $\mathbb{F}H$-加群準同型とすると普遍性より f の延長

$$\mathrm{Ind}_H^G(f) : \mathrm{Ind}_H^G(M) \to \mathrm{Ind}_H^G(N)$$

が唯 1 つ存在する．具体的には

$$\mathrm{Ind}_H^G(f)(g \boxtimes m) = g \boxtimes f(m) \quad (g \in G,\ m \in M)$$

で与えられる．これが誘導関手 $\mathrm{Ind}_H^G : \mathbb{F}H\text{-}\mathrm{mod} \to \mathbb{F}G\text{-}\mathrm{mod}$ であった．

補題 2.1

(1) Frobenius 相互律は $\mathbb{F}H$-加群 M と $\mathbb{F}G$-加群 N の 2 つの変数に関して自然である．すなわち，$\mathbb{F}H$-加群準同型 $M' \to M$ と $\mathbb{F}G$-加群準同型 $N \to N'$ に対し，

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}G}(\mathrm{Ind}_H^G(M), N) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}H}(M, \mathrm{Res}_H^G(N)) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}G}(\mathrm{Ind}_H^G(M'), N') \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}H}(M', \mathrm{Res}_H^G(N'))
\end{tikzcd}$$

が成立する．

(2) Ind_H^G は Res_H^G の左随伴関手である．

証明　(1) $\psi : M' \to M$，$\varphi : N \to N'$ とおくと，示すべきは $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}G}(\mathrm{Ind}_H^G(M), N)$ に対し

$$(\varphi \circ f \circ \mathrm{Ind}_H^G(\psi))|_{M'} = \varphi \circ f|_M \circ \psi$$

であるが，これは明らか．(2) は Frobenius 相互律が 2 つの変数に関して自然な同型である，ということを言い換えたにすぎない．　□

他方，有限群の群代数である特殊性として次の補題が成立する．この補題は中山関係式とよばれるが，上の補題と一緒に Frobenius 相互律とひとくくりにされることも多い．

補題 2.2 Ind_H^G は Res_H^G の右随伴関手でもある．

証明 $G/H = \{g_i H\}_{1 \leq i \leq |G/H|}$ と左剰余類の代表系をとる．$\mathbb{F}G$ を $(\mathbb{F}H, \mathbb{F}G)$-両側加群とみなし，$\mathbb{F}H$-加群 N に対し

$$\varPhi : \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}H}(\mathbb{F}G, N) \to \mathbb{F}G \boxtimes_{\mathbb{F}H} N = \mathrm{Ind}_H^G(N)$$

を $\varPhi(f) = \sum g_i \boxtimes f(g_i^{-1})$ と定義すると，$\varPhi$ は $\mathbb{F}G$-加群としての同型を与える．

実際，$g \in G$ に対し $g^{-1} g_i = g_{i'} h_i$ $(h_i \in H)$ と書くと

$$\begin{aligned} \varPhi(gf) &= \sum g_i \boxtimes f(g_i^{-1} g) = \sum g_i \boxtimes f(h_i^{-1} g_{i'}^{-1}) \\ &= \sum_i g_i h_i^{-1} \boxtimes f(g_{i'}^{-1}) = \sum_{i'} g g_{i'} \boxtimes f(g_{i'}^{-1}) = g\varPhi(f) \end{aligned}$$

であるから，$\varPhi$ は $\mathbb{F}G$-加群準同型である．

$\varPhi(f) = 0$ とすると，$f(g_i^{-1}) = 0$ より $f(hg_i^{-1}) = hf(g_i^{-1}) = 0$ であるが，$G = \coprod H g_i^{-1}$ なので f は G 上恒等的に 0 である．故に $\varPhi$ は単射である．

他方，$\sum g_i \boxtimes n_i \in \mathbb{F}G \boxtimes_{\mathbb{F}H} N$ に対し，$f(hg_i^{-1}) = hn_i$ $(h \in H)$ により $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}H}(\mathbb{F}G, N)$ を定義すれば $\varPhi(f) = \sum g_i \boxtimes n_i$ である．故に $\varPhi$ は全射でもあるから，$\varPhi$ が $\mathbb{F}G$-加群同型であることが証明された．

$\varPhi$ は変数 N に関して自然，すなわち，$\mathbb{F}H$-加群準同型 $N \to N'$ に対し

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}H}(\mathbb{F}G, N) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Ind}_H^G(N) \arrow[d] \\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}H}(\mathbb{F}G, N') \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Ind}_H^G(N') \end{tikzcd}$$

が成り立つので，$\mathbb{F}G$-加群準同型 $M' \to M$ に対し

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}G}(M, \mathrm{Ind}_H^G(N)) \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}G}(M, \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}H}(\mathbb{F}G, N)) \arrow[l, "\sim"'] \arrow[d] \\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}G}(M', \mathrm{Ind}_H^G(N')) & \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}G}(M', \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}H}(\mathbb{F}G, N')) \arrow[l, "\sim"'] \end{tikzcd}$$

であり，しかも

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}G}(M, \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}H}(\mathbb{F}G, N)) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}H}(\mathbb{F}G \boxtimes_{\mathbb{F}G} M, N) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}H}(\mathrm{Res}_H^G(M), N) \end{aligned}$$

を $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}G}(M, \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}H}(\mathbb{F}G, N))$ に対し $g \boxtimes m \mapsto f(m)(g)$ で与えれば

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}G}(M, \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}H}(\mathbb{F}G, N)) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}H}(\mathrm{Res}_H^G(M), N) \arrow[d] \\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}G}(M', \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}H}(\mathbb{F}G, N')) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}H}(\mathrm{Res}_H^G(M'), N') \end{tikzcd}$$

なので題意を得る．　□

定義 2.1　$\mu \vDash n, \nu \vDash n$ かつ μ が ν の細分のとき

$$P_\mu^\nu(q) := P_\mu(q) \cap L_\nu(q), \quad U_\mu^\nu(q) := U_\mu(q) \cap L_\nu(q)$$

とおく．また，ベキ単元 $e_\mu^\nu \in \mathbb{F}U_\mu^\nu(q)$ を

$$e_\mu^\nu := \frac{1}{|U_\mu^\nu(q)|} \sum_{u \in U_\mu^\nu(q)} u$$

により定義する．また，$\nu = (n)$ のときは e_μ^ν を e_μ と略記する．

完全系列 $1 \to U_\mu^\nu(q) \to P_\mu^\nu(q) \to L_\mu(q) \to 1$ が成り立つ．また，M を $\mathbb{F}L_\mu(q)$-加群とするとき，$U_\mu^\nu(q)$ が 1 で作用するとして M を $\mathbb{F}P_\mu^\nu(q)$-加群とみなしたものを $\mathrm{Infl}_\mu^\nu(M)$ または $\mathrm{Infl}_{L_\mu}^{P_\mu^\nu}(M)$ と書く．このとき，$M \mapsto \mathrm{Infl}_\mu^\nu(M)$ は完全関手

$$\mathrm{Infl}_\mu^\nu : \mathbb{F}L_\mu(q)\text{-}\mathrm{mod} \to \mathbb{F}P_\mu^\nu(q)\text{-}\mathrm{mod}$$

を定める．

$\{le_\mu^\nu | l \in L_\mu(q)\}$ が $\mathbb{F}P_\mu^\nu(q)e_\mu^\nu$ の基底であり，$le_\mu^\nu = e_\mu^\nu l \ (l \in L_\mu(q))$ であることに注意すれば，$\mathbb{F}P_\mu^\nu(q)e_\mu^\nu$ は $(\mathbb{F}P_\mu^\nu(q), \mathbb{F}L_\mu(q))$-両側加群であって

$$\mathrm{Infl}_\mu^\nu(M) = \mathbb{F}P_\mu^\nu(q)e_\mu^\nu \boxtimes_{\mathbb{F}L_\mu(q)} M$$

と書けることがわかる．

定義 2.2　$\mu \vDash n, \nu \vDash n$ とし，μ は ν の細分とする．

$$R_{L_\mu}^{L_\nu}(M) := \mathrm{Ind}_{P_\mu^\nu(q)}^{L_\nu(q)} \circ \mathrm{Infl}_\mu^\nu(M)$$

により完全関手 $R_{L_\mu}^{L_\nu} : \mathbb{F}L_\mu(q)\text{-}\mathrm{mod} \to \mathbb{F}L_\nu(q)\text{-}\mathrm{mod}$ を定め，$L_\mu(q)$ から $L_\nu(q)$ への **Harish-Chandra 誘導**という．

定義が $P_\mu^\nu(q)$ に依存していることを明記したいときは $R_{L_\mu \subseteq P_\mu^\nu}^{L_\nu}$ と書く．

他方，$M \mapsto e_\mu^\nu M$ は完全関手

$$^*\mathrm{Infl}_\mu^\nu : \mathbb{F}P_\mu^\nu(q)\text{-}\mathrm{mod} \to \mathbb{F}L_\mu(q)\text{-}\mathrm{mod}$$

を定める．実際，$l \in L_\mu(q)$ ならば $le_\mu^\nu l^{-1} = e_\mu^\nu$ なので，$e_\mu^\nu M$ は $L_\mu(q)$-加群であり，$f : M \to M'$ を $\mathbb{F}P_\mu^\nu(q)$-加群準同型とすると，Maschke の定理より M は半単純 $\mathbb{F}U_\mu^\nu(q)$-加群であるから，

$$^*\mathrm{Infl}_\mu^\nu : M = e_\mu^\nu M \oplus (1 - e_\mu^\nu)M \mapsto e_\mu^\nu M$$

は $\mathrm{Res}_{U_\mu^\nu(q)}^{P_\mu^\nu(q)}(M)$ から単位表現等質成分を拾うことに他ならない．よって

$$^*\mathrm{Infl}_\mu^\nu(f) : e_\mu^\nu M \to e_\mu^\nu M'$$

が $f|_{e_\mu^\nu M}$ により定義され，$^*\mathrm{Infl}_\mu^\nu$ は完全関手である．

定義 2.3 $\mu \vDash n, \nu \vDash n$ とし，μ は ν の細分とする．

$$^*R_{L_\mu}^{L_\nu}(N) := {}^*\mathrm{Infl}_\mu^\nu \circ \mathrm{Res}_{P_\mu^\nu(q)}^{L_\nu(q)}(N)$$

により完全関手 $^*R_{L_\mu}^{L_\nu} : \mathbb{F}L_\nu(q)\text{-}\mathrm{mod} \to \mathbb{F}L_\mu(q)\text{-}\mathrm{mod}$ を定め，$L_\nu(q)$ から $L_\mu(q)$ への **Harish-Chandra 制限**という．

定義が $P_\mu^\nu(q)$ に依存していることを明記したいときは $^*R_{L_\mu \subseteq P_\mu^\nu}^{L_\nu}$ と書く．

非等標数モジュラー表現論において次の性質は基本的である．

命題 2.1 $^*R_{L_\mu}^{L_\nu}$ は $R_{L_\mu}^{L_\nu}$ の左随伴関手かつ右随伴関手である．

証明 $\mathrm{Res}_{P_\mu^\nu(q)}^{L_\nu(q)}$ は $\mathrm{Ind}_{P_\mu^\nu(q)}^{L_\nu(q)}$ の左かつ右随伴関手であるから，$^*\mathrm{Infl}_\mu^\nu$ が Infl_μ^ν の左かつ右随伴関手であることをいえばよい．

$M \in \mathbb{F}P_\mu^\nu(q)\text{-}\mathrm{mod}$, $N \in \mathbb{F}L_\mu(q)\text{-}\mathrm{mod}$ に対し，M も $\mathrm{Infl}_\mu^\nu(N)$ も $\mathbb{F}U_\mu^\nu(q)$-

加群としては半単純加群であるから，$f : M \to \mathrm{Infl}_\mu^\nu(N)$ や $f : \mathrm{Infl}_\mu^\nu(N) \to M$ を $\mathbb{F}L_\mu(q)$-加群準同型と見ると必ず $e_\mu^\nu M$ を経由する．すなわち，

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Infl}_\mu^\nu(N), \\
e_\mu^\nu M \oplus (1 - e_\mu^\nu)M \arrow[r] & e_\mu^\nu M \arrow[u, dashed, "\overline{f}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathrm{Infl}_\mu^\nu(N) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, dashed, "\underline{f}"'] & & M. \\
& e_\mu^\nu M \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

そこで

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}P_\mu^\nu(q)}(M, \mathrm{Infl}_\mu^\nu(N)) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}L_\mu(q)}(e_\mu^\nu M, N)$$

を $f \mapsto \overline{f}$ で定め，

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}P_\mu^\nu(q)}(\mathrm{Infl}_\mu^\nu(N), M) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}L_\mu(q)}(N, e_\mu^\nu M)$$

を $f \mapsto \underline{f}$ で定めると共に同型になる．$M' \to M, N \to N'$ に対して図式

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}P_\mu^\nu(q)}(M, \mathrm{Infl}_\mu^\nu(N)) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}L_\mu(q)}(e_\mu^\nu M, N) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}P_\mu^\nu(q)}(M', \mathrm{Infl}_\mu^\nu(N')) \arrow[r, "\simeq"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}L_\mu(q)}(e_\mu^\nu M', N')
\end{tikzcd}$$

の可換性等も明らかに成立するので，この 2 つの同型は共に M, N に関して自然である．よって ${}^*\mathrm{Infl}_\mu^\nu$ は Infl_μ^ν の左随伴関手かつ右随伴関手である．　□

補題 2.3　$G := L_{(n)}$，$\mu \vDash n$, $\nu \vDash n$ かつ μ が ν の細分とすると，自然な同型

$$R_{L_\nu}^G \circ R_{L_\mu}^{L_\nu}(M) \simeq R_{L_\mu}^G(M), \quad {}^*R_{L_\mu}^{L_\nu} \circ {}^*R_{L_\nu}^G(N) \simeq {}^*R_{L_\mu}^G(N)$$

が成り立つ．

証明　$U_\nu(q)$ は $U_\mu(q)$ の正規部分群なので

$$e_\mu = \left(\frac{1}{|U_\mu^\nu(q)|} \sum_{u \in U_\mu^\nu(q)} u \right) \left(\frac{1}{|U_\nu(q)|} \sum_{u \in U_\nu(q)} u \right) = e_\mu^\nu e_\nu$$

であり，

$$^{*}R^{L_\nu}_{L_\mu} \circ {}^{*}R^{G}_{L_\nu}(N) = e^{\nu}_{\mu} e^{(n)}_{\nu} N = e^{(n)}_{\mu} N = {}^{*}R^{G}_{L_\mu}(N)$$

が成り立つ．他方，

$$\begin{aligned} R^{G}_{L_\mu}(M) &= \mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q) \boxtimes_{\mathbb{F}P_\mu(q)} \mathbb{F}P_\mu(q) e_\mu \boxtimes_{\mathbb{F}L_\mu(q)} M \\ &= \mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q) e_\mu \boxtimes_{\mathbb{F}L_\mu(q)} M \end{aligned}$$

だから $R^{G}_{L_\nu} \circ R^{L_\nu}_{L_\mu}(M) = \mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q) e_\nu \boxtimes_{\mathbb{F}L_\nu(q)} \mathbb{F}L_\nu(q) e^{\nu}_{\mu} \boxtimes_{\mathbb{F}L_\mu(q)} M$ から $\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q) e_\nu e^{\nu}_{\mu} \boxtimes_{\mathbb{F}L_\mu(q)} M = R^{G}_{L_\mu}(M)$ への自然な全射準同型が存在する．ここで左辺の次元は

$$\frac{|\,\mathrm{GL}_n(q)|}{|P_\nu(q)|} \frac{|L_\nu(q)|}{|P^{\nu}_{\mu}(q)|} = \frac{|\,\mathrm{GL}_n(q)|}{|U_\nu(q)||L_\mu(q)||U^{\nu}_{\mu}(q)|} = \frac{|\,\mathrm{GL}_n(q)|}{|L_\mu(q)||U_\mu(q)|} = \frac{|\,\mathrm{GL}_n(q)|}{|P_\mu(q)|}$$

より右辺の次元と一致するから，自然な同型

$$R^{G}_{L_\nu} \circ R^{L_\nu}_{L_\mu}(M) \simeq R^{G}_{L_\mu}(M)$$

を得る． □

補題 2.4 $G := L_{(n)}$, $\mu \vDash n$ とすると次が成立．

(1) P が射影 $\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)$-加群ならば $^{*}R^{G}_{L_\mu}(P)$ は射影 $\mathbb{F}L_\mu(q)$-加群．

(2) P が射影 $\mathbb{F}L_\mu(q)$-加群ならば $R^{G}_{L_\mu}(P)$ は射影 $\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)$-加群．

証明 (1) P を直既約加群であるとして一般性を失わないから P は左正則加群 $\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)$ の直和因子であるとしてよい．$\{P_\mu(q) g_i\}_{1 \le i \le |\,\mathrm{GL}_n(q)/P_\mu(q)|}$ を右剰余類 $P_\mu(q) \backslash \mathrm{GL}_n(q)$ の代表系とすると，$\mathbb{F}P_\mu(q)$-加群として

$$\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q) = \bigoplus \mathbb{F}P_\mu(q) g_i \simeq \mathbb{F}P_\mu(q)^{\oplus |\,\mathrm{GL}_n(q)/P_\mu(q)|}$$

であるから，$P \mid \mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)$ の両辺に e_μ をかけて

$$^{*}R^{G}_{L_\mu}(P) = e_\mu P \mid (e_\mu \mathbb{F}P_\mu(q))^{\oplus |\,\mathrm{GL}_n(q)/P_\mu(q)|}$$

を得る．$\mathbb{F}L_\mu(q)$-加群として $e_\mu \mathbb{F}P_\mu(q) \simeq \mathbb{F}L_\mu(q)$ であることに注意すれば $^{*}R^{G}_{L_\mu}(P)$ は射影 $\mathbb{F}L_\mu(q)$-加群である．

(2) P は直既約加群であるとして一般性を失わないから $P \mid \mathbb{F}L_\mu(q)$ とする．このとき

$$\mathrm{Infl}_\mu^{(n)}(P) = \mathbb{F}P_\mu(q)e_\mu \boxtimes_{\mathbb{F}L_\mu(q)} P \mid \mathbb{F}P_\mu(q)e_\mu$$

である．特に $\mathrm{Infl}_\mu^{(n)}(P) \mid \mathbb{F}P_\mu(q)$ を得るから

$$R_{L_\mu}^G(P) \mid \mathrm{Ind}_{P_\mu(q)}^{\mathrm{GL}_n(q)}(\mathbb{F}P_\mu(q)) = \mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)$$

となり，$R_{L_\mu}^G(P)$ は射影 $\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)$-加群である． □

定義 2.4　既約 $\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)$-加群 S が**非 cuspidal 加群**とは，ある $\mu \vDash n$ とある既約 $\mathbb{F}L_\mu(q)$-加群 X が存在して，$\mu \neq (n)$ かつ

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)}(R_{L_\mu}^G(X), S) \neq 0$$

となるときをいう．S が非 cuspidal 加群でないとき **cuspidal 加群**という．

補題 2.5　S を既約 $\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)$-加群とする．このとき次は同値.

(1) S が cuspidal 加群.

(2) すべての $\mu \neq (n)$ に対し ${}^*R_{L_\mu}^G(S) = 0$．ここで $G = L_{(n)}$ である．

証明　(1)⇒(2)　対偶を示す．ある $\mu \neq (n)$ が存在して ${}^*R_{L_\mu}^G(S) \neq 0$ となるならば，既約 $\mathbb{F}L_\mu(q)$-加群 X を $X \subseteq \mathrm{Soc}({}^*R_{L_\mu}^G(S))$ ととれば

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)}(R_{L_\mu}^G(X), S) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}L_\mu(q)}(X, {}^*R_{L_\mu}^G(S)) \neq 0.$$

故に S は非 cuspidal 加群である．

(2)⇒(1)　すべての $\mu \neq (n)$ に対し ${}^*R_{L_\mu}^G(S) = 0$ ならば，任意の既約 $\mathbb{F}L_\mu(q)$-加群 X に対して

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)}(R_{L_\mu}^G(X), S) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}L_\mu(q)}(X, {}^*R_{L_\mu}^G(S)) = 0.$$

故に S は cuspidal 加群． □

ここで以下で必要な有限次元代数の射影加群の基礎事項について復習して

おく．

定義 2.5 A を有限次元代数とする．有限次元 A-加群 M に対し，M の極大真部分加群の共通部分を $\operatorname{Rad} M$ とかく．

M として左正則加群 A を考えると，$\operatorname{Rad} A$ は両側イデアルになり，$A/\operatorname{Rad} A$ は半単純代数になる．任意の既約 A-加群は $A/\operatorname{Rad} A$-加群である．

定義 2.6 A を有限次元代数，M を有限次元 A-加群とする．射影 A-加群 P が M の射影被覆とは，全射 A-加群準同型

$$p : P \longrightarrow M$$

が存在して，P の任意の真部分加群 N に対し $p(N) \neq M$ のときをいう．

各既約 A-加群 S に対し $P(S)$ を射影被覆とすると，$P(S)/\operatorname{Rad} P(S) \simeq S$ で，左正則加群 A は

$$A = \bigoplus_S P(S)^{\oplus \dim S}$$

と直和分解される．また，任意の有限次元 A-加群 M に対し，既約加群 S が M の組成因子に現れる回数は

$$[M : S] = \dim \operatorname{Hom}_A(P(S), M)$$

で与えられる．

次に示す補題は Hiss や Dipper-Du による．

補題 2.6 S を既約 $\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)$-加群，$P(S)$ を S の射影被覆とする．このとき $\mu \vDash n$ に関する次の条件は同値．ただし，$G = L_{(n)}$ であり，triv は自明加群（単位表現を与える加群）を表す．

(a) ${}^*R^G_{L_\mu}(S) \neq 0$.

(b) $\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)}(\operatorname{Ind}^{\mathrm{GL}_n(q)}_{U_\mu(q)}(\mathrm{triv}), S) \neq 0$.

(c) 直既約射影 $\mathbb{F}L_\mu(q)$-加群 Q が存在して $\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)}(R^G_{L_\mu}(Q), S) \neq 0$.

(d) $R^G_{L_\mu} \circ {}^*R^G_{L_\mu}(S)$ は S を組成因子にもつ.

(e) 直既約射影 $\mathbb{F}L_\mu(q)$-加群 Q が存在して $P(S)$ は $R^G_{L_\mu}(Q)$ の直和因子.

(f) $P(S)$ は $R^G_{L_\mu} \circ {}^*R^G_{L_\mu}(P(S))$ の直和因子.

証明　(a)⇒(b)　まず

$$\mathrm{Ind}_{U_\mu(q)}^{\mathrm{GL}_n(q)}(\mathrm{triv}) = \mathrm{Ind}_{P_\mu(q)}^{\mathrm{GL}_n(q)} \circ \mathrm{Ind}_{U_\mu(q)}^{P_\mu(q)}(\mathrm{triv})$$

かつ，$\mathrm{Ind}_{U_\mu(q)}^{P_\mu(q)}(\mathrm{triv})$ は置換加群 $\mathbb{F}P_\mu(q)/U_\mu(q)$ に等しい．したがって $\mathbb{F}L_\mu(q)$-加群として左正則加群 $\mathbb{F}L_\mu(q)$ に同型であるが，さらに $U_\mu(q)$ が 1 倍で作用することに注意すれば

$$\mathrm{Ind}_{U_\mu(q)}^{P_\mu(q)}(\mathrm{triv}) \simeq \mathrm{Infl}_\mu^{(n)}(\mathbb{F}L_\mu(q))$$

であるから，$\mathrm{Ind}_{U_\mu(q)}^{\mathrm{GL}_n(q)}(\mathrm{triv}) \simeq R^G_{L_\mu}(\mathbb{F}L_\mu(q))$ を得る．(a) の仮定より

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)}(\mathrm{Ind}_{U_\mu(q)}^{\mathrm{GL}_n(q)}(\mathrm{triv}), S) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)}(R^G_{L_\mu}(\mathbb{F}L_\mu(q)), S)\\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}L_\mu(q)}(\mathbb{F}L_\mu(q), {}^*R^G_{L_\mu}(S)) \neq 0.\end{aligned}$$

(b)⇒(c)　まず左正則加群 $\mathbb{F}L_\mu(q)$ を直既約分解すると

$$\mathbb{F}L_\mu(q) \simeq \bigoplus_{Q:\text{直既約射影 } \mathbb{F}L_\mu(q)\text{-加群}} Q^{\oplus \dim(Q/\operatorname{Rad} Q)}$$

なので，$\mathrm{Ind}_{U_\mu(q)}^{\mathrm{GL}_n(q)}(\mathrm{triv}) \simeq R^G_{L_\mu}(\mathbb{F}L_\mu(q))$ と (b) の仮定より

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)}(R^G_{L_\mu}(\oplus\, Q^{\oplus \dim(Q/\operatorname{Rad} Q)}), S) \neq 0.$$

故にある Q が存在して $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)}(R^G_{L_\mu}(Q), S) \neq 0$.

(c)⇒(a)　$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}L_\mu(q)}(Q, {}^*R^G_{L_\mu}(S)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)}(R^G_{L_\mu}(Q), S) \neq 0$ であるからとくに ${}^*R^G_{L_\mu}(S) \neq 0$ を得る.

(a)⇒(d)　まず

$$[R^G_{L_\mu} \circ {}^*R^G_{L_\mu}(S) : S] = \dim \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)}(P(S), R^G_{L_\mu} \circ {}^*R^G_{L_\mu}(S))$$

$$= \dim \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}L_\mu(q)}({}^*R^G_{L_\mu}(P(S)), {}^*R^G_{L_\mu}(S))$$

である．ここで全射 $P(S) \twoheadrightarrow S$ に e_μ をかけると全射 ${}^*R^G_{L_\mu}(P(S)) \twoheadrightarrow {}^*R^G_{L_\mu}(S)$ が得られるが，(a) の仮定より ${}^*R^G_{L_\mu}(S) \neq 0$ なのでこの全射は 0-map ではなく，$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}L_\mu(q)}({}^*R^G_{L_\mu}(P(S)), {}^*R^G_{L_\mu}(S)) \neq 0$.

(d)⇒(a)　上と同じ式を使うと (d) の仮定より

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}L_\mu(q)}({}^*R^G_{L_\mu}(P(S)), {}^*R^G_{L_\mu}(S)) \neq 0$$

を得るから，とくに ${}^*R^G_{L_\mu}(S) \neq 0$ である．

(c)⇒(e)　仮定より $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)}(R^G_{L_\mu}(Q), S) \neq 0$ であるが，補題 2.4 より $R^G_{L_\mu}(Q)$ は射影加群だから，

$$\begin{tikzcd}
P(S) \arrow[r] & S \arrow[r] & 0 \\
 & R^G_{L_\mu}(Q). \arrow[u, "\neq 0"'] \arrow[ul, dashed, "\exists\phi"]
\end{tikzcd}$$

ここで ϕ が全射でないとすれば，$\mathrm{Rad}\,P(S)$ が $P(S)$ の唯 1 つの極大部分加群であることから $\mathrm{Im}(\phi) \subseteq \mathrm{Rad}\,P(S)$ であるが，これは ϕ と $P(S) \to S$ の合成が 0-map でないことに矛盾する．したがって ϕ は全射であって，

$$\begin{tikzcd}
R^G_{L_\mu}(Q) \arrow[r] & P(S) \arrow[r] & 0 \\
 & P(S) \arrow[u, equal] \arrow[ul, dashed, "\exists"]
\end{tikzcd}$$

と切断が取れるので $P(S) \mid R^G_{L_\mu}(Q)$.

(e)⇒(c)　$R^G_{L_\mu}(Q)$ から $P(S)$ への射影と $P(S) \to S$ を合成すればこれは 0-map ではなく，$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)}(R^G_{L_\mu}(Q), S) \neq 0$ を得る．

(d)⇒(f)　(d) の仮定より $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)}(P(S), R^G_{L_\mu} \circ {}^*R^G_{L_\mu}(S)) \neq 0$ だから $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)}(R^G_{L_\mu} \circ {}^*R^G_{L_\mu}(P(S)), S) \neq 0$．したがって

$$\begin{tikzcd}
P(S) \arrow[r] & S \arrow[r] & 0 \\
& R^G_{L_\mu} \circ {}^*R^G_{L_\mu}(P(S)) \arrow[u, "\neq 0"'] \arrow[ul, dashed, "\exists"] &
\end{tikzcd}$$

であって，先ほどと同じ議論から

$$\begin{tikzcd}
R^G_{L_\mu} \circ {}^*R^G_{L_\mu}(P(S)) \arrow[r] & P(S) \arrow[r] & 0 \\
& P(S). \arrow[u, equal] \arrow[ul, dashed, "\exists"] &
\end{tikzcd}$$

故に $P(S) \mid R^G_{L_\mu} \circ {}^*R^G_{L_\mu}(P(S))$ である．

(f)⇒(d)　 $R^G_{L_\mu} \circ {}^*R^G_{L_\mu}(P(S))$ から $P(S)$ への射影と $P(S) \to S$ の合成写像を考えれば

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)}(R^G_{L_\mu} \circ {}^*R^G_{L_\mu}(P(S)), S) \neq 0$$

がわかるから，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)}(P(S), R^G_{L_\mu} \circ {}^*R^G_{L_\mu}(S)) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}L_\mu(q)}({}^*R^G_{L_\mu}(P(S)), {}^*R^G_{L_\mu}(S)) \\
&\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)}(R^G_{L_\mu} \circ {}^*R^G_{L_\mu}(P(S)), S) \neq 0.
\end{aligned}$$

すなわち $[R^G_{L_\mu} \circ {}^*R^G_{L_\mu}(S) : S] \neq 0$ である．　□

2.2　Mackey 公式

補題 2.7　 $\mu, \nu \vDash n, w \in \mathcal{D}_{\mu\nu}, P_1 = P_\mu, P_2 = wP_\nu w^{-1}$ とし，Levi 部分を $L_1 = L_\mu, L_2 = wL_\nu w^{-1}$，ベキ単根基を $U_1 = U_\mu, U_2 = wU_\nu w^{-1}$ とおく．

(1) μ' が μ の細分ならば，$P_{\mu'} \cap L_1$ は L_1 の標準放物型部分群である．

(2) μ' が μ の細分ならば，$P_{\mu'}(q) \cap L_\mu(q)$ は $L_\mu(q)$ の標準放物型部分群である．

(3) $L_1 \cap P_2$ は $L_1 \cap L_2$ を Levi 部分にもつ L_1 の標準放物型部分群である．

(4) $L_\mu(q) \cap wP_\nu(q)w^{-1}$ は $L_\mu(q) \cap wL_\nu(q)w^{-1}$ を Levi 部分にもつ $L_\mu(q)$ の標準放物型部分群である．

(5) $P_1 \cap P_2$ は $P_1 \cap U_2$ を正規部分群とする $P_1 \cap L_2$ との半直積である．

(6) $P_1(q) \cap P_2(q)$ は $P_1(q) \cap U_2(q)$ を正規部分群とする $P_1(q) \cap L_2(q)$ との半直積である．

証明 (1) $I_{\mu'} \subseteq I_\mu$ なので $I_{\mu'}$ の定める L_1 の標準放物型部分群は

$$Q := (B_n \cap L_1) S_{\mu'} (B_n \cap L_1)$$

である．よって $Q = P_{\mu'} \cap L_1$ を示せばよいが，

$$Q \subseteq (B_n S_{\mu'} B_n) \cap L_\mu = P_{\mu'} \cap L_\mu$$

だから，$Q \supseteq P_{\mu'} \cap L_\mu$ を示せばよい．L_μ の Bruhat 分解より

$$L_\mu = (B_n \cap L_\mu) S_\mu (B_n \cap L_\mu)$$

だから，$P_{\mu'} \cap L_\mu$ の元を $b_1, b_2 \in B_n \cap L_\mu, u \in S_\mu$ を用いて $b_1 u b_2$ と書くと，$b_1 u b_2 \in P_{\mu'} = B_n S_{\mu'} B_n$ だから $u \in S_{\mu'}$ を得る．故に

$$P_{\mu'} \cap L_\mu \subseteq (B_n \cap L_\mu) S_{\mu'} (B_n \cap L_\mu) = Q.$$

(2) $P_{\mu'}(q) \cap L_\mu(q)$ は $P_{\mu'} \cap L_1$ の Frobenius 固定点だから，(1) より明らか．

(3) $I_{\mu'} = I_\mu \cap w I_\nu w^{-1}$ により $\mu' \vDash n$ を定めると μ' は μ の細分である．

$$I_1 = \{w(1), \cdots, w(\nu_1)\}, \quad I_2 = \{w(\nu_1 + 1), \cdots, w(\nu_1 + \nu_2)\}, \cdots$$
$$I^{(1)} = \{1, \cdots, \mu_1\}, \quad I^{(2)} = \{\mu_1 + 1, \cdots, \mu_1 + \mu_2\}, \cdots$$

とし，$I_a^{(\alpha)} = I_a \cap I^{(\alpha)}$ とおく．順列 $w(1)w(2)\cdots w(n)$ の中で $1, \cdots, \mu_1$ がこの順に左から右に並んでいることに注意すると，

$$I_1^{(1)} = \{1, \cdots, |I_1^{(1)}|\}, \ I_2^{(1)} = \{|I_1^{(1)}| + 1, \cdots, |I_1^{(1)}| + |I_2^{(1)}|\}, \cdots$$

である．他の $I^{(\alpha)} = I_1^{(\alpha)} \sqcup I_2^{(\alpha)} \sqcup \cdots$ についても同様のことが成り立つ．

$s_i \in I_{\mu'}$ となる必要十分条件は

$$\{i, i+1\} \subseteq \bigsqcup_{a,\alpha} I_a^{(\alpha)}$$

であるから，

$$\mu' = (|I_1^{(1)}|, |I_2^{(1)}|, \cdots, |I_1^{(2)}|, |I_2^{(2)}|, \cdots, \cdots)$$

であり，$P_{\mu'}, L_{\mu'}, P_1, L_1, P_2, L_2$ は次のように書ける．

$$\begin{aligned}
P_{\mu'} &= \left\{ g = (g_{ij}) \in G \;\middle|\; \begin{pmatrix} i \in I^{(\alpha)}, j \in I^{(\beta)}\ (\alpha > \beta)\ \text{又は} \\ i \in I_a^{(\alpha)}, j \in I_b^{(\alpha)}\ (a > b) \end{pmatrix} \text{ならば } g_{ij} = 0 \right\} \\
L_{\mu'} &= \left\{ g = (g_{ij}) \in G \;\middle|\; \begin{pmatrix} i \in I^{(\alpha)}, j \in I^{(\beta)}\ (\alpha \neq \beta)\ \text{又は} \\ i \in I_a^{(\alpha)}, j \in I_b^{(\alpha)}\ (a \neq b) \end{pmatrix} \text{ならば } g_{ij} = 0 \right\} \\
P_1 &= \left\{ g = (g_{ij}) \in G \;\middle|\; \left(i \in I^{(\alpha)}, j \in I^{(\beta)}\ (\alpha > \beta) \right) \text{ならば } g_{ij} = 0 \right\} \\
L_1 &= \left\{ g = (g_{ij}) \in G \;\middle|\; \left(i \in I^{(\alpha)}, j \in I^{(\beta)}\ (\alpha \neq \beta) \right) \text{ならば } g_{ij} = 0 \right\} \\
P_2 &= \left\{ g = (g_{ij}) \in G \;\middle|\; \left(i \in I_a, j \in I_b\ (a > b) \right) \text{ならば } g_{ij} = 0 \right\} \\
L_2 &= \left\{ g = (g_{ij}) \in G \;\middle|\; \left(i \in I_a, j \in I_b\ (a \neq b) \right) \text{ならば } g_{ij} = 0 \right\}
\end{aligned}$$

よって，$L_{\mu'} = L_1 \cap L_2$ かつ $L_1 \cap P_2 = P_{\mu'} \cap L_1$ である．

(1) では $P_{\mu'} \cap L_1 = (B_n \cap L_1) S_{\mu'} (B_n \cap L_1)$ を示したから，$L_1 \cap P_2$ は $L_{\mu'} (= L_1 \cap L_2)$ を Levi 部分に持つ L_1 の標準放物型部分群である．

ちなみに

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & U_{\mu'} \cap L_\mu \arrow[r] & P_{\mu'} \cap L_\mu \arrow[r] \arrow[d, equal] & L_{\mu'} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
& & L_1 \cap P_2 & L_1 \cap L_2 &
\end{tikzcd}$$

より $L_1 \cap P_2$ のベキ単根基は $U_{\mu'} \cap L_\mu = L_1 \cap U_2$ である．

(4)　Frobenius 固定点をとれば (3) より明らか．

(5)　$U_1 \cap P_2$ は $P_1 \cap P_2$ の正規部分群であり，また $L_1 \cap U_1 = 1$ であるから，

$$P_1 \cap P_2 = (L_1 \cap P_2)(U_1 \cap P_2)$$

を示せばよい．$p \in P_1$ を $p = lu\ (l \in L_1, u \in U_1)$ と書くと l は p のブロック対角成分に等しいことに注意すれば，$p \in P_1 \cap P_2$ ならば $l \in L_1 \cap P_2$ であり，

このことから $u \in U_1 \cap P_2$ もしたがう.

(6) Frobenius 固定点をとれば (5) より明らか. □

補題 2.7(4) により

$$R^{L_\mu}_{L_\mu \cap wL_\nu w^{-1} \subseteq L_\mu \cap wP_\nu w^{-1}} : \mathbb{F}(L_\mu(q) \cap wL_\nu(q)w^{-1})\text{-}\operatorname{mod} \to \mathbb{F}L_\mu(q)\text{-}\operatorname{mod}$$

が定義される.

また $w^{-1} \in \mathcal{D}_{\nu\mu}$ に注意すれば, $w^{-1}P_\mu(q)w \cap L_\nu(q)$ は $w^{-1}L_\mu(q)w \cap L_\nu(q)$ を Levi 部分に持つ $L_\nu(q)$ の標準放物型部分群であるから

$${}^*R^{wL_\nu w^{-1}}_{L_\mu \cap wL_\nu w^{-1} \subseteq P_\mu \cap wL_\nu w^{-1}} : \mathbb{F}(wL_\nu(q)w^{-1})\text{-}\operatorname{mod} \to \mathbb{F}(L_\mu(q) \cap wL_\nu(q)w^{-1})\text{-}\operatorname{mod}$$

が定義される.

定義 2.7 $\mu, \nu \vDash n$ とする. $\mathbb{F}L_\nu(q)$-加群 M に対して, $g \in wL_\nu(q)w^{-1}$ の作用を $g \cdot m := (w^{-1}gw)m$ により定め $\mathbb{F}wL_\nu(q)w^{-1}$-加群とみなしたものを ${}^wM$ または $w \otimes M$ と書く.

G を有限群とし, H, K を G の部分群とするとき, 関手

$$\operatorname{Res}^G_K \circ \operatorname{Ind}^G_H \ : \ \mathbb{F}H\text{-}\operatorname{mod} \to \mathbb{F}K\text{-}\operatorname{mod}$$

を関手 $\operatorname{Ind}^K_L \circ \operatorname{Res}^H_L$ $(L \subseteq K \cap H)$ を用いて書き換える式を Mackey 公式と呼んだ. 次の定理は Harish-Chandra 誘導の Mackey 公式と呼ばれる.

定理 2.1 $\mu, \nu \vDash n$, $G = L_{(n)}$ とする.

$$\begin{cases} R^{L_\mu}_{L_\mu \cap wL_\nu w^{-1}} & := R^{L_\mu}_{L_\mu \cap wL_\nu w^{-1} \subseteq L_\mu \cap wP_\nu w^{-1}} \\ {}^*R^{wL_\nu w^{-1}}_{L_\mu \cap wL_\nu w^{-1}} & := {}^*R^{wL_\nu w^{-1}}_{L_\mu \cap wL_\nu w^{-1} \subseteq P_\mu \cap wL_\nu w^{-1}} \end{cases}$$

とすると, $\mathbb{F}L_\nu(q)$-加群 M に対し次の同型が存在する.

$${}^*R^G_{L_\mu} \circ R^G_{L_\nu}(M) \simeq \bigoplus_{w \in \mathcal{D}_{\mu\nu}} R^{L_\mu}_{L_\mu \cap wL_\nu w^{-1}} \circ {}^*R^{wL_\nu w^{-1}}_{L_\mu \cap wL_\nu w^{-1}}({}^wM)$$

またこの同型は変数 M に関して自然である．

証明　まず $\mathrm{Res}^{\mathrm{GL}_n(q)}_{P_\mu(q)} \circ \mathrm{Ind}^{\mathrm{GL}_n(q)}_{P_\nu(q)}(\mathrm{Infl}^{P_\nu}_{L_\nu}(M))$ を考える．命題 1.7 より

$$\mathrm{GL}_n(q) = \coprod_{w \in \mathcal{D}_{\mu\nu}} P_\mu(q) w P_\nu(q)$$

であるから，$M(w) = \mathbb{F}P_\mu(q) w P_\nu(q) \underset{\mathbb{F}P_\nu(q)}{\otimes} \mathrm{Infl}^{P_\nu}_{L_\nu}(M)$ とおくと

$$\mathrm{Res}^{\mathrm{GL}_n(q)}_{P_\mu(q)} \circ \mathrm{Ind}^{\mathrm{GL}_n(q)}_{P_\nu(q)}(\mathrm{Infl}^{P_\nu}_{L_\nu}(M)) \simeq \bigoplus_{w \in \mathcal{D}_{\mu\nu}} M(w)$$

となり，示すべきは自然な $\mathbb{F}L_\mu(q)$-加群同型

$$e_\mu M(w) \simeq R^{L_\mu}_{L_\mu \cap w L_\nu w^{-1} \subseteq L_\mu \cap w P_\nu w^{-1}} \circ {}^*R^{w L_\nu w^{-1}}_{L_\mu \cap w L_\nu w^{-1} \subseteq P_\mu \cap w L_\nu w^{-1}}({}^w M)$$

の存在である．ただし，

$$e_\mu = \frac{1}{|U_\mu(q)|} \sum_{u \in U_\mu(q)} u$$

であった．まず $w \otimes m \mapsto w \otimes m$ ($m \in M$) により

$$\mathrm{Res}^{w P_\nu(q) w^{-1}}_{P_\mu(q) \cap w P_\nu(q) w^{-1}}({}^w\mathrm{Infl}^{P_\nu}_{L_\nu}(M)) \to w P_\nu(q) \underset{\mathbb{F}P_\nu(q)}{\otimes} \mathrm{Infl}^{P_\nu}_{L_\nu}(M) \subseteq M(w)$$

を定義すると簡単な計算で $\mathbb{F}P_\mu(q) \cap w P_\nu(q) w^{-1}$-加群準同型とわかるから $\mathbb{F}P_\mu(q)$-加群準同型

$$\mathrm{Ind}^{P_\mu(q)}_{P_\mu(q) \cap w P_\nu(q) w^{-1}} \circ \mathrm{Res}^{w P_\nu(q) w^{-1}}_{P_\mu(q) \cap w P_\nu(q) w^{-1}}({}^w\mathrm{Infl}^{P_\nu}_{L_\nu}(M)) \to M(w)$$

を誘導する．$P_\mu(q) w P_\nu(q)/P_\nu(q)$ には $P_\mu(q)$ が推移的に作用するのでこの準同型は全射であり，$w P_\nu(q)/P_\nu(q)$ の固定化群が $P_\mu(q) \cap w P_\nu(q) w^{-1}$ であることから $M(w)$ の次元は

$$\frac{|P_\mu(q)|}{|P_\mu(q) \cap w P_\nu(q) w^{-1}|} \dim M$$

に等しい．故にこの準同型は同型であり

$$e_\mu M(w) \simeq e_\mu \operatorname{Ind}^{P_\mu(q)}_{P_\mu(q)\cap wP_\nu(q)w^{-1}} \circ \operatorname{Res}^{wP_\nu(q)w^{-1}}_{P_\mu(q)\cap wP_\nu(q)w^{-1}}({}^w\operatorname{Infl}^{P_\nu}_{L_\nu}(M))$$

を得る．ここで ${}^w\operatorname{Infl}^{P_\nu}_{L_\nu}(M)$ には $wU_\nu(q)w^{-1}$ が単位表現で作用するから，

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Res}^{wP_\nu(q)w^{-1}}_{P_\mu(q)\cap wP_\nu(q)w^{-1}}({}^w\operatorname{Infl}^{P_\nu}_{L_\nu}(M))\\
&\qquad\simeq \operatorname{Infl}^{P_\mu\cap wP_\nu w^{-1}}_{P_\mu\cap wL_\nu w^{-1}} \circ \operatorname{Res}^{wP_\nu(q)w^{-1}}_{P_\mu(q)\cap wL_\nu(q)w^{-1}}({}^w\operatorname{Infl}^{P_\nu}_{L_\nu}(M))\\
&\qquad\simeq \operatorname{Infl}^{P_\mu\cap wP_\nu w^{-1}}_{P_\mu\cap wL_\nu w^{-1}} \circ \operatorname{Res}^{wL_\nu(q)w^{-1}}_{P_\mu(q)\cap wL_\nu(q)w^{-1}}({}^wM)
\end{aligned}$$

であり，$N = \operatorname{Infl}^{P_\mu\cap wP_\nu w^{-1}}_{P_\mu\cap wL_\nu w^{-1}} \circ \operatorname{Res}^{wL_\nu(q)w^{-1}}_{P_\mu(q)\cap wL_\nu(q)w^{-1}}({}^wM)$ とおくと

$$e_\mu M(w) \simeq e_\mu \operatorname{Ind}^{P_\mu(q)}_{P_\mu(q)\cap wP_\nu(q)w^{-1}}(N)$$

である．$P_\mu(q)\cap wP_\nu(q)w^{-1}$ が $U_\mu(q)\cap wP_\nu(q)w^{-1}$ を正規部分群にもつ $L_\mu(q)\cap wP_\nu(q)w^{-1}$ との半直積であることに注意して

$$e' = \frac{1}{|U_\mu(q)\cap wP_\nu(q)w^{-1}|}\sum_{u\in U_\mu(q)\cap wP_\nu(q)w^{-1}} u$$

とおくと，$(\mathbb{F}L_\mu(q), \mathbb{F}(P_\mu(q)\cap wP_\nu(q)w^{-1}))$-加群同型

$$e_\mu \mathbb{F}P_\mu(q) \simeq \mathbb{F}L_\mu(q) \underset{\mathbb{F}L_\mu(q)\cap wP_\nu(q)w^{-1}}{\otimes} e'\mathbb{F}P_\mu(q)\cap wP_\nu(q)w^{-1}$$

を得る．実際，右辺の元 $l\otimes e'p$ $(l\in L_\mu(q), p\in P_\mu(q)\cap wP_\nu(q)w^{-1})$ に対し左辺の元 $e_\mu le'p = e_\mu lp$ を対応させる写像は全射故，両辺の次元が等しいことに注意して同型を得る．この同型から

$$e_\mu M(w) \simeq e_\mu \operatorname{Ind}^{P_\mu(q)}_{P_\mu(q)\cap wP_\nu(q)w^{-1}}(N) \simeq \operatorname{Ind}^{L_\mu(q)}_{L_\mu(q)\cap wP_\nu(q)w^{-1}}(e'N)$$

となることがわかる．そこで以下 $L_\mu(q)\cap wP_\nu(q)w^{-1}$-加群 $e'N$ を考える．

X を任意の $\mathbb{F}P_\mu(q)\cap wL_\nu(q)w^{-1}$-加群とする．$P_\mu(q)\cap wL_\nu(q)w^{-1}$ が $U_\mu(q)\cap wL_\nu(q)w^{-1}$ を正規部分群にもつ $L_\mu(q)\cap wL_\nu(q)w^{-1}$ との半直積であることに注意して

$$e'' = \frac{1}{|U_\mu(q) \cap wL_\nu(q)w^{-1}|} \sum_{u \in U_\mu(q) \cap wL_\nu(q)w^{-1}} u$$

とおくと，$e''X$ は $\mathbb{F}L_\mu(q) \cap wL_\nu(q)w^{-1}$-加群で

$$e' \operatorname{Infl}_{P_\mu \cap wL_\nu w^{-1}}^{P_\mu \cap wP_\nu w^{-1}}(X) \simeq \operatorname{Infl}_{L_\mu \cap wL_\nu w^{-1}}^{L_\mu \cap wP_\nu w^{-1}}(e''X)$$

である．実際，補題 2.7(6) と同様に考えれば

$$U_\mu(q) \cap wP_\nu(q)w^{-1} = (U_\mu(q) \cap wL_\nu(q)w^{-1})(U_\mu(q) \cap wU_\nu(q)w^{-1})$$

であり，$\operatorname{Infl}_{P_\mu \cap wL_\nu w^{-1}}^{P_\mu \cap wP_\nu w^{-1}}(X)$ には $U_\mu(q) \cap wU_\nu(q)w^{-1}$ が単位表現で作用していることより $e' \operatorname{Infl}_{P_\mu \cap wL_\nu w^{-1}}^{P_\mu \cap wP_\nu w^{-1}}(X)$ はベクトル空間としては $e''X$ に等しく，$L_\mu(q) \cap wP_\nu(q)w^{-1}$ の作用を見ると，$L_\mu(q) \cap wU_\nu(q)w^{-1}$ が単位表現で作用しているので $\operatorname{Infl}_{L_\mu \cap wL_\nu w^{-1}}^{L_\mu \cap wP_\nu w^{-1}}(e''X)$ になる．

とくに，$X = \operatorname{Res}_{P_\mu(q) \cap wL_\nu(q)w^{-1}}^{wL_\nu(q)w^{-1}}({}^wM)$ とおけば $N = \operatorname{Infl}_{P_\mu \cap wL_\nu w^{-1}}^{P_\mu \cap wP_\nu w^{-1}}(X)$ であるから，

$$e'N \simeq \operatorname{Infl}_{L_\mu \cap wL_\nu w^{-1}}^{L_\mu \cap wP_\nu w^{-1}}(e'' \operatorname{Res}_{P_\mu(q) \cap wL_\nu(q)w^{-1}}^{wL_\nu(q)w^{-1}}({}^wM))$$

を得る．ここで

$$e'' \operatorname{Res}_{P_\mu(q) \cap wL_\nu(q)w^{-1}}^{wL_\nu(q)w^{-1}}({}^wM) = {}^*R_{L_\mu \cap wL_\nu w^{-1} \subseteq P_\mu \cap wL_\nu w^{-1}}^{wL_\nu w^{-1}}({}^wM)$$

であるから

$$e'N \simeq \operatorname{Infl}_{L_\mu \cap wL_\nu w^{-1}}^{L_\mu \cap wP_\nu w^{-1}}({}^*R_{L_\mu \cap wL_\nu w^{-1} \subseteq P_\mu \cap wL_\nu w^{-1}}^{wL_\nu w^{-1}}({}^wM))$$

となり，$e_\mu M(w) \simeq \operatorname{Ind}_{L_\mu(q) \cap wP_\nu(q)w^{-1}}^{L_\mu(q)}(e'N)$ に代入して

$$e_\mu M(w) \simeq R_{L_\mu \cap wL_\nu w^{-1} \subseteq L_\mu \cap wP_\nu w^{-1}}^{L_\mu} \circ {}^*R_{L_\mu \cap wL_\nu w^{-1} \subseteq P_\mu \cap wL_\nu w^{-1}}^{wL_\nu w^{-1}}({}^wM)$$

を得る．また以上の議論に現れる同型はすべて M に関して自然である．　□

2.3 Howlett-Lehrer の定理

本節の目標は Harish-Chandra 誘導 $R^G_{L\subseteq P}$ が放物型部分群 P のとり方に依らず同型な $\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)$-加群を与えることを示すことである．この定理の結果，今まで使ってきた $R^G_L, {}^*R^G_L$ という記号の使い方が正当化される．Dipper-Du による別証明もあるが，ここでは Howlett-Lehrer にしたがって証明する．

定義 2.8 $w_{a,b}$ を

$$w_{a,b} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & a & a+1 & \cdots & a+b \\ 1+b & \cdots & a+b & 1 & \cdots & b \end{pmatrix}$$

により定め，$n \geq a+b$ のとき $0 \leq c \leq n-(a+b)$ に対し

$$S_{a+b} \hookrightarrow S_c \times S_{a+b} \times S_{n-(a+b+c)} \hookrightarrow S_n$$

による $w_{a,b}$ の像を $w_{a,b}[c]$ と書く．$\ell(w_{a,b}[c]) = \ell(w_{a,b}) = ab$ である．

S_{a+b} と $S_a \times S_b$ の最長元はそれぞれ

$$w_0 = \begin{pmatrix} 1 & \cdots a+b \\ a+b & \cdots 1 \end{pmatrix}, \qquad w_0' = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & a & a+1 & \cdots & a+b \\ a & \cdots & 1 & a+b & \cdots & a+1 \end{pmatrix}$$

であり，$w_{a,b} = w_0 w_0'$ と書ける．とくにこの式に基づいて対称群以外の Weyl 群に対しても $w_{a,b}$ に相当する元を定義することが出来る．実際，下記の議論において $w_{a,b}$ の代わりにこの元を用いれば Howlett-Lehrer の定理は有限 Weyl 群に対して成り立つ．

定義 2.9 $\mu' \vDash n$ がある $\mu = (\mu_1, \cdots, \mu_r) \vDash n$ と $\sigma \in S_r$ を用いて $\mu' = (\mu_{\sigma(1)}, \cdots, \mu_{\sigma(r)})$ と書けるとき，μ' を μ の**並びかえ**と呼ぶ．

補題 2.8 μ' を μ の並びかえとする．$w \in S_n$ に対して

(i) $wI_\mu w^{-1} = I_{\mu'}$

(ii) $s_k \in I_\mu$ ならば $w(k) < w(k+1)$

が成り立つならば広義の分割 $\mu=\mu^{(0)},\mu^{(1)},\cdots,\mu^{(r)}=\mu'$ と $w_1,\cdots,w_r\in S_n$ が存在して次が成り立つ．

(a) $w=w_r\cdots w_1$ で各 w_i は $w_{a,b}[c]$ の形

(b) $\ell(w)=\sum\limits_{i=1}^{r}\ell(w_i)$

(c) (i) $w_i I_{\mu^{(i-1)}} w_i^{-1}=I_{\mu^{(i)}}$

　(ii) $s_k\in I_{\mu^{(i-1)}}$ ならば $w_i(k)<w_i(k+1)$

証明　$\ell(w)$ に関する帰納法で示す．$\ell(w)=0$ ならば $I_\mu=I_{\mu'}$ より $\mu=\mu'$ 故明らか．$\ell(w)>0$ とする．すると，ある i が存在して $w(i)>w(i+1)$ であるが，$s_i\in I_\mu$ ならば仮定に反するので $s_i\notin I_\mu$ である．μ から定まる順列 $12\cdots n$ のブロック分割をみて

$$\underbrace{\boxed{12\cdots}}_{\mu_1}\underbrace{\boxed{\cdots}}_{\mu_2}\cdots\underbrace{\boxed{\cdots i}}_{\mu_d}\underbrace{\boxed{i+1\cdots}}_{\mu_{d+1}}\cdots$$

により d を定め，μ_d と μ_{d+1} を交換して得られる広義の分割を $\mu^{(1)}$ とする．

$a=\mu_d$, $b=\mu_{d+1}$, $c=\sum\limits_{j=1}^{d-1}\mu_j$ とし，$w_1=w_{a,b}[c]$ と定めると，

(1) $w_1 I_\mu w_1^{-1}=I_{\mu^{(1)}}$

(2) $s_k\in I_\mu$ ならば $w_1(k)<w_1(k+1)$

が成立する．そこで $w'=ww_1^{-1}$ とおくと，仮定 (i) と (1) より

$$w' I_{\mu^{(1)}} {w'}^{-1}=I_{\mu'}$$

であり，他方 $s_k\in I_{\mu^{(1)}}$ ならば (1)，(2) と同様に考えて

$$(w_1^{-1}(k),w_1^{-1}(k+1))\in I_\mu \text{　かつ　} w_1^{-1}(k)<w_1^{-1}(k+1)$$

であるから，仮定 (ii) より

$$w'(k)=ww_1^{-1}(k)<ww_1^{-1}(k+1)=w'(k+1).$$

故に，$\ell(w) = \ell(w') + \ell(w_1)$ を示せば帰納法の仮定より $\mu^{(2)}, \cdots, \mu^{(r)}$ と $w_2, \cdots, w_r$ が存在して題意を満たす．

以下，$\alpha = w(i), \beta = w(i+1)$ と略記する．k が μ_d と μ_{d+1} のブロックに入るとき，すなわち

$$i - \mu_d + 1 \leq k < k+1 \leq i \quad \text{または} \quad i+1 \leq k < k+1 \leq i + \mu_{d+1}$$

のとき，$ws_kw^{-1} = (w(k), w(k+1)) \in I_{\mu'}$ かつ $w(k) < w(k+1)$ より

$$w(k+1) = w(k) + 1$$

であるから，$\alpha > \beta$ に注意すれば

$$\underbrace{\boxed{i - \mu_d + 1, \cdots, i}}_{\mu_d}\underbrace{\boxed{i+1, \cdots, i + \mu_{d+1}}}_{\mu_{d+1}}$$

という 2 つのブロックは w をほどこすと μ' の 2 つのブロック

$$\underbrace{\boxed{\beta, \beta+1 \cdots, \beta + \mu_{d+1} - 1}}_{\mu_{d+1}} \cdots \underbrace{\boxed{\alpha - \mu_d + 1, \cdots, \alpha}}_{\mu_d}$$

に大小関係が反転して移る．μ' の定めるブロック分割された順列 $1 \cdots n$ に w^{-1} を作用させて転倒数を見よう．i が μ_d と μ_{d+1} 以外のブロックに属するとき $w^{-1}(i) = {w'}^{-1}(i)$ であることに注意すれば

$$\gamma(w^{-1}) = \gamma({w'}^{-1}) + \mu_d\mu_{d+1}$$

を得るから $\ell(w) = \ell(w') + \ell(w_1)$ が示され，帰納法が成立する． □

命題 2.2 μ' を μ の並びかえとする．$w \in S_n$ に対して

(i) $wI_\mu w^{-1} = I_{\mu'}$

(ii) $s_k \in I_\mu$ ならば $w(k) < w(k+1)$

が成り立つならば $e_\mu \in \mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)e_{\mu'}we_\mu$ である．

証明 $|I_\mu|$ に関する帰納法で示す．

$|I_\mu| = 0$ のとき．$\mu = \mu' = (1^n)$ だから示すべきは $e_\mu \in \mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)e_\mu w e_\mu$ である．$\ell(w)$ に関する帰納法で示そう．$\ell(w) = 0$ のときは明らか．$\ell(w) = 1$ とすると，$s \in S$ が存在して $w = s$ だから，$e_\mu s e_\mu s e_\mu \in \mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)e_\mu s e_\mu$ を $q^{\binom{n}{2}}(= |U_\mu(q)|)$ 倍すれば，

$$\sum_{u \in U_\mu(q)} e_\mu s u s e_\mu \in \mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)e_\mu s e_\mu$$

である．ここで

$$U_1 = \{u \in U_\mu(q) \mid sus \in B_n(q)\}$$
$$U_2 = \{u \in U_\mu(q) \mid sus \in B_n(q)sB_n(q)\}$$

とおく．$sB_n(q)s \subseteq B_n(q) \sqcup B_n(q)sB_n(q)$ より $U_\mu(q) = U_1 \sqcup U_2$ である．

$u \in U_1$ ならば $sus = sus^{-1}$ は $B_n(q)$ のベキ単元であるから，今 $\mu = (1^n)$ より $U_\mu(q) = U_n(q)$ であることに注意して $sus \in U_\mu(q)$ を得る．とくに $e_\mu s u s e_\mu = e_\mu$ であり，

$$U_1 = U_\mu(q) \cap s^{-1}U_\mu(q)s = \begin{pmatrix} 1 & * & & & \cdots & & & * \\ & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & 1 & * & & & & \\ & & & 1 & 0 & & & \vdots \\ & & & 0 & 1 & * & & \\ & & & & & 1 & \ddots & \\ & & & & & & \ddots & * \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

より $|U_1| = q^{\binom{n}{2}-1}$ であることに注意すれば

$$\sum_{u \in U_1} e_\mu s u s e_\mu = q^{\binom{n}{2}-1} e_\mu$$

である．$u \in U_2$ ならば $t \in T_n(q), u', u'' \in U_\mu(q)$ を用いて $sus = tu'su''$ と書けるので，$te_\mu = e_\mu t$ に注意すれば

$$e_\mu s u s e_\mu = t(e_\mu u')s(u'' e_\mu) = t e_\mu s e_\mu \in \mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)e_\mu s e_\mu$$

であり，これから

$$\sum_{u \in U_2} e_\mu suse_\mu \in \mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)e_\mu se_\mu$$

がわかる．故に $q^{\binom{n}{2}-1}e_\mu \in \mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)e_\mu se_\mu$ となり求める式を得る．

$\ell(w) > 1$ とし，$w = w's, \ell(w) = \ell(w') + 1$ と書く．帰納法の仮定により $e_\mu \in \mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)e_\mu w'e_\mu$ だから，これに se_μ を右からかけて $\ell(w) = 1$ のときの結果を使うと

$$e_\mu \in \mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)e_\mu se_\mu \subseteq \mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)e_\mu w'e_\mu se_\mu$$

である．今 $\ell(w's) = \ell(w') + 1$ より $w'B_n(q)s \subseteq B_n(q)wB_n(q)$ であるから，$U_\mu(q) = \{u_1, u_2, \cdots\}$ とすれば，$t_i \in T_n(q), u_i', u_i'' \in U_\mu(q)$ $(i = 1, 2, \cdots)$ が存在して $w'u_is = t_iu_i'wu_i''$ と書ける．故に

$$e_\mu w'e_\mu se_\mu = q^{-\binom{n}{2}} \sum_{i=1}^{q^{\binom{n}{2}}} t_ie_\mu we_\mu \in \mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)e_\mu we_\mu.$$

よって $e_\mu \in \mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)e_\mu w'e_\mu se_\mu \subseteq \mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)e_\mu we_\mu$ を得る．

$|I_\mu| > 0$ のとき．$I_\nu \subsetneq I_\mu$ とする．$wI_\nu w^{-1}$ は $I_{\mu'}$ の部分集合故 μ' の細分 ν' を用いて $I_{\nu'}$ と書けて，帰納法の仮定より $e_\nu \in \mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)e_{\nu'}we_\nu$ が成り立つ．

$U_\nu(q)$ は $U_\nu^\mu(q) = L_\mu(q) \cap U_\nu(q)$ と $U_\mu(q)$ の半直積だから

$$e_\nu = e_\nu^\mu e_\mu = \left(\frac{1}{|U_\nu^\mu(q)|} \sum_{u \in U_\nu^\mu(q)} u \right) e_\mu$$

である．また，$s_k \in I_\mu$ ならば仮定 (ii) より $w(k) < w(k+1)$ であるから

$$w(L_\mu(q) \cap U_n(q))w^{-1} \subseteq U_n(q)$$

であるが，$i < j$ として $u \in wU_\nu^\mu(q)w^{-1}$ の (i, j) 成分をみると，i と j が ν' の同じブロックに属すとき

$$s_i, s_{i+1}, \cdots, s_{j-1} \in I_{\nu'}$$

だから，$w^{-1}(i)$ と $w^{-1}(j)$ は ν の同じブロックに属する．このことより u の (i, j) 成分，すなわち $w^{-1}uw$ の $(w^{-1}(i), w^{-1}(j))$ 成分は 0 である．つまり

$$wU^{\mu}_{\nu}(q)w^{-1} \subseteq U_{\nu'}(q)$$

となり，とくに $u \in U^{\mu}_{\nu}(q)$ ならば $e_{\nu'}wuw^{-1} = e_{\nu'}$ である．故に

$$\begin{aligned} e_{\nu'}we_{\nu} &= e_{\nu'}w\left(\frac{1}{|U^{\mu}_{\nu}(q)|}\sum_{u \in U^{\mu}_{\nu}(q)} u\right)e_{\mu} \\ &= e_{\nu'}\left(\frac{1}{|U^{\mu}_{\nu}(q)|}\sum_{u \in U^{\mu}_{\nu}(q)} wuw^{-1}\right)we_{\mu} = e_{\nu'}we_{\mu} \end{aligned}$$

となるから，帰納法の仮定 $e_{\nu} \in \mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)e_{\nu'}we_{\nu}$ と $e_{\nu'} = e_{\nu'}e_{\mu'}$ より

$$e_{\nu} \in \mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)e_{\nu'}we_{\mu} = \mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)e_{\nu'}e_{\mu'}we_{\mu} \subseteq \mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)e_{\mu'}we_{\mu}$$

であり，任意の $l \in L_{\mu}(q)$ に対し，$wlw^{-1} \in L_{\mu'}(q)$ は $e_{\mu'}$ と可換故

$$e_{\nu}l \in \mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)e_{\mu'}(wlw^{-1})we_{\mu} = \mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)e_{\mu'}we_{\mu}$$

を得る．準備ができたので，以下 $\ell(w)$ に関する帰納法で $e_{\mu} \in \mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)e_{\mu'}we_{\mu}$ を示そう．補題 2.8 の $w_1, \cdots, w_r$ を用いて $w = w_r \cdots w_1$ と書けば，r に関する帰納法で示せばよい．

$r = 0$ なら $\mu = \mu'$ かつ w は単位元故明らか．$r = 1$ とし，$w = w_{a,b}[c]$ とおく．まず $e_{\mu}w^{-1}e_{\mu'}we_{\mu} \in \mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)e_{\mu'}we_{\mu}$ より

$$\sum_{u \in U_{\mu'}(q)} e_{\mu}w^{-1}uwe_{\mu} \in \mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)e_{\mu'}we_{\mu}$$

である．$1 \cdots n$ の分割を

$$\mu : \overbrace{\underbrace{\boxed{\cdots}}_{\mu_1}\cdots\underbrace{\boxed{\cdots}}_{\mu_{k-1}}}^{c}\underbrace{\boxed{\cdots}}_{\mu_k}\underbrace{\boxed{\cdots}}_{\mu_{k+1}}\underbrace{\boxed{\cdots}}\cdots$$

$$\mu' : \underbrace{\boxed{\cdots}}_{\mu_1}\cdots\underbrace{\boxed{\cdots}}_{\mu_{k-1}}\underbrace{\boxed{\cdots}}_{\mu_{k+1}}\underbrace{\boxed{\cdots}}_{\mu_k}\underbrace{\boxed{\cdots}}\cdots$$

と表すと，w は μ の μ_k と μ_{k+1} のブロックを μ' の μ_k と μ_{k+1} のブロックに移す．そこで $\widetilde{\mu} \vDash n$ を

$$\widetilde{\mu} = (\mu_1, \cdots, \mu_{k-1}, \mu_k + \mu_{k+1}, \mu_{k+2}, \cdots)$$

で定めると，$w \in S_{\widetilde{\mu}}$ より任意の $u \in U_{\mu'}(q)(\subseteq B_n(q))$ に対し $w^{-1}uw \in P_{\widetilde{\mu}}(q)$ である．また，命題 1.7 によれば $\mathcal{D}_{\mu\mu}$ は $P_\mu(q)\backslash \mathrm{GL}_n(q)/P_\mu(q)$ の完全代表系であるから，$\mathcal{D}_{\mu\mu} \cap S_{\widetilde{\mu}}$ は $P_\mu(q)\backslash P_{\widetilde{\mu}}(q)/P_\mu(q)$ の完全代表系である．そこで，$t \in \mathcal{D}_{\mu\mu} \cap S_{\widetilde{\mu}}$ に対して

$$U_t = \{u \in U_{\mu'}(q) \mid w^{-1}uw \in P_\mu(q)tP_\mu(q)\}$$

とおくと，$U_{\mu'}(q) = \bigsqcup_{t \in \mathcal{D}_{\mu\mu} \cap S_{\widetilde{\mu}}} U_t$ となるので

$$\sum_{t \in \mathcal{D}_{\mu\mu} \cap S_{\widetilde{\mu}}} e_\mu (\sum_{u \in U_t} w^{-1}uw) e_\mu \in \mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q) e_{\mu'} w e_\mu$$

を得る．和を $t \in \mathcal{D}_{\mu\mu}$ ごとに考えるため，以下 $t \in \mathcal{D}_{\mu\mu}$ を固定して考える．$I_\nu = t^{-1}I_\mu t \cap I_\mu$ により $\nu \models n$ を定めると，定理 1.1 より $t^{-1}S_\mu t \cap S_\mu = S_\nu$ である．また，

$$e_\nu = \left(\frac{1}{|L_\mu(q) \cap U_\nu(q)|} \sum_{u \in L_\mu(q) \cap U_\nu(q)} u \right) e_\mu$$

より

$$e_\mu t e_\nu = \frac{1}{|L_\mu(q) \cap U_\nu(q)|} \sum_{u \in L_\mu(q) \cap U_\nu(q)} e_\mu (tut^{-1}) t e_\mu.$$

ここで，$u \in L_\mu(q) \cap U_\nu(q)$ ならば $tut^{-1} \in U_\mu(q)$ であることを示そう．実際，$t \in \mathcal{D}_{\mu\mu}$ より $s_k \in I_\mu$ なら $t(k) < t(k+1)$ 故

$$t(L_\mu(q) \cap U_n(q))t^{-1} \subseteq U_n(q)$$

であるが，$ts_kt^{-1} \in I_\mu$ ならば $s_k \in I_\nu$ であることに注意して $tut^{-1} \in U_\mu(q)$ を得る．以上から $e_\mu t e_\nu = e_\mu t e_\mu$ が得られた．さて，各 $u \in U_t$ に対し，

$$w^{-1}uw = u'l'tl''u'' \quad (u', u'' \in U_\mu(q), l', l'' \in L_\mu(q))$$

と書くと，$e_\mu(w^{-1}uw)e_\mu = l'e_\mu t e_\mu l'' = l'e_\mu t e_\nu l''$ であり，$I_\nu \subsetneq I_\mu$ のときは，

$$e_\nu l'' \in \mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q) e_{\mu'} w e_\mu$$

をすでに示してあるから，$l'e_\mu te_\nu l'' \in \mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)e_{\mu'}we_\mu$ となって

$$\sum_{u\in U_t} e_\mu(w^{-1}uw)e_\mu \in \mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)e_{\mu'}we_\mu$$

を得る．故に

$$\sum_{\substack{t\in\mathcal{D}_{\mu\mu}\cap S_{\widetilde{\mu}}\\ tI_\mu t^{-1}=I_\mu}} e_\mu\left(\sum_{u\in U_t} w^{-1}uw\right)e_\mu \in \mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)e_{\mu'}we_\mu$$

である．ここで，$w(a',b')$ $(0\le a'\le a, 0\le b'\le b, a'+b'=a)$ を順列

$$1,2\cdots,a',a+1,\cdots,a+b',a'+1,\cdots,a,a+b'+1,\cdots,a+b$$

の定める S_{a+b} の元とすると，

$$\mathcal{D}_{\mu\mu}\cap S_{\widetilde{\mu}} = \{w(a',b')[c] \mid 0\le a'\le a, 0\le b'\le b, a'+b'=a\}$$

と具体的に書ける．とくに $a'=a$ なら $w(a',b')[c]=1$ である．

$t\in\mathcal{D}_{\mu\mu}\cap S_{\widetilde{\mu}}$ が $tI_\mu t^{-1}=I_\mu$ かつ $t\ne 1$ を満たすとする．$t=w(a',b')[c]$ と書くと $1\le a'<a$ なら $(a',a+1)\in I_\mu$ は起こり得ないので $a'=0$ である．

次に $a=b'<b$ とすると $(a,a+b'+1)\in I_\mu$ でこれも起こり得ないから，$a=b$ で，このことより $t=w$, $\mu=\mu'$ のときのみ $tI_\mu t^{-1}=I_\mu$ かつ $t\ne 1$ が起こり得ることがわかる．

そこで $t=w$, $\mu=\mu'$ のときを考えると，$u\in U_{t=w}$ に対し

$$w^{-1}uw = u'l'wl''u'' \quad (u',u''\in U_\mu(q), l',l''\in L_\mu(q))$$

であるから

$$\begin{aligned} e_\mu(w^{-1}uw)e_\mu &= l'e_\mu(wl''w^{-1})we_\mu = l'e_{\mu'}(wl''w^{-1})we_\mu \\ &= l'(wl''w^{-1})e_{\mu'}we_\mu \end{aligned}$$

より $e_\mu(w^{-1}uw)e_\mu \in \mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)e_{\mu'}we_\mu$ である．故に

$$e_\mu(\sum_{u\in U_1} w^{-1}uw)e_\mu \in \mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)e_{\mu'}we_\mu$$

が得られた．

$U_1 = \{u \in U_{\mu'}(q) \mid w^{-1}uw \in P_\mu(q)\} = U_{\mu'}(q) \cap wP_\mu(q)w^{-1}$ だから，

$$U_{\mu'}(q) = \begin{pmatrix} \ddots & * & \cdots & * \\ & I_b & * & \vdots \\ & 0 & I_a & * \\ & & & \ddots \end{pmatrix}, \quad wP_\mu(q)w^{-1} = \begin{pmatrix} \ddots & * & \cdots & * \\ & * & 0 & \vdots \\ & * & * & * \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

（I_a, I_b はそれぞれ a, b 次単位行列）であることより

$$U_1 = U_{\mu'}(q) \cap wP_\mu(q)w^{-1} = \begin{pmatrix} \ddots & & & * \\ & I_b & 0 & \\ & 0 & I_a & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

となり，これより

$$U_1 \subseteq wU_\mu(q)w^{-1} = \begin{pmatrix} \ddots & & & * \\ & I_b & 0 & \\ & * & I_a & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

とわかる．故に $u \in U_1$ ならば $e_\mu(w^{-1}uw)e_\mu = e_\mu$ となり，

$$\sum_{u \in U_1} e_\mu(w^{-1}uw)e_\mu = |U_1|e_\mu$$

を得るから，$e_\mu \in \mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)e_{\mu'}we_\mu$ となり $r = 1$ のときに主張が示された．

次に $r > 1$ のときを示す．$w' = w_r \cdots w_2$ とおくと，$w = w'w_1$ で帰納法の仮定より $e_{\mu^{(1)}} \in \mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)e_{\mu'}w'e_{\mu^{(1)}}$ だから，w_1e_μ を右から掛けて

$$e_\mu \in \mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)e_{\mu^{(1)}}w_1e_\mu \subseteq \mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)e_{\mu'}w'e_{\mu^{(1)}}w_1e_\mu$$

である．$w_1 = w_{a,b}[c]$ と書くと，μ から $\mu^{(1)}$ へ移るとき a と b のブロックの転倒が起きていることと $\ell(w) = \ell(w') + \ell(w_1)$ より，$\mu^{(1)}$ から μ' へ移るとき

は a と b のブロックの転倒は起きない．故に

$$\begin{pmatrix} \ddots & & & \\ & I_b & * & 0 \\ & 0 & I_a & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \subseteq {w'}^{-1}U_{\mu'}(q)w' \cap U_{\mu^{(1)}}(q)$$

である．他方，

$$U_{\mu^{(1)}}(q) \cap w_1 U_\mu(q) w_1^{-1} = \begin{pmatrix} \ddots & & & * \\ & I_b & 0 & \\ & 0 & I_a & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

を $r=1$ のときに示したから，$u \in U_{\mu^{(1)}}(q)$ に対して $u' \in U_{\mu'}(q), u'' \in U_\mu(q)$ が存在して

$$u = ({w'}^{-1}u'w')(w_1 u'' w_1^{-1}) = {w'}^{-1}u'wu''w_1^{-1}$$

と書けることがわかる．とくに，$e_{\mu'}w'uw_1e_\mu = e_{\mu'}we_\mu$ であるから

$$\sum_{u \in U_{\mu^{(1)}}(q)} e_{\mu'}w'uw_1e_\mu = |U_{\mu^{(1)}}(q)|e_{\mu'}we_\mu$$

となり，$e_\mu \in \mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)e_{\mu'}w'e_{\mu^{(1)}}w_1e_\mu = \mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)e_{\mu'}we_\mu$ が得られる．　□

定理 2.2　$\mu, \mu' \vDash n, w \in S_n$ とし，$P = P_\mu$ と $P' = wP_{\mu'}w^{-1}$ がともに $L = L_\mu$ を Levi 部分に持つ放物型部分群であるとする．このとき自然変換 $R^G_{L\subseteq P} \simeq R^G_{L\subseteq P'}$ が存在する．

証明　まず

$$\begin{cases} R^G_{L\subseteq P}(M) = \mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)e_\mu \underset{\mathbb{F}L_\mu(q)}{\otimes} M, \\ R^G_{L\subseteq P'}(M) = \mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)we_{\mu'}w^{-1} \underset{\mathbb{F}L_\mu(q)}{\otimes} M \end{cases}$$

と書けることに注意する．$L_\mu(q) = wL_{\mu'}(q)w^{-1}$ なので，必要なら w を uwv $(u \in S_\mu, v \in S_{\mu'})$ に取り替えれば，

(i) $w^{-1}I_\mu w = I_{\mu'}$
(ii) $s_k \in I_\mu$ ならば $w^{-1}(k) < w^{-1}(k+1)$

であるとしてよい．命題 2.2 を適用すれば $e_\mu \in \mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)e_{\mu'}w^{-1}e_\mu$ となり，$\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)$ の反同型 $g \mapsto g^{-1}$ を施して $e_\mu \in e_\mu w e_{\mu'}\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)$ を得る．また (i)，(ii) より

(iii) $wI_{\mu'}w^{-1} = I_\mu$
(iv) $s_k \in I_\mu$ ならば $w(k) < w(k+1)$

でもあるから，同様にして

$$e_{\mu'} \in \mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)e_\mu w e_{\mu'} = \mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)e_\mu \cdot e_\mu w e_{\mu'}$$

となり，ある $\xi \in \mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)e_\mu$ を用いて $e_{\mu'} = \xi e_\mu w e_{\mu'}$ と書けることが分かる．

そこで，

$$\varPhi : \mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)e_\mu \longrightarrow \mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)e_{\mu'}w^{-1}, \quad x \mapsto xe_\mu w e_{\mu'}w^{-1}$$

を考えると，$\varPhi(\xi) = \xi e_\mu w e_{\mu'}w^{-1} = e_{\mu'}w^{-1}$ であるから $\varPhi$ は全射である．

$\varPhi$ が単射であることを示そう．実際，$x \in \mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)e_\mu$ に対して $\varPhi(x) = 0$ とすると，$e_\mu \in e_\mu w e_{\mu'}\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)$ より

$$x = xe_\mu \in (xe_\mu w e_{\mu'}w^{-1})w\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q) = \varPhi(x)\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q) = 0.$$

故に $\varPhi$ は $\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)$-加群同型であるが，$l \in L_\mu(q)$ に対して $w^{-1}lw \in L_{\mu'}(q)$ に注意すると

$$\begin{aligned}\varPhi(xl) &= xle_\mu w e_{\mu'}w^{-1}\\ &= xe_\mu w(w^{-1}lw)e_{\mu'}w^{-1}\\ &= xe_\mu w e_{\mu'}(w^{-1}lw)w^{-1}\\ &= \varPhi(x)l\end{aligned}$$

を得るから，$\varPhi$ は $(\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q), \mathbb{F}L_\mu(q))$-加群同型である． □

2.4　Harish-Chandra 系列

定義 2.10　既約 $\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)$-加群 S に対して,

$$\mathcal{B}(S) := \{\mu \vDash n \mid {}^*R^G_{L_\mu}(S) \neq 0\}$$

とする．また，$\mu \leq \nu$ を $I_\mu \subseteq I_\nu$ により定め，$\mathcal{B}(S)$ を半順序集合とみなす．

補題 2.9　S を既約 $\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)$-加群，$\mu, \nu$ を $\mathcal{B}(S)$ の極小元とする．このとき，$w \in \mathcal{D}_{\mu\nu}$ が存在して $wI_\nu w^{-1} = I_\mu$ となる．

証明　P を S の射影被覆とする．補題 2.6 の (a) と (f) の同値性より P は $R^G_{L_\mu} \circ {}^*R^G_{L_\mu}(P)$ と $R^G_{L_\nu} \circ {}^*R^G_{L_\nu}(P)$ の直和因子であるから,

$$\begin{aligned}
1 &\leq \dim \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)}(P, S) \\
&\leq \dim \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)}(R^G_{L_\mu} \circ {}^*R^G_{L_\mu}(P), S) \\
&= \dim \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)}(P, R^G_{L_\mu} \circ {}^*R^G_{L_\mu}(S)) \\
&\leq \dim \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)}(R^G_{L_\nu} \circ {}^*R^G_{L_\nu}(P), R^G_{L_\mu} \circ {}^*R^G_{L_\mu}(S)) \\
&= \dim \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)}({}^*R^G_{L_\mu} \circ R^G_{L_\nu} \circ {}^*R^G_{L_\nu}(P), {}^*R^G_{L_\mu}(S))
\end{aligned}$$

となり，${}^*R^G_{L_\mu} \circ R^G_{L_\nu}({}^*R^G_{L_\nu}(P))$ に Mackey 公式を適用して

$$Q_w = {}^*R^{wL_\nu w^{-1}}_{L_\mu \cap wL_\nu w^{-1}}({}^w({}^*R^G_{L_\nu}(P)))$$

とおけば，補題 2.4 より Q_w は射影 $\mathbb{F}(L_\mu(q) \cap wL_\nu(q)w^{-1})$-加群で

$$\sum_{w \in \mathcal{D}_{\mu\nu}} \dim \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}L_\mu(q)}(R^{L_\mu}_{L_\mu \cap wL_\nu w^{-1}}(Q_w), {}^*R^G_{L_\mu}(S)) \neq 0$$

を得る．故に，ある $w \in \mathcal{D}_{\mu\nu}$ に対し直既約射影 $\mathbb{F}(L_\mu(q) \cap wL_\nu(q)w^{-1})$-加群 Q が存在して

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}L_\mu(q)}(R^{L_\mu}_{L_\mu \cap wL_\nu w^{-1}}(Q), {}^*R^G_{L_\mu}(S)) \neq 0.$$

故に補題 2.3 を用いれば

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)}(R^G_{L_\mu \cap wL_\nu w^{-1}}(Q), S) \neq 0$$

を得る．そこで $I_{\mu'} = I_\mu \cap wI_\nu w^{-1}$ とおくと，補題 2.7(3) の証明より

$$L_\mu(q) \cap wL_\nu(q)w^{-1} = L_{\mu'}(q)$$

であり，補題 2.6 の (a) と (c) の同値性から ${}^*R^G_{L_{\mu'}}(S) \neq 0$ であるから，μ の極小性に注意して $I_{\mu'} = I_\mu$ から $I_\mu \subseteq wI_\nu w^{-1}$ を得る．μ と ν を取り替えて同様に議論すると，ある $w' \in \mathcal{D}_{\nu\mu}$ が存在して $I_\nu \subseteq w' I_\mu w'^{-1}$ となるから，$|I_\mu| = |I_\nu|$ となり，とくに $I_\mu = wI_\nu w^{-1}$ が得られる． □

補題 2.10 S を既約 $\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)$-加群とし $\mu \in \mathcal{B}(S)$ を極小元とすると，${}^*R^G_{L_\mu}(S)$ の任意の組成因子 X_1, X_2 に対し，ある $w \in S_n$ が存在して

(i) $wL_\mu(q)w^{-1} = L_\mu(q)$

(ii) $X_1 \simeq {}^wX_2$

が成立する．

証明 既約 $\mathbb{F}L_\mu(q)$-加群 $X_1 \subseteq \mathrm{Soc}({}^*R^G_{L_\mu}(S))$ をひとつ固定し，他の任意の組成因子 X_2 に対して，ある $w \in S_n$ が存在して (i)，(ii) が成立することを示せばよい．$P(X_2)$ を X_2 の射影被覆とすると，$[{}^*R^G_{L_\mu}(S) : X_2] \neq 0$ より

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)}(R^G_{L_\mu}(P(X_2)), S) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}L_\mu(q)}(P(X_2), {}^*R^G_{L_\mu}(S)) \neq 0$$

だから非零写像 $R^G_{L_\mu}(P(X_2)) \to S$ が存在し，S の射影被覆 $P(S)$ に対し

$$\begin{tikzcd} P(S) \arrow[r] & S \arrow[r] & 0 \\ & R^G_{L_\mu}(P(X_2)) \arrow[ul, dashed, "\exists\phi"] \arrow[u, "\neq 0"'] & \end{tikzcd}$$

ここで ϕ が全射でないとすれば，$\mathrm{Rad}\,P(S)$ が $P(S)$ の唯１つの極大部分加群であることから $\mathrm{Im}(\phi) \subseteq \mathrm{Rad}\,P(S)$ であるが，これは ϕ と $P(S) \to S$ の合成が非零写像であることに矛盾する．したがって ϕ は全射であって，

$$\begin{tikzcd} R^G_{L_\mu}(P(X_2)) \arrow[r] & P(S) \arrow[r] & 0 \\ & P(S) \arrow[u, equal] \arrow[ul, dashed, "\exists"] & \end{tikzcd}$$

と切断が取れるので $P(S)$ は $R^G_{L_\mu}(P(X_2))$ の直和因子である．

他方，X_1 のとり方より

$$0 \neq \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}L_\mu(q)}(X_1, {}^*R^G_{L_\mu}(S)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)}(R^G_{L_\mu}(X_1), S)$$

つまり全射 $R^G_{L_\mu}(X_1) \to S$ が存在するから，$[R^G_{L_\mu}(X_1) : S] \neq 0$ となり

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)}(P(S), R^G_{L_\mu}(X_1)) \neq 0$$

を得る．$P(S)$ が $R^G_{L_\mu}(P(X_2))$ の直和因子であるから

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)}(R^G_{L_\mu}(P(X_2)), R^G_{L_\mu}(X_1)) \neq 0$$

とわかり，Mackey 公式より

$$\begin{aligned} 1 &\leq \dim \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)}(R^G_{L_\mu}(P(X_2)), R^G_{L_\mu}(X_1)) \\ &= \dim \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}L_\mu(q)}({}^*R^G_{L_\mu} \circ R^G_{L_\mu}(P(X_2)), X_1) \\ &= \sum_{w \in \mathcal{D}_{\mu\mu}} \dim \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}L_\mu(q)}(R^{L_\mu}_{L_\mu \cap wL_\mu w^{-1}} \circ {}^*R^{wL_\mu w^{-1}}_{L_\mu \cap wL_\mu w^{-1}}({}^wP(X_2)), X_1). \end{aligned}$$

故に，ある $w \in \mathcal{D}_{\mu\mu}$ に対して直既約射影 $\mathbb{F}(L_\mu(q) \cap wL_\mu(q)w^{-1})$-加群 Q が存在して，Q は ${}^*R^{wL_\mu w^{-1}}_{L_\mu \cap wL_\mu w^{-1}}({}^wP(X_2))$ の直和因子かつ全射

$$R^{L_\mu}_{L_\mu \cap wL_\mu w^{-1}}(Q) \longrightarrow X_1$$

が存在する．そこで $R^G_{L_\mu}$ が完全関手であることに注意すると，全射

$$R^G_{L_\mu \cap wL_\mu w^{-1}}(Q) \longrightarrow R^G_{L_\mu}(X_1)$$

を得るから全射 $R^G_{L_\mu}(X_1) \to S$ を合成して，全射

$$R^G_{L_\mu \cap wL_\mu w^{-1}}(Q) \longrightarrow S$$

が得られた．$I_\nu = I_\mu \cap wI_\mu w^{-1}$ とおくと補題 2.6 の (a) と (c) の同値性よりこれは ${}^*R^G_{L_\nu}(S) \neq 0$，すなわち $\nu \in \mathcal{B}(S)$ を意味するが，μ の極小性より $I_\nu = I_\mu$ でなければならず，$I_\mu \subseteq wI_\mu w^{-1}$ を得るから左右の集合の元の個数を比べれば $I_\mu = wI_\mu w^{-1}$ を得る．故に $wL_\mu(q)w^{-1} = L_\mu(q)$ であり，全射

$$Q = R^{L_\mu}_{L_\mu \cap wL_\mu w^{-1}}(Q) \longrightarrow X_1$$

が存在することになる．Q は ${}^*R^{wL_\mu w^{-1}}_{L_\mu \cap wL_\mu w^{-1}}({}^wP(X_2)) = {}^wP(X_2)$ の直和因子であったから，$Q = {}^wP(X_2)$ であり，${}^wP(X_2)$ の商として得られる既約加群は ${}^wX_2$ に限るから $X_1 \simeq {}^wX_2$ を得る． □

定義 2.11 $\mu \models n$ に対し X が既約 cuspidal $\mathbb{F}L_\mu(q)$-加群のとき，(L_μ, X) を **cuspidal 対**と言う．

定義 2.12 S を既約 $\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)$-加群とする．cuspidal 対 (L_μ, X) に対し全射 $R^G_{L_\mu}(X) \to S$ が存在するとき S は (L_μ, X)**-系列に属する**と言う．

補題 2.11 既約 $\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)$-加群 S が (L_μ, X)-系列に属するならば，μ は $\mathcal{B}(S)$ の極小元である．

証明 $\nu < \mu$ に対し ${}^*R^G_{L_\nu}(S) \neq 0$ とする．補題 2.6 の (a) と (c) の同値性より，ある直既約射影 $\mathbb{F}L_\nu(q)$-加群 Q に対し全射 $R^G_{L_\nu}(Q) \to S$ が存在する．他方

$$\begin{tikzcd}
R^G_{L_\mu}(X) \arrow[r] & S \arrow[r] & 0 \\
& R^G_{L_\nu}(Q) \arrow[u] \arrow[ul, dashed, "\exists"] &
\end{tikzcd}$$

より $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)}(R^G_{L_\nu}(Q), R^G_{L_\mu}(X)) \neq 0$ であるが，Mackey 公式より

$${}^*R^G_{L_\mu} \circ R^G_{L_\nu}(Q) \simeq \bigoplus_{w \in \mathcal{D}_{\mu\nu}} R^{L_\mu}_{L_\mu \cap wL_\nu w^{-1}} \circ {}^*R^{wL_\nu w^{-1}}_{L_\mu \cap wL_\nu w^{-1}}({}^wQ)$$

だから，ある $w \in \mathcal{D}_{\mu\nu}$ が存在して，$P = {}^*R^{wL_\nu w^{-1}}_{L_\mu \cap wL_\nu w^{-1}}({}^wQ)$ とおくと

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}L_\mu(q)}(R^{L_\mu}_{L_\mu \cap wL_\nu w^{-1}}(P), X) \neq 0$$

となる．X は cuspidal なので，これは $I_\mu \cap wI_\nu w^{-1} = I_\mu$ を意味し，とくに $I_\mu \subseteq wI_\nu w^{-1}$ となり $|I_\mu| \leq |I_\nu|$ を得る．しかし，$\nu < \mu$ より $I_\nu \subsetneq I_\mu$ だからこれは矛盾．故に μ は $\mathcal{B}(S)$ の極小元である．　□

定理 2.3　S を既約 $\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)$-加群とすると，cuspidal 対 (L_μ, X) が S_n の共役を除いてただひとつ存在して，S は (L_μ, X)-系列に属する．

証明　まず S は必ずある (L_μ, X)-系列に属することを示そう．μ を $\mathcal{B}(S)$ の極小元とし，$X \subseteq \mathrm{Soc}({}^*R^G_{L_\mu}(S))$ を既約部分加群とする．任意の $\nu < \mu$ に対して ${}^*R^{L_\mu}_{L_\nu}(X) = 0$ となることを示そう．実際，完全関手 ${}^*R^{L_\mu}_{L_\nu}$ を完全系列

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow {}^*R^G_{L_\mu}(S)$$

に施して完全系列

$$0 \longrightarrow {}^*R^{L_\mu}_{L_\nu}(X) \longrightarrow {}^*R^{L_\mu}_{L_\nu} \circ {}^*R^G_{L_\mu}(S) = {}^*R^G_{L_\nu}(S)$$

を得るが，μ の極小性より ${}^*R^G_{L_\nu}(S) = 0$ だから ${}^*R^{L_\mu}_{L_\nu}(X) = 0$ である．故に，補題 2.5 より X は cuspidal $\mathbb{F}L_\mu(q)$-加群である．他方

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)}(R^G_{L_\mu}(X), S) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}L_\mu(q)}(X, {}^*R^G_{L_\mu}(S)) \neq 0$$

より全射 $R^G_{L_\mu}(X) \to S$ が存在するから，S は (L_μ, X)-系列に属する．

S が (L_μ, X)-系列と (L_ν, Y)-系列に属しているとする．補題 2.11 より μ と ν は $\mathcal{B}(S)$ の極小元だから，補題 2.9 よりある $w \in \mathcal{D}_{\mu\nu}$ に対し $wI_\nu w^{-1} = I_\mu$ となる．とくに $wL_\nu(q)w^{-1} = L_\mu(q)$ であって，定理 2.2 より

$$R^G_{L_\mu}({}^wY) = R^G_{L_\mu \subseteq wP_\nu w^{-1}}({}^wY)$$

と考えてよい．ここで $\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)$-加群同型 $R^G_{L_\mu}({}^wY) \simeq R^G_{L_\nu}(Y)$ を示そう．$m \mapsto wm$ $(m \in R^G_{L_\nu}(Y))$ により $\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)$-加群同型 ${}^wR^G_{L_\nu}(Y) \simeq R^G_{L_\nu}(Y)$ が得られるから $R^G_{L_\mu}({}^wY) \simeq {}^wR^G_{L_\nu}(Y)$ を示せばよい．

$N = |\,\mathrm{GL}_n(q)|/|P_\nu(q)|$ として $\mathrm{GL}_n(q)$ の $P_\nu(q)$ による左剰余類分解を

$$\mathrm{GL}_n(q)/P_\nu(q) = \bigsqcup_{i=1}^{N} h_i P_\nu(q)$$

とおけば,

$${}^wR_{L_\nu}^G(Y) = \bigoplus_{i=1}^{N} h_i \underset{\mathbb{F}P_\nu(q)}{\otimes} \mathrm{Infl}_{L_\nu(q)}^{P_\nu(q)}(Y)$$

と書けて，wgw^{-1} $(g \in \mathrm{GL}_n(q))$ の作用は

$$wgw^{-1} \cdot h_i \otimes y = gh_i \otimes y \quad (y \in Y)$$

で与えられる．また

$$\mathrm{GL}_n(q)/wP_\nu(q)w^{-1} = \bigsqcup_{i=1}^{N} (wh_iw^{-1})wP_\nu(q)w^{-1}$$

であるから,

$$R_{L_\mu}^G({}^wY) = \bigoplus_{i=1}^{N} wh_iw^{-1} \underset{\mathbb{F}wP_\nu(q)w^{-1}}{\otimes} \mathrm{Infl}_{L_\mu(q)}^{wP_\nu(q)w^{-1}}({}^wY)$$

と書けて，wgw^{-1} $(g \in \mathrm{GL}_n(q))$ の作用は

$$wgw^{-1} \cdot wh_iw^{-1} \otimes y = w(gh_i)w^{-1} \otimes y \quad (y \in Y)$$

で与えられる．そこで，$\Psi : {}^wR_{L_\nu}^G(Y) \to R_{L_\mu}^G({}^wY)$ を $h_i \otimes y \mapsto wh_iw^{-1} \otimes y$ で定めると，$gh_i = h_jp$ $(p \in P_\nu(q))$ と書いて

$$\begin{aligned}
\Psi(wgw^{-1} \cdot h_i \otimes y) &= \Psi(gh_i \otimes y) = \Psi(h_jp \otimes y) \\
&= \Psi(h_j \otimes py) = wh_jw^{-1} \otimes py \\
&= wh_jw^{-1} \otimes (wpw^{-1}) \cdot y = wh_jpw^{-1} \otimes y \\
&= wgw^{-1} \cdot wh_iw^{-1} \otimes y = wgw^{-1} \cdot \Psi(h_i \otimes y)
\end{aligned}$$

となるので，Ψ は $\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)$-加群同型である．よって $R_{L_\nu}^G(Y) \simeq R_{L_\mu}^G({}^wY)$ が示された.

この同型により，S が (L_ν, Y)-系列に属することと $(L_\mu, {}^wY)$-系列に属することは同値であるが，(L_ν, Y) は

$$(wL_\nu w^{-1}, {}^wY) = (L_\mu, {}^wY)$$

に共役だから，結局 S が (L_μ, X)-系列と $(L_\mu, {}^wY)$-系列に属しているとして一意性を示せばよい．つまり最初から $\mu = \nu$ と仮定して一意性を証明すればよい．そこで最初に戻って $\mu = \nu$ と仮定する．このとき，

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)}(R^G_{L_\mu}(X), S) \neq 0, \quad \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)}(R^G_{L_\mu}(Y), S) \neq 0$$

より $X, Y \subseteq \mathrm{Soc}({}^*R^G_{L_\mu}(S))$ であり，また補題 2.11 より μ が $\mathcal{B}(S)$ の極小元であるから，補題 2.10 よりある $w \in S_n$ が存在して

(i) $wL_\mu(q)w^{-1} = L_\mu(q)$
(ii) $X \simeq {}^wY$

である．これは (L_μ, X) と (L_μ, Y) が共役ということに他ならない．　□

定理 2.3 により

$$\{\text{ 既約 } \mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)\text{-加群の同型類 }\} = \bigsqcup_{(L_\mu, X)} (L_\mu, X)\text{-系列}$$

である．ここで，μ と X は下記のように定めた完全代表系を動く．

(1) まず $\{\mu \models n\}$ に同値関係 $\mu \sim \nu$ を，

$$\text{ある } w \in S_n \text{ が存在して } wI_\mu w^{-1} = I_\nu$$

により定義する．この同値類の完全代表系を $\{\mu \models n\}/S_n$ と書き，μ はこの完全代表系を走る．

(2) 各 $\mu \in \{\mu \models n\}/S_n$ に対して既約 cuspidal $\mathbb{F}L_\mu(q)$-加群の同型類全体のなす集合に同値関係 $X \sim Y$ を

$$\text{ある } w \in S_n \text{ が存在して } wL_\mu(q)w^{-1} = L_\mu(q) \text{ かつ } X \simeq {}^wY$$

により定義する．X はこの完全代表系を走る．

2.5　今後の方針

序でも述べたように，本書の目標は既約 $\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)$-加群の分類であるが，Harish-Chandra 系列の理論を学んだので具体的に分類の方針について述べることができる．方針は次のとおりである．

(1) cuspidal 対を“ 十分な ”数だけ構成する．
(2) 各 Harish-Chandra 系列の分類を A 型 Hecke 代数の既約加群の分類に帰着させる．
(3) A 型 Hecke 代数の既約加群を分類する．
(4) ℓ-正則共役類の個数と比較することによりこれですべての既約 $\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)$-加群が現われていることを確認する．

(1) は $\mathrm{GL}_n(q)$ の通常指標の理論を用いて既約 cuspidal 加群を構成することによりなされる．これは Gelfand の結果であり第 5 章で扱われる．(2) は modular Howlett-Lehrer 理論であり，$\mathrm{GL}_n(q)$ の場合には Dipper により示された．(3) は Dipper-James による Specht 加群理論により示される．この 2 つは第 6 章と第 7 章で扱われる．(4) は foot index と head index の全単射という純粋に組合せ論的な命題を示すことにより得られる．これも Dipper-James による．

G を有限群とすると，既約 $\mathbb{F}G$-加群の同型類の個数は G の ℓ-正則共役類の個数に等しい．(1), (2), (3) の手順で得られた既約 $\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)$-加群の同型類は foot index で分類され，$\mathrm{GL}_n(q)$ の ℓ-正則共役類は head index で分類されるので，(4) より既約 $\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)$-加群がすでにすべて得られていることがわかるのである．

以上の方針を具体的に理解するために，$\mathrm{GL}_2(q)$ の場合にどうなるかを説明しておこう．まず，$\mathrm{GL}_2(q)$ の共役類の完全代表系は

$$\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\alpha & 1\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}\quad (\alpha\in\mathbb{F}_q^\times)$$

$$\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}\quad (\{\alpha\neq\beta\}\subseteq\mathbb{F}_q^\times)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -\alpha^{q+1} \\ 1 & \alpha+\alpha^q \end{pmatrix} \quad ([\alpha]=\{\alpha,\alpha^q\}\subseteq \mathbb{F}_{q^2}\setminus\mathbb{F}_q)$$

である．$\alpha\in\mathbb{F}_{q^2}^\times$ に対し

$$f_\alpha=\begin{cases} X-\alpha & (\alpha\in\mathbb{F}_q^\times) \\ (X-\alpha)(X-\alpha^q) & (\alpha\in\mathbb{F}_{q^2}\setminus\mathbb{F}_q) \end{cases}$$

と定めると，各共役類は次の写像 $\boldsymbol{\mu}:\mathcal{F}\to\mathcal{P}$ に対応する．ただし，ここでは空でない分割に対応する $\mathcal{F}$ の元だけを書いている．

$$\begin{aligned} \alpha\in\mathbb{F}_q^\times \text{ に対し，}&\quad f_\alpha\mapsto(1^2),\ (2) \\ \{\alpha\neq\beta\}\subseteq\mathbb{F}_q^\times \text{ に対し，}&\quad f_\alpha,\ f_\beta\mapsto(1) \\ [\alpha]\subseteq\mathbb{F}_{q^2}\setminus\mathbb{F}_q \text{ に対し，}&\quad f_\alpha\mapsto(1) \end{aligned}$$

$\mathbb{F}_q^\times$ の 1 次表現を $\varphi,\psi:\mathbb{F}_q^\times\to\mathbb{F}^\times$ とし，$T_2(q)$ の 1 次表現 $\varphi\otimes\psi$ を

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\mapsto\varphi(\alpha)\psi(\beta) \quad (\alpha,\beta\in\mathbb{F}_q^\times)$$

で定める．$(T,\varphi\otimes\psi)$ は cuspidal 対であり，上で述べた分類方針によれば，$(T,\varphi\otimes\psi)$ から定まる Harish-Chandra 系列に属する既約 $\mathrm{GL}_2(q)$-加群の同型類は $\mathrm{End}_{\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_2(q)}(R_T^G(\varphi\otimes\psi))$-既約加群の同型類に対応する．$\mathbb{F}_q^\times$ の 1 次表現は $\mathbb{F}_q^\times$ の ℓ-正則元の個数だけあることに注意しよう．そして

(i) $\varphi\neq\psi$ のとき，$\mathrm{End}_{\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_2(q)}(R_T^G(\varphi\otimes\psi))\simeq\mathbb{F}$ であり，この Harish-Chandra 系列に属する既約加群の同型類は 1 つである．

(ii) $\varphi=\psi$ のとき，

$$\mathrm{End}_{\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_2(q)}(R_T^G(\varphi\otimes\psi))\simeq\mathbb{F}[T]/(T^2-(q-1)T-q)$$

であり，この Harish-Chandra 系列に属する既約加群の同型類は，

(a) $\ell\geq 3$ が $q-1$ を割り切るとき 2 個

(b) ℓ が $q+1$ を割り切るとき 1 個

である．(i) が

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \quad (\{\alpha \neq \beta\} \subseteq \mathbb{F}_q^\times)$$

の形の ℓ-正則共役類と 1 対 1 に対応するのは明らかであろう．

(ii) では (b) が (a) より個数が減るが，この場合は $R_T^G(\varphi \circ \det)$ の組成商として $\varphi \circ \det$ が重複度 2 で現れ，その結果 cuspidal $\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_2(q)$-加群を組成商にもつからである．他方，(a) では $R_T^G(\varphi \circ \det)$ の組成商に cuspidal $\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_2(q)$-加群は現れない．

例 2.1 $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$ を 1 次元射影空間とし，

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z = \frac{az+b}{cz+d} \quad (z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q))$$

により $\mathrm{GL}_2(q)$ を作用させる．また，$\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$ を基底とする $\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_2(q)$-加群を L とおく．ℓ が $q+1$ を割り切るならば，

$$L \supseteq M = \{\textstyle\sum c_x x \mid c_x \in \mathbb{F},\ \sum c_x = 0\} \supseteq N = \mathbb{F}\,(\textstyle\sum x)$$

となる．ただし和はすべて $x \in \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$ に関する和である．このとき，M/N は cuspidal $\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_2(q)$-加群になる．

他方，第 5 章で説明するように上記以外の cuspidal 既約加群を次のように構成することができる．

(iii) $\psi : \mathbb{F}_q \to \mathbb{F}^\times$ を単位表現と異なる指標とし，1 次元 $U_2(q)$-加群 $\mathbb{F}v$ を

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v = \psi(b)v$$

で定める．また，$\mathrm{GL}_2(q)$ の部分群 $V_2(q)$ を

$$V_2(q) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{F}_q, d \in \mathbb{F}_q^\times \right\}$$

で定め，$M = \mathrm{Ind}_{U_2(q)}^{V_2(q)}(\mathbb{F}v)$ とおく．すると，M は既約 $\mathbb{F}V_2(q)$-加群であり，M 上の $\mathbb{F}V_2(q)$-加群構造を延長して，

(a) $\ell \geq 3$ が $q-1$ を割り切るとき，$\mathbb{F}_{q^2}^\times \setminus \mathbb{F}_q^\times$ の ℓ-正則元の Frobenius 軌道の個数

(b) ℓ が $q+1$ を割り切るとき，$\mathbb{F}_{q^2}^\times$ の ℓ-正則元の Frobenius 軌道の個数

と同じ個数だけの異なる $\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_2(q)$-加群構造を与えることができ，これらはすべて cuspidal $\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_2(q)$-加群である．

(iii) の (a)，(b) ともに $\mathbb{F}_{q^2} \setminus \mathbb{F}_q$ の ℓ-正則元の Frobenius 軌道が

$$\begin{pmatrix} 0 & -\alpha^{q+1} \\ 1 & \alpha + \alpha^q \end{pmatrix} \qquad ([\alpha] = \{\alpha, \alpha^q\} \subseteq \mathbb{F}_{q^2} \setminus \mathbb{F}_q)$$

の形の ℓ-正則共役類と 1 対 1 に対応するのは明らかであろう．

他方，(ii) の (b) で ℓ が $q+1$ を割り切るときに個数が減った分は (iii) の (b) で $\mathbb{F}_q^\times$ の ℓ-正則元の個数だけ cuspidal $\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_2(q)$-加群が増えているのでちょうど相殺されて，結局

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \qquad (\alpha \in \mathbb{F}_q^\times)$$

の形の ℓ-正則共役類と 1 対 1 に対応するわけである．例 2.1 で現れた cuspidal 加群が $\mathbb{F}_q^\times$ の ℓ-正則元に対応する cuspidal $\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_2(q)$-加群に他ならない．

第 3 章

Hall 代数と対称関数環

3.1　$\mathrm{GL}_n(q)$ の共役類

有限群の通常指標の理論で既約指標と共役類のあいだの密接な関係を習ったことと思う．あとで復習するがモジュラー表現でも Brauer 指標の理論という似た理論が成立する．そこで，$\mathrm{GL}_n(q)$ の共役類の分類から始めよう．

一般に，Lie 型の有限群の共役類を分類する基本方針は半単純共役類ごとにベキ単共役類を考えることである．

定義 3.1　$s \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{E})$ が**半単純元**とは $\mathbb{E}^n$ の固有空間分解

$$\mathbb{E}^n = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{E}} \{v \in \mathbb{E}^n \mid sv = \lambda v\}$$

が成立することである．

$g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{E})$ を固定したとき，$s \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{E})$ が半単純元であることと gsg^{-1} が半単純元であることは同値であるから，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{E})$ または $\mathrm{GL}_n(q)$ の共役類が**半単純共役類**である，という概念が矛盾なく定義される．

定義 3.2　$u \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{E})$ が**ベキ単元**とは $(u-1)^n = 0$ のときをいう．

$u \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{E})$ がベキ単元であることと gsg^{-1} がベキ単元であることは同値であるから，半単純共役類のときと同様に**ベキ単共役類**という概念が矛盾なく

定義される．ここでは必要ないが，半単純元・ベキ単元という概念は $\mathrm{GL}_n(\mathbb{E})$ の場合にもとづいて一般の代数群でも定義されることも注意しておく．

補題 3.1　$g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{E})$ に対して，

(i) $g = su = us$

(ii) u はベキ単元であり，s は半単純元

をみたす (s, u) がただ一組存在する．さらに次が成り立つ．

(iii) s の位数は p と互いに素で，u の位数は p ベキ．

証明　$g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{E})$ の位数は有限であるから位数を $p^r m$ と書こう．ただし m は p で割り切れないとする．このときユークリッドの互除法よりある整数 x, y が存在して $xp^r + ym = 1$ となる．$s = g^{xp^r}, u = g^{ym}$ とおく．ここで，

(i) $s^m = 1$ より s の最小多項式は重根をもたないので s は半単純元.

(ii) $(u-1)^{p^r} = u^{p^r} - 1 = 0$ より u はベキ単元.

$g = su = us$ は明らかなので題意をみたす (s, u) の存在が示された.

これ以外に題意をみたす (s', u') があるとしよう．s', u' はともに $g = s'u'$ と可換なので，s' と $s = g^{xp^r}$ は可換であり，u' と $u = g^{ym}$ も可換であるが，可換な行列は同時三角化できることに注意すれば $s'^{-1}s = u'u^{-1}$ は固有値がすべて 1 の半単純元である．ゆえに $s'^{-1}s = u'u^{-1} = 1$ を得る．　□

定義 3.3　$g = su$ を **Jordan 分解**と言う．

定義 3.4　G を有限群，p を素数とする．

(a) $g \in G$ が **p-正則元**とは g の位数が p と素であるときをいう.

(b) $g \in G$ が **p-元**とは g の位数が p ベキであるときをいう.

本書では p は $\mathrm{GL}_n(q)$ の q を p ベキで書いたときの素数の意味でのみ使うのであった．$g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{E})$ の Jordan 分解とは $g \in \mathrm{GL}_n(q)$ となる $\mathrm{GL}_n(\mathbb{E})$ の有限部分群 $\mathrm{GL}_n(q)$ を考え，g を互いに可換な $\mathrm{GL}_n(q)$ の p-正則元と p-元の積に書くことに他ならない．そして補題 3.1 によればその結果得られる半単純

元とベキ単元は有限部分群 $\mathrm{GL}_n(q)$ のとりかたによらない．

我々の目標である既約 $\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)$-加群の分類で重要なのは ℓ-正則元のほうである．（ℓ は $\mathbb{F}$ の標数であった．）重複をいとわず定義を書いておく．

定義 3.5

(a) $g \in \mathrm{GL}_n(q)$ が **ℓ-正則元**とは g の位数が ℓ と素であるときをいう．

(b) $g \in \mathrm{GL}_n(q)$ が **ℓ-元**とは g の位数が ℓ ベキであるときをいう．

ここで，$\ell = 0$ のときはすべての元が ℓ-正則元であると考えることとする．

ℓ-正則元の共役もまた ℓ-正則元になるから **ℓ-正則共役類**という概念が矛盾なく定義される．本書の仮定は $\ell \neq p$ であるから，$g = su$ を Jordan 分解とすると，u は ℓ-正則元であるが s はそうとは限らない．そこで，半単純元をさらに積に分解することを考える．

補題 3.2　半単純元 $s \in \mathrm{GL}_n(q)$ に対して，

(i) $s = s_{\ell'} s_\ell = s_\ell s_{\ell'}$

(ii) $s_{\ell'}$ は ℓ-正則元，s_ℓ は ℓ-元

を満たす $(s_{\ell'}, s_\ell)$ がただ一組存在する．さらにこのとき次が成り立つ．

(iii) $s_{\ell'}, s_\ell$ はともに半単純元

証明　証明は補題 3.1 と同様である．可換な ℓ-正則元の積は ℓ-正則元で，可換な ℓ-元の積は ℓ-元であるから，一意性も明らかである．(iii) も s の位数が p と互いに素であることより明らか． □

三つ組 $(s_{\ell'}, s_\ell, u)$ に対して $g \in \mathrm{GL}_n(q)$ による共役

$$(s_{\ell'}, s_\ell, u) \mapsto (g s_{\ell'} g^{-1}, g s_\ell g^{-1}, g u g^{-1})$$

を考えると次の補題が成立する．

補題 3.3　$\mathrm{GL}_n(q)$ の共役類と $(s_{\ell'}, s_\ell, u)$ の共役類は一対一に対応する．また，対応する共役類が ℓ-正則共役類なのは $s_\ell = 1$ のときである．

証明　$g = s_{\ell'}s_\ell u$ と $g' = s'_{\ell'}s'_\ell u'$ が共役とする．$h \in \mathrm{GL}_n(q)$ を用いて $g' = hgh^{-1}$ と書くと，$s = s_{\ell'}s_\ell, s' = s'_{\ell'}s'_\ell$ に対して

$$s'u' = (hsh^{-1})(huh^{-1})$$

が成り立つ．hsh^{-1}, huh^{-1} は互いに可換な半単純元とベキ単元であるから，補題 3.1 より

$$s'_{\ell'}s'_\ell = s' = hsh^{-1} = (hs_{\ell'}h^{-1})(hs_l h^{-1}), \quad u' = huh^{-1}$$

を得る．補題 3.2 よりさらに $s'_{\ell'} = hs_{\ell'}h^{-1}, s'_\ell = hs_\ell h^{-1}$ を得る．　□

$\mathbb{F}_q$-係数多項式がモニックとは最高次の係数が 1 のときをいう．また，既約とはこれ以上 $\mathbb{F}_q[X]$ の中で因数分解できないときをいうのであった．

$$\mathcal{F} = \{f(X) \in \mathbb{F}_q[X] \mid f(0) \neq 0, f(X) \text{ は既約かつモニック }\}$$

と定義し，$f \in \mathcal{F}$ を

$$f(X) = X^d + a_1X^{d-1} + \cdots + a_d \quad (a_1, \cdots, a_d \in \mathbb{F}_q)$$

と書くとき，行列 $J(f)$ を

$$J(f) = \begin{pmatrix} 0 & & & -a_d \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & -a_2 \\ & & 1 & -a_1 \end{pmatrix}$$

で定める．さて，任意の半単純元 $s \in \mathrm{GL}_n(q)$ に対し，$\mathbb{F}_q^n$ を $X \mapsto s$ により $\mathbb{F}_q[X]$-加群と思い，また $s \otimes 1$ により

$$\mathbb{F}_q[X]^{\oplus n} = \mathbb{F}_q^n \bigotimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_q[X]$$

の $\mathbb{F}_q[X]$-加群自己準同型とも思うと，$\mathbb{F}_q[X]$-加群の完全系列

$$0 \longrightarrow \mathbb{F}_q[X]^{\oplus n} \xrightarrow{X-s} \mathbb{F}_q[X]^{\oplus n} \longrightarrow \mathbb{F}_q^n \longrightarrow 0$$

が得られる．ここで X は X 倍写像である．

$\mathbb{F}_q[X]$ 成分行列 $X - s$ に基本変形を施せば，重複度 $m_f \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在して

$$\mathbb{F}_q^n \simeq \bigoplus_{f\in\mathcal{F}} (\mathbb{F}_q[X]/(f))^{\oplus m_f}$$

となる．ここで f が既約多項式であることより $\mathbb{F}_q[X]/(f) \simeq \mathbb{F}_{q^{\deg(f)}}$ である．

今 $\mathbb{F}_q[X]$-加群として $\mathbb{F}_q^n$ が同型であることと s が $\mathrm{GL}_n(q)$ の同じ共役類に属することが同値であることに注意すると，$\mathrm{GL}_n(q)$ の半単純共役類は集合

$$\{(m_f)_{f\in\mathcal{F}} \mid m_f \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ \sum_{f\in\mathcal{F}} m_f \deg(f) = n\}$$

で分類されることがわかる．

定義 3.6 半単純元 $s \in \mathrm{GL}_n(q)$ に対し

$$C_G(s) = \{g \in \mathrm{GL}_n(q) \mid gs = sg\}$$

とおき，s の**中心化群**とよぶ．$C_G(s)$ のベキ単共役類とは p 元からなる $C_G(s)$ の共役類のことである．

補題 3.4 $g = su \in \mathrm{GL}_n(q)$ に対し

(i) s は $\mathrm{GL}_n(q)$ の半単純共役類の完全代表系を走る．
(ii) u は $C_G(s)$ のベキ単共役類の完全代表系を走る．

とすると $\mathrm{GL}_n(q)$ の共役類の完全代表系が得られる．

証明 s を固定したとき $\mathrm{GL}_n(q)$ の共役は $g \in C_G(s)$ で考えることになることに注意すれば補題 3.3 より明らか． □

半単純元 $s \in \mathrm{GL}_n(q)$ に対し $C_G(s)$ を計算しよう．定義から

$$C_G(s) = \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_q[X]}(\mathbb{F}_q^n) := \mathrm{End}_{\mathbb{F}_q[X]}(\mathbb{F}_q^n) \cap \mathrm{GL}_n(q)$$

である．ここで $X \mapsto s$ によって $\mathbb{F}_q^n$ が $\mathbb{F}_q[X]$-加群になっていること，および

$$\mathbb{F}_q^n \simeq \bigoplus_{f\in\mathcal{F}} (\mathbb{F}_q[X]/(f))^{\oplus m_f}$$

であったことを思い出そう．

このとき，次の (A)，(B)，(C) が成り立つ．

補題 3.5

(A) $f \in \mathcal{F}$ に対し $\mathbb{F}_q[X]/(f)$ は既約 $\mathbb{F}_q[X]$-加群である．

(B) $f, f' \in \mathcal{F}$ に対し $f \neq f'$ ならば

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_q[X]}(\mathbb{F}_q[X]/(f), \mathbb{F}_q[X]/(f')) = 0.$$

(C) $f \in \mathcal{F}$ に対し $\mathrm{End}_{\mathbb{F}_q[X]}(\mathbb{F}_q[X]/(f)) \simeq \mathbb{F}_{q^{\deg(f)}}$.

証明　$\mathbb{F}_q[X]/(f)$ に非零部分加群 V が存在したとし，$0 \neq c \in V$ をとると，$\mathbb{F}_q[X]/(f)$ が体なので c^{-1} が存在して f を法として X の多項式で書ける．故に $1 \in V$ となり $V = \mathbb{F}_q[X]/(f)$ を得るから，$\mathbb{F}_q[X]/(f)$ は既約 $\mathbb{F}_q[X]$-加群である．よって (A) が示された．

次に $f, f' \in \mathcal{F}$ に対し $f \neq f'$ とし，非零 $\mathbb{F}_q[X]$-加群準同型

$$\varphi : \mathbb{F}_q[X]/(f) \to \mathbb{F}_q[X]/(f')$$

が存在したとすると，(A) より φ は $\mathbb{F}_q[X]$-加群同型になる．そこで両辺で f 倍写像を考えると，左辺では 0 倍写像であるので f はイデアル (f') に属する．同様に f' はイデアル (f) に属するので $(f) = (f')$ となるが，f, f' はともにモニック多項式であるから $f = f'$ となる．よって (B) が示された．

最後に $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}_q[X]}(\mathbb{F}_q[X]/(f))$ とすると，$\varphi(1) = a \in \mathbb{F}_q[X]/(f)$ に対し，φ は a 倍写像に等しい．よって，$\varphi \mapsto \varphi(1)$ により $\mathbb{F}_q$-代数準同型

$$\mathrm{End}_{\mathbb{F}_q[X]}(\mathbb{F}_q[X]/(f)) \longrightarrow \mathbb{F}_q[X]/(f)$$

を得るが，これが全単射なのは明らかである．よって (C) が示された．　□

いままでは広義の分割のみを考えてきたが，以後は（狭義の）分割が重要になる．

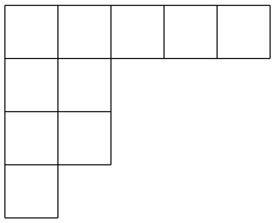
定義 3.7　自然数の数列 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots)$ が n の**分割**とは $\lambda \models n$ かつ $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots$ のときをいい，$\lambda \vdash n$ とかく．分割の全体のなす集合を

$$\mathcal{P} = \{\lambda \vdash n \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$$

で表す．

$\lambda \vdash n$ のとき λ を Young 図形で表すのが普通である．Young 図形とは下図のように，k 行目に λ_k 個の正方形を左がそろうように並べたものである．

例 3.1　$\lambda = (5, 2, 2, 1, 0, 0, \cdots)$ ならば，λ の Young 図形は



$\lambda \vdash n$ に対し Young 図形を考え，その k 列目にある正方形の個数を ${}^t\lambda_k$ とする．λ の**転置** ${}^t\lambda \vdash n$ とは

$$ {}^t\lambda = ({}^t\lambda_1, {}^t\lambda_2, \cdots) $$

で定めた分割をいう．${}^t\lambda_k > 0$ ならば ${}^t\lambda_k = \max\{j \mid \lambda_j \geq k\}$ である．

たとえば，$\lambda = (5, 2, 2, 1, 0, 0, \cdots)$ ならば

$$ {}^t\lambda = (4, 3, 1, 1, 1, 0, \cdots) $$

である．

Jordan 標準形の理論より $\mathrm{GL}_n(q)$ のベキ単共役類が n の分割で分類されるのは明らかであろう．とくに次の補題が成立する．

補題 3.6　$s \in \mathrm{GL}_n(q)$ を半単純元とすると次の群同型が成り立つ．

$$ C_G(s) = \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_q[X]}(\mathbb{F}_q^n) \simeq \prod_{f \in \mathcal{F}} \mathrm{GL}_{m_f}(\mathbb{F}_{q^{\deg(f)}}) $$

ここで $(m_f)_{f \in \mathcal{F}}$ は上で定めた重複度である．とくに $C_G(s)$ のベキ単共役類は $\boldsymbol{\mu}(f) \vdash m_f$ をみたす $\mathcal{F}$ から $\mathcal{P}$ への写像の集合

$$ \{\boldsymbol{\mu} : \mathcal{F} \to \mathcal{P} \mid \boldsymbol{\mu}(f) \vdash m_f\} $$

で分類される．

証明　(B), (C) より題意の同型は明らかだからベキ単共役類に関する主張のみ示せばよいが，p 元であることは群同型で保たれるから，この同型でベキ単共役類はベキ単共役類に対応する．故に主張は Jordan 標準形の理論から明らか． □

X の $\mathbb{F}_q[X]/(f) \simeq \mathbb{F}_{q^{\deg(f)}}$ における像を α_f と書く．α_f は $\mathbb{F}_{q^{\deg(f)}}$ の生成元であり，また $f(X)=0$ の根である．

$s \in C_G(s)$ であるから補題 3.6 の写像による s の像が考えられる．s は $\mathrm{End}_{\mathbb{F}_q[X]}(\mathbb{F}_q[X]/(f))$ の元としては X 倍写像に対応するから，同型の定義に戻れば

$$\mathrm{End}_{\mathbb{F}_q[X]}(\mathbb{F}_q[X]/(f)) \simeq \mathbb{F}_q[X]/(f) \simeq \mathbb{F}_{q^{\deg(f)}}$$

により補題 3.6 の写像による s の像が

$$C_G(s) \simeq \prod_{f\in\mathcal{F}} \mathrm{GL}_{m_f}(\mathbb{F}_{q^{\deg(f)}}), \quad s \mapsto (\alpha_f)_{f\in\mathcal{F}}$$

で与えられる．ここで右辺の α_f は m_f 次定数行列を表す．

$s_{\ell'}, s_\ell$ が s のベキであることに注意すれば，以上より $s = s_{\ell'}s_\ell$ を計算するには，$\mathbb{F}_{q^{\deg(f)}}$ で考えればよいことがわかる．すなわち，α_f を乗法群 $\mathbb{F}_{q^{\deg(f)}}^\times$ の中で ℓ-正則元と ℓ-元の積に分解することに同値である．

定義 3.8　$\alpha \in \mathbb{F}_{q^d}^\times$ の Frobenius 軌道 $\{\alpha^{q^k} \mid k \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}\}$ を $[\alpha]$，この軌道に属する元の個数を $\#[\alpha]$ で表す．

定義 3.9

$$I = \left(\begin{array}{ccc|ccc} d_1, & \cdots, & d_N & m_1, & \cdots, & m_N \\ [\alpha_1], & \cdots, & [\alpha_N] & \mu^{(1)}, & \cdots, & \mu^{(N)} \end{array}\right)$$

が (n,ℓ)**-index** であるとは，

(i) $\mu^{(i)} \vdash m_i$.

(ii) $\alpha_i \in \mathbb{F}_{q^{d_i}}^\times$ は ℓ-正則元であり，ℓ-元 $\beta_i \in \mathbb{F}_{q^{d_i}}^\times$ が存在して $\#[\alpha_i\beta_i] = d_i$，すなわち β_i をかけると $\mathbb{F}_{q^{d_i}}$ の生成元になる．

(iii) $\sum_{i=1}^{N} m_i d_i = n$.

をみたすときをいう．ここで，$1, \cdots, N$ を並べ替えたものは同じ (n, ℓ)-index であるとみなす．

$\ell = 0$ のときは α_i 自身が $\mathbb{F}_{q^{d_i}}$ の生成元である．また，Frobenius 軌道 $[\alpha]$ に対しモニック既約多項式

$$f_{[\alpha]} = \prod_{x \in [\alpha]} (X - x) \in \mathbb{F}_q[X]$$

を対応させるとこの対応は全単射であるから，$(n, 0)$-index は

$$\sum_{f \in \mathcal{F}} \deg(f) |\boldsymbol{\mu}(f)| = n$$

をみたす写像 $\boldsymbol{\mu} : \mathcal{F} \to \mathcal{P}$ とも思える．

定義 3.10 (n, ℓ)-index

$$I = \left(\begin{array}{ccc|ccc} d_1, & \cdots, & d_N & m_1, & \cdots, & m_N \\ [\alpha_1], & \cdots, & [\alpha_N] & \mu^{(1)}, & \cdots, & \mu^{(N)} \end{array} \right)$$

が **head** であるとは，

(i) $\#[\alpha_i] = d_i$.

(ii) $[\alpha_1], \cdots, [\alpha_N]$ は相異なる．

をみたすときを言う．

命題 3.1

(1) $\mathrm{GL}_n(q)$ の共役類は $(n, 0)$-index で分類される．

(2) $\mathrm{GL}_n(q)$ の ℓ-正則共役類は head (n, ℓ)-index で分類される．

証明 $\mathrm{GL}_n(q)$ の共役類が $(n, 0)$-index で分類されることは補題 3.6 と上の注意よりしたがう．ここでさらに g が ℓ-正則とする．これは $g = su$ を Jordan 分解としたとき s が ℓ-正則であることと同値である．半単純共役類は $(m_f)_{f \in \mathcal{F}}$ で分類され，$C_G(s)$ のベキ単共役類は $\boldsymbol{\mu}(f) \vdash m_f$ をみたす写像 $\boldsymbol{\mu} : \mathcal{F} \to \mathcal{P}$

で分類されることをすでに示してあり，s が ℓ-正則かどうかは m_f に関係せず α_f が ℓ-正則かどうかだけで決まることもすでに示してあるから，結局 ℓ-正則半単純共役類は α_f が ℓ-正則となるときのみ $m_f \neq 0$ となり得る $(m_f)_{f\in\mathcal{F}}$ で分類されることまでわかっている．α_f は $\mathbb{F}[X]/(f)$ の生成元かつ $f(X)=0$ の根だから，α_f が ℓ-正則な $f \in \mathcal{F}$ と ℓ-正則な元の Frobenius 軌道には

$$f(X) = \prod_{x\in[\alpha_f]} (X-x)$$

により全単射がある．ここまでくれば (2) も明らかである．　□

補題 3.7　$f = X^d + a_1X^{d-1} + \cdots + a_d \in \mathcal{F}$ に対し，

$$s = \begin{pmatrix} J(f) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J(f) \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_d & \mathrm{I}_d & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \mathrm{I}_d \\ 0 & & & \mathrm{I}_d \end{pmatrix}$$

とし，$g = su$ とおく．$\mathbb{F}_q^{dm}$ を $X \mapsto g$ により $\mathbb{F}_q[X]$-加群とみなすと $\mathbb{F}_q[X]$-加群同型 $\mathbb{F}_q^{dm} \simeq \mathbb{F}_q[X]/(f^m)$ が成り立つ．

証明　$\mathrm{End}_{\mathbb{F}_q[X]}(\mathbb{F}_q^{dm})$ を計算しよう．$\mathbb{F}_q^d$ を $X \mapsto J(f)$ により $\mathbb{F}_q[X]$-加群と思うと $\mathbb{F}_q^d \simeq \mathbb{F}[X]/(f)$ であり，

$$\mathrm{End}_{\mathbb{F}_q[X]}(\mathbb{F}_q^d) \simeq \mathbb{F}_{q^d}$$

となるから，$\{A \in \mathrm{Mat}_{dm}(\mathbb{F}_q) \mid As = sA, (u-1)A = A(u-1)\}$ は

$$\left\{ A \in \mathrm{Mat}_m(\mathbb{F}_{q^d}) \;\middle|\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} A = A \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

に等しい．つまり

$$\mathrm{End}_{\mathbb{F}_q[X]}(\mathbb{F}_q^{dm}) \simeq \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & a_2 \\ & & & a_1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a_i \in \mathbb{F}_{q^d} \right\}$$

を得る．特に $\mathrm{End}_{\mathbb{F}_q[X]}(\mathbb{F}_q^{dm})$ の元は可逆でなければベキ零である．もし $\mathbb{F}_q^{dm}$ が直既約 $\mathbb{F}_q[X]$-加群でないとすると直既約因子への射影子をとれば可逆でもベキ零でもない $\mathrm{End}_{\mathbb{F}_q[X]}(\mathbb{F}_q^{dm})$ の元が得られるので矛盾．故に $\mathbb{F}_q^{dm}$ は直既約である．ゆえに中国剰余定理より $f' \in \mathcal{F}$ と $d' \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ が存在して

$$\mathbb{F}_q^{dm} \simeq \mathbb{F}_q[X]/(f'^{d'})$$

と書けるが，g の固有値を見れば $f' = f$ であり，さらに次元を見れば $d' = d$ でなければならず，$\mathbb{F}_q^{dm} \simeq \mathbb{F}_q[X]/(f^m)$ を得る． □

3.2 Hall 代数

$\mathrm{GL}_n(q)$ の Brauer 指標を知るためには，まずは通常指標の理論を知らねばならない．$\mathrm{GL}_n(q)$ の既約通常指標は J. A. Green によって始めて構成されたが，のちに I. G. Macdonald により完全に初等的な対称式の理論として書き直された．しかし Macdonald は組合せ論的すぎるので本書では Macdonald にしたがいつつも，現代表現論の視点から解説する．$\mathrm{GL}_n(q)$ の既約通常指標を導く最初の鍵となるのが対称関数環と Hall 代数の計量同型である．本節ではまず Hall 代数を導入しよう．

$\mathrm{GL}_n(q)$ の共役類は $(n,0)$-index で分類されるが前節で注意したように $(n,0)$-index を

$$\sum_{f \in \mathcal{F}} \deg(f)|\boldsymbol{\mu}(f)| = n$$

をみたす写像 $\boldsymbol{\mu} : \mathcal{F} \to \mathcal{P}$ と思い，対応する $\mathrm{GL}_n(q)$ の共役類を $C_{\boldsymbol{\mu}}$ と書く．$g \in C_{\boldsymbol{\mu}}$ なら，$X \mapsto g$ により $\mathbb{F}_q^n$ を $\mathbb{F}_q[X]$-加群とみなせば

$$\boldsymbol{\mu}(f) = (\boldsymbol{\mu}(f)_1, \boldsymbol{\mu}(f)_2, \cdots)$$

として

$$\mathbb{F}_q^n \simeq \bigoplus_{f \in \mathcal{F}} \left(\mathbb{F}_q[X]/(f^{\boldsymbol{\mu}(f)_1}) \oplus \mathbb{F}_q[X]/(f^{\boldsymbol{\mu}(f)_2}) \oplus \cdots \right)$$

である．

定義 3.11　$\mathrm{GL}_n(q)$ 上の複素数値関数 $\pi_{\boldsymbol{\mu}}$ を

$$\pi_{\boldsymbol{\mu}}(g) = \begin{cases} 1 & (g \in C_{\boldsymbol{\mu}}) \\ 0 & (g \notin C_{\boldsymbol{\mu}}) \end{cases}$$

で定め，$C_{\boldsymbol{\mu}}$ の特性関数とよぶ．また，

$$V_{\boldsymbol{\mu}} = \bigoplus_{f \in \mathcal{F}} \left(\mathbb{F}_q[X]/(f^{\boldsymbol{\mu}(f)_1}) \oplus \mathbb{F}_q[X]/(f^{\boldsymbol{\mu}(f)_2}) \oplus \cdots \right)$$

により $\mathbb{F}_q[X]$-加群 $V_{\boldsymbol{\mu}}$ を定める．

$\pi_{\boldsymbol{\mu}}$ は類関数である．すなわち，共役類の上で一定の値をとる関数である．そこで $\mathrm{GL}_n(q)$ 上の複素数値類関数のなすベクトル空間を A_n とする．ただし $A_0 = \mathbb{C}$ と考える．$A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ とする．A は

$$\{\pi_{\boldsymbol{\mu}} \mid \boldsymbol{\mu} : \mathcal{F} \to \mathcal{P}\}$$

を基底にもつ．A に積を定義しよう．

定義 3.12　$f_1 \in A_{n_1}, f_2 \in A_{n_2}$ のとき，標準放物型部分群

$$P_{(n_1,n_2)}(q) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overset{n_1}{\longleftrightarrow} & \overset{n_2}{\longleftrightarrow} \end{array} \\ \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \end{array}$$

上の類関数 $f_1 \boxtimes f_2 : P_{(n_1,n_2)}(q) \to \mathbb{C}$ を

$$f_1 \boxtimes f_2 \left(\begin{pmatrix} g_1 & * \\ 0 & g_2 \end{pmatrix} \right) = f_1(g_1) f_2(g_2)$$

で定め，

$$f_1 \circ f_2(g) = \frac{1}{|P_{(n_1,n_2)}(q)|} \sum_{\substack{h \in \mathrm{GL}_{n_1+n_2}(q) \\ h^{-1}gh \in P_{(n_1,n_2)}(q)}} f_1 \boxtimes f_2 \, (h^{-1}gh)$$

とおく．

G を有限群，H を G の部分群，V を $\mathbb{C}H$-加群とする．$\chi_V : H \to \mathbb{C}$ を V の指標としよう．すなわち，V の基底をひとつ固定して $h \in H$ の作用を行列表示すると，この行列の対角成分の和が $\chi_V(h)$ である．χ_V は H 上の類関数であり，

$$x \mapsto \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{g \in G \\ g^{-1}xg \in H}} \chi_V(g^{-1}xg) \quad (x \in G)$$

は $\mathrm{Ind}_H^G(V)$ の指標である．故に，$f_1 \circ f_2$ は Harish-Chandra 誘導

$$R_L^G = \mathrm{Ind}_{P_{(n_1,n_2)}(q)}^{\mathrm{GL}_{n_1+n_2}(q)} \circ \mathrm{Infl}_{L_{(n_1,n_2)}(q)}^{P_{(n_1,n_2)}(q)}$$

を指標で考えたものである．このことからとくに，A は単位的結合 $\mathbb{C}$-代数であることがわかる．A を **Hall 代数**とよぶ．

定義 3.13 非負整数 $g_{\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\nu}}^{\boldsymbol{\lambda}}$ を $V_{\boldsymbol{\lambda}}$ の部分 $\mathbb{F}_q[X]$-加群 U であって

$$U \simeq V_{\boldsymbol{\mu}}, \quad V_{\boldsymbol{\lambda}}/U \simeq V_{\boldsymbol{\nu}}$$

をみたすものの個数とする．

命題 3.2 $\pi_{\boldsymbol{\mu}}, \pi_{\boldsymbol{\nu}} \in A$ に対し次の積公式が成立．

$$\pi_{\boldsymbol{\mu}} \circ \pi_{\boldsymbol{\nu}} = \sum_{\boldsymbol{\lambda}} g_{\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\nu}}^{\boldsymbol{\lambda}} \pi_{\boldsymbol{\lambda}}$$

証明 $x \in C_{\boldsymbol{\lambda}}$ を固定し $\pi_{\boldsymbol{\mu}} \circ \pi_{\boldsymbol{\nu}}(x) = g_{\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\nu}}^{\boldsymbol{\lambda}}$ を示す．$n = |\boldsymbol{\lambda}|$ とし，いつものように $X \mapsto x$ により $\mathbb{F}_q^n$ を $\mathbb{F}_q[X]$-加群とみなすと $\mathbb{F}_q^n \simeq V_{\boldsymbol{\lambda}}$ である．

次に $n_1 = |\boldsymbol{\mu}|$ として $\mathbb{F}_q^{n_1}$ を最初の n_1 成分以外は 0 であるベクトルのなす $\mathbb{F}_q^n$ の部分空間とする．$n_2 = n - n_1$ とし，

$$\mathrm{GL}_n(q)/P_{(n_1,n_2)}(q) = \bigsqcup_{i=1}^{N} g_i P_{(n_1,n_2)}(q)$$

を左剰余類分解とすると，$\{g_i \mathbb{F}_q^{n_1}\}_{1 \le i \le N}$ が n_1 次元部分空間の完全代表系で

ある．$U = g_i \mathbb{F}_q^{n_1}$ が

$$U \simeq V_{\boldsymbol{\mu}}, \quad V_{\boldsymbol{\lambda}}/U \simeq V_{\boldsymbol{\nu}}$$

をみたすための必要十分条件は

$$g_i^{-1} x g_i = \begin{pmatrix} x' & * \\ 0 & x'' \end{pmatrix} \in P_{(n_1,n_2)}(q)$$

かつ $x' \in C_{\boldsymbol{\mu}}, x'' \in C_{\boldsymbol{\nu}}$ が成り立つことである．つまり

$$g_{\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\nu}}^{\boldsymbol{\lambda}} = \sum_{g_i^{-1} x g_i \in P_{(n_1,n_2)}(q)} \pi_{\boldsymbol{\mu}} \boxtimes \pi_{\boldsymbol{\nu}}(g_i^{-1} x g_i)$$

であるから，$g_{\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\nu}}^{\boldsymbol{\lambda}} = \pi_{\boldsymbol{\mu}} \circ \pi_{\boldsymbol{\nu}}(x)$ を得る． □

$\mathbb{C}$-代数 A には $\pi_{\boldsymbol{\mu}}$ による基底と $\mathrm{GL}_n(q)$（$n = 0, 1, \cdots$）の既約通常指標のなす基底があるが，各既約通常指標を $\pi_{\boldsymbol{\mu}}$ の一次結合で表すと，係数は代数的整数であり，これらの係数は指標表の成分に他ならない．

類関数のなす空間の基底がわかっただけでは既約通常指標を計算することはできない．今の場合では基底 $\pi_{\boldsymbol{\mu}}$ がわかっていてもこれだけから既約通常指標を計算することはできない．類関数がさらに既約通常指標の $\mathbb{Z}$-係数で書けることがわかってはじめて指標理論が使えるからである．であるから，$\mathrm{GL}_n(q)$ の既約通常指標が求まったのは大きな進展であり，Deligne-Lusztig に始まり，Lusztig, Shoji によるより一般の Lie 型有限群の既約通常指標の決定に理論は発展していくのである．そこでは既約通常指標の $\mathbb{Z}$-係数で書けることを示すのに Deligne-Lusztig 多様体の ℓ-進コホモロジー群が使われ，有限群の表現論の大きな転機となった．

3.3　対称関数環

定義 3.14　対称多項式環 $\mathbb{Z}[X_1, \cdots, X_n]^{S_n}$ の d 次斉次部分を $\mathbb{Z}[X_1, \cdots, X_n]_d^{S_n}$ と書く．$m \geq n$ のとき，代数準同型

$$\rho_{mn} : \mathbb{Z}[X_1, \cdots, X_m]_d^{S_m} \longrightarrow \mathbb{Z}[X_1, \cdots, X_n]_d^{S_n}$$

を $f(X_1,\cdots,X_m)\mapsto f(X_1,\cdots,X_n,0,\cdots,0)$ で定めると

(i) $\rho_{nn}=\mathrm{Id}$

(ii) $\rho_{mn}\circ\rho_{lm}=\rho_{ln}$

をみたす．すなわち射影系をなす．そこで，

$$\Lambda_d=\varprojlim_n \mathbb{Z}[X_1,\cdots,X_n]_d^{S_n}$$

と定義して，Λ_d の元 $f(X_1,X_2,\cdots)$ を無限変数の d 次斉次対称式と思う．また，

$$\Lambda=\bigoplus_{d\geq 0}\Lambda_d$$

とおき，**対称関数環**とよぶ.

定義 3.15 r 次斉次対称関数 $e_r\in\Lambda$ を

$$E(t)=\prod_{i\geq 1}(1+X_it)=\sum_{r\geq 0}e_rt^r\in\Lambda[[t]]$$

により定め，r 次**基本対称関数**とよぶ．より正確に書けば，

$$\prod_{i=1}^{n}(1+X_it)=\sum_{r\geq 0}e_r(X_1,\cdots,X_n)t^r$$

として，$e_r=\varprojlim_n e_r(X_1,\cdots,X_n)$ である.

対称多項式の基本定理より

$$\mathbb{Z}[X_1,\cdots,X_n]^{S_n}=\mathbb{Z}[e_1(X_1,\cdots,X_n),\cdots,e_n(X_1,\cdots,X_n)]$$

なので，Λ は無限変数多項式環 $\mathbb{Z}[e_1,e_2,\cdots]$ になる.

定義 3.16 r 次斉次対称関数 $h_r\in\Lambda$ を

$$H(t)=\frac{1}{\prod_{i\geq 1}(1-X_it)}=\sum_{r\geq 0}h_rt^r\in\Lambda[[t]]$$

により定め，r 次**完全対称関数**とよぶ．その正確な意味は基本対称関数の定義

のときと同様である．

基本対称関数と完全対称関数の関係は次式で与えられる．

$$\text{(a)}\ \ e_n = \det(h_{1-i+j})_{1\le i,j\le n} \qquad \text{(b)}\ \ h_n = \det(e_{1-i+j})_{1\le i,j\le n}$$

実際，$H(t)E(-t) = 1$ より

$$\sum_{r=0}^{s} (-1)^r e_r h_{s-r} = \delta_{s,0}$$

であり，この漸化式の解 $e_1, e_2, \cdots$ は $h_1, h_2, \cdots$ から一意的に決まるから

$$\det\begin{pmatrix} h_0 & h_1 & \cdots & \cdots & h_{n-1} & h_n \\ h_0 & h_1 & \cdots & \cdots & h_{n-1} & h_n \\ 0 & h_0 & \cdots & \cdots & h_{n-2} & h_{n-1} \\ & 0 & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & 0 & h_0 & h_1 \end{pmatrix} = 0$$

を第 1 行に関して余因子展開した式に注意すれば (a) を得る．

(b) の場合は，同じ漸化式を解 $h_1, h_2, \cdots$ が $e_1, e_2, \cdots$ から一意的に決まると思えば同様の議論で示される．

(b) より $h_1, \cdots, h_{n-1}$ も代数的に独立であることがわかるから，Λ は無限変数多項式環 $\mathbb{Z}[h_1, h_2, \cdots]$ でもある．

以上から，Λ は $e_r \mapsto h_r$ で定義される代数自己同型をもつ．これを

$$\omega : \Lambda \to \Lambda$$

で表す．(a)，(b) より $\omega^2 = 1$ である．

定義 3.17　r 次斉次対称関数 $p_r \in \Lambda$ を

$$P(t) = \sum_{i\ge 1} \frac{X_i}{1 - X_i t} = \sum_{r\ge 1} p_r t^{r-1} \in \Lambda[[t]]$$

で定め，$\mu \in \mathcal{P}$ に対し，$p_\mu = p_{\mu_1} p_{\mu_2} \cdots$ を**ベキ和対称関数**という．

補題 3.8 Λ の自己同型 ω に対し，$\omega(p_r) = (-1)^{r-1}p_r$ が成立．

証明 対数微分法により

$$H'(t) = H(t)P(t), \quad E'(-t) = E(-t)P(t)$$

が $\Lambda[[t]]$ 中で成立することに注意する．

$$\sum_{r\geq 1} rh_r t^{r-1} = (\sum_{r\geq 0} h_r t^r)(\sum_{r\geq 1} p_r t^{r-1})$$

に ω を施した式

$$\sum_{r\geq 1} re_r t^{r-1} = (\sum_{r\geq 0} e_r t^r)(\sum_{r\geq 1} \omega(p_r) t^{r-1})$$

に $t \mapsto -t$ と代入すると

$$E'(-t) = E(-t)(\sum_{r\geq 1} (-1)^{r-1}\omega(p_r) t^{r-1})$$

となるから，

$$P(t) = \sum_{r\geq 1} (-1)^{r-1}\omega(p_r) t^{r-1}$$

すなわち $\omega(p_r) = (-1)^{r-1}p_r$ を得る． □

次で導入する Schur 多項式には，簡約複素 Lie 群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の既約複素正則表現の指標という意味づけもあり，対称群の既約通常指標と $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の既約複素正則表現の指標が Schur-Weyl 相互律で結ばれる．以下では Weyl の指標公式にもとづいて Schur 多項式を定義するが，$sh(T) = \lambda$ の半標準盤から定まる単項式の和

$$s_\lambda(X_1, \cdots, X_n) = \sum_{sh(T)=\lambda} X_1^{\mu_1(T)} \cdots X_n^{\mu_n(T)}$$

という表示もある．T が $sh(T) = \lambda$ の半標準盤とは，λ の Young 図形に各行左から右に単調非減少，各列上から下に単調増加となるように $1, \cdots, n$ を書きこんだものをいい，書きこまれた数字 i の重複度を $\mu_i(T)$ で表す．

本書では，Schur 関数を $\mathrm{GL}_n(q)$ の既約通常指標を Hall 代数を通じて記述するのに用いる．

定義 3.18　整数列 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ に対し

$$D(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = \begin{vmatrix} X_1^{\alpha_1} & \cdots & X_1^{\alpha_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_n^{\alpha_1} & \cdots & X_n^{\alpha_n} \end{vmatrix}$$

とおく．$D(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ は交代式であるから $X_i - X_j$ $(i > j)$ で割り切れ，$\mathbb{Q}[X_1, \cdots, X_n]$ が一意分解整域であることより

$$D(n-1, n-2, \cdots, 0) = \prod_{n \geq i > j \geq 1} (X_i - X_j)$$

かつ $D(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ は $D(n-1, n-2, \cdots, 0)$ で割り切れるが，$\mathbb{Z}[X_1, \cdots, X_n]$ の中で割り切れていることもわかる．そこで，$\lambda \in \mathcal{P}$ が $k > n$ に対し $\lambda_k = 0$ をみたすとき，

$$s_\lambda(X_1, \cdots, X_n) = \frac{D(\lambda_1 + n - 1, \lambda_2 + n - 2, \cdots, \lambda_n)}{D(n-1, n-2, \cdots, 0)} \in \mathbb{Z}[X_1, \cdots, X_n]^{S_n}$$

を **Schur 多項式**とよび，

$$s_\lambda = \varprojlim_n s_\lambda(X_1, \cdots, X_n)$$

を **Schur 関数**とよぶ．

Schur 関数を対称関数環の生成元 $h_1, h_2, \cdots$ を用いて表すと次のようになる．

補題 3.9　$s_\lambda = \det(h_{\lambda_i - i + j})_{1 \leq i, j \leq n}$ が成立．

証明　正確な証明を書くにはまず有限変数で議論してのち射影極限をとるべきだが，ここでは無限変数のまま証明を述べる．まず

$$E^{(k)}(t) = \sum_{r \geq 0} e_r^{(k)} t^r = \prod_{i \neq k} (1 + X_i t)$$

と定めると $H(t)E^{(k)}(-t) = (1 - X_k t)^{-1}$ であるから，$\alpha_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し

$$\sum_{j=1}^{n} h_{\alpha_i - n + j}(-1)^{n-j} e_{n-j}^{(k)} = X_k^{\alpha_i}$$

が成り立つことに注意する．ゆえに，$(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ に対し

$$M = ((-1)^{n-j} e_{n-j}^{(k)})_{1 \leq j,k \leq n}, \quad A_\alpha = (X_k^{\alpha_i})_{1 \leq i,k \leq n}$$
$$H_\alpha = (h_{\alpha_i - n + j})_{1 \leq i,j \leq n}$$

とおくと $A_\alpha = H_\alpha M$ が成り立つ．$\alpha = (n-1, \cdots, 0)$ とすると

$$\begin{vmatrix} X_1^{n-1} & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_n^{n-1} & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \det M$$

であり，$\alpha = (\lambda_1 + n - 1, \cdots, \lambda_n)$ とすると

$$\begin{vmatrix} X_1^{\lambda_1 + n - 1} & \cdots & X_1^{\lambda_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_n^{\lambda_1 + n - 1} & \cdots & X_n^{\lambda_n} \end{vmatrix} = \det(h_{\lambda_i - i + j})_{1 \leq i,j \leq n} \cdot \det M$$

であるから題意の式を得る． □

補題 3.10 Λ は $\{s_\lambda\}_{\lambda \in \mathcal{P}}$ を $\mathbb{Z}$-自由基底にもつ．また，Λ の自己同型 ω をこの基底に関して表示すると $\omega(s_\lambda) = s_{{}^t\lambda}$ である．

証明 $f \in \mathbb{Z}[X_1, \cdots, X_n]^{S_n}$ ならば $f \det(X_i^{n-j})_{1 \leq i,j \leq n}$ は整数係数交代多項式であるから，

$$f \det(X_i^{n-j})_{1 \leq i,j \leq n} = \sum_{\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)} c_\alpha X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n}$$

と書くと，$w \in S_n$ に対して $c_{w\alpha} = (-1)^{\ell(w)} c_\alpha$ なので，$f \det(X_i^{n-j})_{1 \leq i,j \leq n}$ は $\det(X_i^{\alpha_j})_{1 \leq i,j \leq n}$ の $\mathbb{Z}$-係数一次結合である．ゆえに，

$$\{\det(X_i^{\alpha_j})_{1 \leq i,j \leq n} \mid \alpha_1 > \cdots > \alpha_n \geq 0\}$$

の $\mathbb{Z}$-係数一次結合でもあるから

$$f \in \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{P}} \mathbb{Z} s_\lambda(X_1, \cdots, X_n)$$

を得る．故に $\Lambda = \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{P}} \mathbb{Z} s_\lambda$ が成立し，Λ は $\{s_\lambda\}_{\lambda \in \mathcal{P}}$ を $\mathbb{Z}$-自由基底にもつ．

次に $p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし $(p+q)$ 次行列 H, E を

$$H = (h_{i-j})_{0 \leq i,j \leq p+q-1}, \quad E = ((-1)^{i-j} e_{i-j})_{0 \leq i,j \leq p+q-1}$$

で定めると，$s > 0$ のとき $\sum_{r=0}^{s} (-1)^r e_r h_{s-r} = 0$ より

$$\sum_{j \leq k \leq i} (-1)^{i-k} e_{i-k} h_{k-j} = \delta_{ij}$$

であるから $EH = I$，すなわち $H^{-1} = E$ である．一般に $\det H = 1$ かつ $H^{-1} = E$ とし，

$$\{i_0 < \cdots < i_{p-1}\} \bigsqcup \{j_0 < \cdots < j_{q-1}\} = \{0, 1, \cdots, p+q-1\}$$

としよう．すると H の $i_0, \cdots, i_{p-1}$ 行 $0, \cdots, p-1$ 列から作る小行列式と E の $p, \cdots, p+q-1$ 行 $j_0, \cdots, j_{q-1}$ 列から作る小行列式は符号の違いを除けば等しいことが簡単な外積代数の計算からわかる．そしてその符号は順列

$$i_0, \cdots, i_{p-1}, j_0, \cdots, j_{q-1}$$

の符号で与えられる．ここで $p \geq {}^t\lambda_1, q \geq \lambda_1$ ととれば

$$\{\lambda_i + p - i\}_{1 \leq i \leq p} \bigsqcup \{p - {}^t\lambda_j + j - 1\}_{1 \leq j \leq q} = \{0, 1, \cdots, p+q-1\}$$

である．実際，λ の Young 図形を縦の長さが p 横の長さが q の長方形の中に左上に詰めて書いてみれば，Young 図形を左下から右上に至るジグザグな道と思うことができるので，その道でたどる Young 図形の辺に最初から順番に $0, 1, \cdots, p+q-1$ と名前をつけると，縦に進む辺には

$$\lambda_p, \lambda_{p-1} + 1, \cdots, \lambda_1 + p - 1$$

と名前がつき，横に進む辺には

$$p - {}^t\lambda_1, p - {}^t\lambda_2 + 1, \cdots, p - {}^t\lambda_q + q - 1$$

と名前がつくからである．そこで，

$$\{i_0 < \cdots < i_{p-1}\} = \{\lambda_p < \cdots < \lambda_1 + p - 1\}$$
$$\{j_0 < \cdots < j_{q-1}\} = \{p - {}^t\lambda_1 < \cdots < p - {}^t\lambda_q + q - 1\}$$

とすれば，

$$(\lambda_{p-i+1} + i - 1) - (j - 1) = \lambda_{p-i+1} + i - j$$

より，考える H の小行列式は $\det(h_{\lambda_{p-i+1}+i-j})_{1\le i,j\le p}$ であるが，

$$i \mapsto p - i + 1,\ \ j \mapsto p - j + 1$$

とすればこの小行列式は $\det(h_{\lambda_i - i + j})_{1\le i,j\le p}$ に等しい．他方，

$$(p + i - 1) - (p - {}^t\lambda_j + j - 1) = {}^t\lambda_j - j + i$$

だから，考えるべき E の小行列式は

$$\det((-1)^{{}^t\lambda_j - j + i} e_{{}^t\lambda_j - j + i})_{1\le i,j\le q} = (-1)^{|\lambda|} \det(e_{{}^t\lambda_j - j + i})_{1\le i,j\le q}$$

である．$i_0, \cdots, i_{p-1}, j_0, \cdots, j_{q-1}$ の転倒数，すなわち

$$\lambda_i + p - i > p - {}^t\lambda_j + j - 1$$

となる (i, j) の個数を調べよう．(i, j) が λ の Young 図形に含まれるときは $i \le {}^t\lambda_j$ かつ $j \le \lambda_i$ であり，含まれないなら $i > {}^t\lambda_j$ かつ $j > \lambda_i$ であるから転倒数は $|\lambda|$ に等しい．以上から

$$\det(h_{\lambda_i - i + j}) = \det(e_{{}^t\lambda_i - i + j})$$

を得る．$s_\lambda = \det(h_{\lambda_i - i + j})$ であったから

$$\omega(s_\lambda) = \det(e_{\lambda_i - i + j}) = \det(h_{{}^t\lambda_i - i + j}) = s_{{}^t\lambda}$$

となり題意の式が得られた． □

3.4　Hall-Littlewood 対称関数

定義 3.19　$\lambda, \mu \in \mathcal{P}$ に対し $\mathcal{P}$ 上の半順序 $\lambda \trianglerighteq \mu$ を $|\lambda| = |\mu|$ かつ

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_k \geq \mu_1 + \cdots + \mu_k \ \ (k = 1, 2, \cdots)$$

により定め，$\mathcal{P}$ の**支配順序**という.

定義 3.20　$\lambda \in \mathcal{P}$ に対し

$$\mathrm{Stab}_n(\lambda) = \{w \in S_n \mid \lambda_{w(i)} = \lambda_i \ (i = 1, 2, \cdots)\}$$

とおき，λ の S_n 中での**行固定化群**とよぶ.

定義 3.21　多項式版の階乗と 2 項係数を次のように定義する.

$$[n]_t! = \frac{(t^n - 1) \cdots (t - 1)}{(t - 1)^n}, \quad \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}_t = \frac{[m]_t!}{[n]_t! [m-n]_t!}.$$

次に定義される多項式の射影極限が本書では重要な役割を果たす.

定義 3.22　$\lambda \in \mathcal{P}$ に対し

$$P_\lambda(X_1, \cdots, X_n; t) = \sum_{w \in S_n / \mathrm{Stab}_n(\lambda)} w \left(X_1^{\lambda_1} \cdots X_n^{\lambda_n} \prod_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ \lambda_i > \lambda_j}} \frac{X_i - tX_j}{X_i - X_j} \right)$$

を **Hall-Littlewood 多項式**とよぶ

$m \geq n$ のとき

$$P_\lambda(X_1, \cdots, X_n, 0, \cdots, 0; t) = P_\lambda(X_1, \cdots, X_n; t)$$

である．これを示すには $m = n + 1$ と仮定しても一般性を失わないのでそう仮定すると，$P_\lambda(X_1, \cdots, X_n, 0; t)$ に寄与する $w \in S_{n+1} / \mathrm{Stab}_{n+1}(\lambda)$ は

$$\lambda_{w^{-1}(n+1)} = 0$$

をみたすものだけであるから，$\lambda_k = 0$ となるのが $k \geq m + 1$ だとすると

$$m+1 \le w^{-1}(n+1) \le n+1$$

である．$w \in S_{n+1}/\operatorname{Stab}_{n+1}(\lambda)$ であることより順列

$$w^{-1}(1)w^{-1}(2)\cdots w^{-1}(n+1)$$

において $m+1,\cdots,n+1$ は左から右にこの順番に現れるので，これは

$$w^{-1}(n+1)=n+1$$

を意味する．結論として，$X_{n+1}=0$ とおくと $w \in S_n/\operatorname{Stab}_n(\lambda)$ に関する和になることがわかったので，$P_\lambda(X_1,\cdots,X_n;t)$ を得る．

補題 3.11

(1) $\lambda \in \mathcal{P}$ に対し，

$$R_\lambda(X_1,\cdots,X_n;t)=\sum_{w\in S_n} w\left(X_1^{\lambda_1}\cdots X_n^{\lambda_n}\prod_{1\le i<j\le n}\frac{X_i-tX_j}{X_i-X_j}\right)$$

とおくと次式が成立.

$$R_\lambda(X_1,\cdots,X_n;t)=\left([n-{}^t\lambda_1]_t!\prod_{i\ge 1}[{}^t\lambda_i-{}^t\lambda_{i+1}]_t!\right)P_\lambda(X_1,\cdots,X_n;t)$$

(2) $\lambda,\mu \in \mathcal{P}$ に対し多項式 $u_{\lambda\mu}(t)\in\mathbb{Z}[t]$ が存在して次式が成立.

$$P_\lambda(X_1,\cdots,X_n;t)=s_\lambda(X_1,\cdots,X_n)+\sum_{\mu\lhd\lambda}u_{\lambda\mu}(t)s_\mu(X_1,\cdots,X_n)$$

証明　Van der Monde 行列式を

$$\Delta=\prod_{1\le i<j\le n}(X_i-X_j)$$

とすると，$R_\lambda(X_1,\cdots,X_n;t)$ の分母を和の前に出して

$$R_\lambda(X_1,\cdots,X_n;t)=\frac{1}{\Delta}\sum_{w\in S_n}(-1)^{\ell(w)}w\left(X_1^{\lambda_1}\cdots X_n^{\lambda_n}\prod_{1\le i<j\le n}(X_i-tX_j)\right)$$

となる．$A=(a_{ij})\in\operatorname{Mat}_n(\mathbb{Z})$ であって

(i) $a_{ij} \in \{0, 1\}$

(ii) $a_{ii} = 0$

(iii) $i \neq j$ ならば $a_{ij} + a_{ji} = 1$

をみたすものを用いれば，$\prod_{1\leq i<j\leq n}(X_i - tX_j)$ に現れる単項式を

$$\prod_{1\leq i<j\leq n} X_i^{a_{ij}}(-tX_j)^{a_{ji}}$$

と表すことができるから，$\alpha_A \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ を

$$\alpha_A = (\lambda_1 + \sum_{j=1}^n a_{1j}, \cdots, \lambda_n + \sum_{j=1}^n a_{nj})$$

により定め，$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ に対し $X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n} = X^\alpha$ と略記すれば

$$R_\lambda(X_1, \cdots, X_n; t) = \sum_A (-t)^{\sum_{1\leq i<j\leq n} a_{ji}} \frac{1}{\Delta} \sum_{w\in S_n} (-1)^{\ell(w)} w(X^{\alpha_A})$$

である．ここで α_A は n 個の成分が相異なるもののみを考えればよく，このとき各 α_A に対し $w_A \in S_n$ がただひとつ存在して，

$$(\mu_A)_i + n - i = \lambda_{w_A(i)} + \sum_{j=1}^n a_{w_A(i)w_A(j)}$$

となる $\mu_A \vdash n$ が存在するようにできる．ゆえに

$$R_\lambda(X_1, \cdots, X_n; t) = \sum_A (-t)^{\sum_{1\leq i<j\leq n} a_{ji}} (-1)^{\ell(w_A)} s_{\mu_A}$$

を得る．このとき

$$\sum_{i=1}^k (\mu_A)_i = \sum_{i=1}^k \lambda_{w_A(i)} + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n a_{w_A(i)w_A(j)} - \sum_{i=1}^k (n-i)$$

であって，右辺の第 2 項は

$$\sum_{i,j=1}^k a_{w_A(i)w_A(j)} + \sum_{i=1}^k \sum_{j=k+1}^n a_{w_A(i)w_A(j)}$$

と書けるが,

$$\sum_{i,j=1}^{k} a_{w_A(i)w_A(j)} = \sum_{1\le i<j\le k} (a_{w_A(i)w_A(j)} + a_{w_A(j)w_A(i)}) = \frac{k(k-1)}{2}$$

であり，また

$$\sum_{j=k+1}^{n} a_{w_A(i)w_A(j)} \le n-k$$

なので，不等式

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} a_{w_A(i)w_A(j)} &\le \frac{k(k-1)}{2} + \sum_{i=1}^{k}(n-k)\\ &= \frac{k(k-1)}{2} + k(n-k)\\ &= nk - \frac{k(k+1)}{2} = \sum_{i=1}^{k}(n-i)\end{aligned}$$

が成立する．ゆえに

$$\sum_{i=1}^{k}(\mu_A)_i \le \sum_{i=1}^{k}\lambda_{w_A(i)} \le \sum_{i=1}^{k}\lambda_i$$

すなわち $\mu_A \trianglelefteq \lambda$ である．以上から，$v_{\lambda\mu}(t)\in\mathbb{Z}[t]$ が存在して

$$R_\lambda(X_1,\cdots,X_n;t) = \sum_{\mu\trianglelefteq\lambda} v_{\lambda\mu}(t)s_\mu(X_1,\cdots,X_n)$$

と書けることがわかった．$v_{\lambda\lambda}(t)$ を計算しよう．$\lambda=\mu_A$ となるにはまず

$$(\mu_A)_i = \lambda_{w_A(i)} = \lambda_i \quad (1\le i\le n)$$

より $w_A\in\mathrm{Stab}_n(\lambda)$ でなければならず，さらに

$$n-i = \sum_{j=1}^{n} a_{w_A(i)w_A(j)},\quad n-k = \sum_{j=k+1}^{n} a_{w_A(i)w_A(j)}$$

が $1\le i\le k\le n$ に対して成り立たないといけないので，とくに $i=k$ として

$$\sum_{j=1}^{i} a_{w_A(i)w_A(j)} = 0$$

でなければならない．つまり $1 \leq j \leq i$ のとき $a_{w_A(i)w_A(j)} = 0$ である．

以上から，A が $v_{\lambda\lambda}(t)$ に寄与するならば $w_A \in \mathrm{Stab}_n(\lambda)$ かつ

$$a_{w_A(i)w_A(j)} = \begin{cases} 0 & (i \geq j) \\ 1 & (i < j) \end{cases}$$

でなければならないことがわかった．とくに

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ji} = \ell(w_A^{-1}) = \ell(w_A)$$

である．そこで逆に任意の $w \in \mathrm{Stab}_n(\lambda)$ に対し $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ を

$$a_{w(i)w(j)} = \begin{cases} 0 & (i \geq j) \\ 1 & (i < j) \end{cases}$$

で定めると，

$$n - i = \sum_{j=1}^{n} a_{w(i)w(j)}, \quad n - k = \sum_{j=k+1}^{n} a_{w(i)w(j)}$$

が $1 \leq i \leq k \leq n$ に対して成り立ち，

$$\lambda_{w(i)} + \sum_{j=1}^{n} a_{w(i)w(j)} = \lambda_{w(i)} + n - i = \lambda_i + n - i$$

より $\mu_A = \lambda$，$w_A = w \in \mathrm{Stab}_n(\lambda)$ となるので，A は $v_{\lambda\lambda}(t)$ に寄与する．

よって，w_A は $\mathrm{Stab}_n(\lambda)$ 全体を走ることがわかったので，

$$v_{\lambda\lambda}(t) = \sum_{w_A \in \mathrm{Stab}_n(\lambda)} (-1)^{\ell(w_A)}(-t)^{\ell(w_A)} = \sum_{w \in \mathrm{Stab}_n(\lambda)} t^{\ell(w)}$$

となり，$\mathrm{Stab}_n(\lambda) = S_{n - {}^t\lambda_1} \times \prod_{i \geq 1} S_{{}^t\lambda_i - {}^t\lambda_{i+1}}$ より

$$v_{\lambda\lambda}(t) = [n - {}^t\lambda_1]_t! \prod_{i \geq 1} [{}^t\lambda_i - {}^t\lambda_{i+1}]_t!$$

を得る．とくに，$\lambda = \varnothing$ とすると

$$\sum_{w \in S_n} w \left(\prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{X_i - tX_j}{X_i - X_j} \right) = [n]_t!$$

だから

$$\sum_{w' \in \mathrm{Stab}_n(\lambda)} w' \left(X^\lambda \prod_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ \lambda_i = \lambda_j}} \frac{X_i - tX_j}{X_i - X_j} \right) = v_{\lambda\lambda}(t)$$

も得られる．$R_\lambda(X_1, \cdots, X_n; t)$ は

$$\sum_{w \in S_n / \mathrm{Stab}_n(\lambda)} \sum_{w' \in \mathrm{Stab}_n(\lambda)} ww' \left(X^\lambda \prod_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ \lambda_i = \lambda_j}} \frac{X_i - tX_j}{X_i - X_j} \underbrace{\prod_{\lambda_i > \lambda_j} \frac{X_i - tX_j}{X_i - X_j}}_{w' \text{ で不変}} \right)$$

と書けるから，上式を代入して

$$\begin{aligned} R_\lambda(X_1, \cdots, X_n; t) &= v_{\lambda\lambda}(t) \sum_{w \in S_n / \mathrm{Stab}_n(\lambda)} w \left(X^\lambda \prod_{\lambda_i > \lambda_j} \frac{X_i - tX_j}{X_i - X_j} \right) \\ &= v_{\lambda\lambda}(t) P_\lambda(X_1, \cdots, X_n; t) \end{aligned}$$

となる．左辺は $X_1, \cdots, X_n$ の多項式だから，$P_\lambda(X_1, \cdots, X_n; t)$ も $X_1, \cdots, X_n$ の多項式であり，$P_\lambda(X_1, \cdots, X_n; t)$ の定義式より t の多項式になることも明らかだから，$P_\lambda(X_1, \cdots, X_n; t) \in \mathbb{Z}[X_1, \cdots, X_n, t]$ である．よって，Schur 多項式の一次独立性より $R_\lambda(X_1, \cdots, X_n; t)$ の係数 $v_{\lambda\mu}(t)$ はすべて $v_{\lambda\lambda}(t)$ で割り切れて，

$$u_{\lambda\mu}(t) = \frac{v_{\lambda\mu}(t)}{v_{\lambda\lambda}(t)}$$

とおくと，

$$P_\lambda(X_1,\cdots,X_n;t)=s_\lambda(X_1,\cdots,X_n)+\sum_{\mu\lhd\lambda}u_{\lambda\mu}(t)s_\mu(X_1,\cdots,X_n)$$

かつ $u_{\lambda\mu}(t)\in\mathbb{Z}[t]$ である．$u_{\lambda\mu}(t)$ が n に依存せず λ,μ のみから決まることは $P_\lambda(X_1,\cdots,X_n,0,\cdots,0;t)=P_\lambda(X_1,\cdots,X_n;t)$ と Schur 多項式の一次独立性より明らか. □

定義 3.23　$\lambda\in\mathcal{P}$ に対し

$$P_\lambda=\varprojlim_n P_\lambda(X_1,\cdots,X_n;t)=s_\lambda+\sum_{\mu\lhd\lambda}u_{\lambda\mu}(t)s_\mu\in\Lambda\bigotimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[t]$$

を **Hall-Littlewood 対称関数**とよぶ.

定義 3.24　$\lambda,\mu\in\mathcal{P}$ に対し，$\mu\subseteq\lambda$ とは

$$\mu_i\le\lambda_i\quad(i=1,2,\cdots)$$

が成り立つときをいう．このとき，λ/μ が **horizontal strip** とは

$$\lambda_i\le\mu_i\le\lambda_{i-1}\quad(i=2,3,\cdots)$$

をみたすときをいう．λ/μ が **vertical strip** とは ${}^t\lambda/{}^t\mu$ が horizontal strip のときをいう.

命題 3.3

(1) $\{P_\lambda\}_{\lambda\in\mathcal{P}}$ は $\Lambda\bigotimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[t]$ の $\mathbb{Z}[t]$-自由基底であり，$f^\lambda_{\mu\nu}(t)\in\mathbb{Z}[t]$ が存在して

$$P_\mu P_\nu=\sum_{\lambda\in\mathcal{P}}f^\lambda_{\mu\nu}(t)P_\lambda$$

と書ける.

(2) $\nu=(1^m)$ ならば

$$f^\lambda_{\mu(1^m)}(t)=\begin{cases}\displaystyle\prod_{i\ge1}\begin{bmatrix}{}^t\lambda_i-{}^t\lambda_{i+1}\\ {}^t\lambda_i-{}^t\mu_i\end{bmatrix}_t & (\lambda/\mu\text{ が }|\lambda/\mu|=m\text{ の vertical strip})\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$$

である.

証明 (1) は補題 3.11 より明らか故 (2) を示す．補題 3.9 より

$$s_{(m)} = \det \begin{pmatrix} h_m & h_{m+1} & \cdots & \\ & h_0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & h_0 \end{pmatrix} = h_m$$

であるが，さらに補題 3.10 より

$$s_{(1^m)} = \omega(s_{(m)}) = \omega(h_m) = e_m$$

を得るので，$\mu \lhd (1^m)$ となる $\mu \vdash m$ が存在しないことに注意すれば，補題 3.11 より $P_{(1^m)} = s_{(1^m)} = e_m$ である．ゆえに，$k \geq n+1$ に対し $X_k = 0$ とすれば

$$P_{(1^m)}(X_1, \cdots, X_n; t) = e_m(X_1, \cdots, X_n)$$

を得る．ここで

$$\mu_1 = \cdots = \mu_{r_1} > \mu_{r_1+1} = \cdots = \mu_{r_1+r_2} > \cdots\cdots$$

とし，それに合わせて行番号の集合 $\{1, \cdots, n\}$ を

$$R_1 = \{1, \cdots, r_1\},\ \ R_2 = \{r_1+1, \cdots, r_1+r_2\}, \cdots, R_s = \{n-r_s+1, \cdots, n\}$$

と分割する．$S(R_i)$ を集合 R_i 上の置換群とする．すると，

$$\mathrm{Stab}_n(\mu) = \prod_{i=1}^{s} S(R_i)$$

であり，また

$$e_m(X_1, \cdots, X_n) = \sum_{(m_1, \cdots, m_s)} \prod_{i=1}^{s} e_{m_i}(R_i)$$

が成り立つ．ただし和は $(m_1, \cdots, m_s) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^s$ であって

$$0 \leq m_i \leq r_i, \quad \sum_{i=1}^{s} m_i = m$$

であるもの全体を走る．$\{X_j \mid j \in R_i\}$ に関する対称多項式環の元

$$f \in \mathbb{Z}[\{X_j\}_{j \in R_i}]^{S(R_i)}$$

を $f(R_i)$ と書くことにすると，$P_{(1^{m_i})}(R_i; t) = e_{m_i}(R_i)$ だから，補題 3.11 の証明で見たように

$$e_{m_i}(R_i) = \frac{1}{[m_i]_t![r_i - m_i]_t!} \times \sum_{w \in S(R_i)} w \left(\prod_{j=1}^{m_i} X_{r_1+\cdots+r_{i-1}+j} \prod_{\substack{1 \le j < k \le n \\ j,k \in R_i}} \frac{X_j - tX_k}{X_j - X_k} \right)$$

となり，これより

$$\prod_{i=1}^{s} e_{m_i}(R_i) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{s} [m_i]_t![r_i - m_i]_t!} \times \sum_{w \in \mathrm{Stab}_n(\mu)} w \left(\prod_{\substack{1 \le i \le s \\ 1 \le j \le m_i}} X_{r_1+\cdots+r_{i-1}+j} \prod_{\substack{1 \le j < k \le n \\ \mu_j = \mu_k}} \frac{X_j - tX_k}{X_j - X_k} \right)$$

を得る．さて，$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots) \in \mathcal{P}$ を

$$\lambda_k = \begin{cases} \mu_k + 1 & (1 + \sum_{j=1}^{i-1} r_j \le k \le m_i + \sum_{j=1}^{i-1} r_j) \\ \mu_k & (1 + m_i + \sum_{j=1}^{i-1} r_j \le k \le \sum_{j=1}^{i} r_j) \end{cases}$$

と定めよう．λ/μ は vertical strip であり，この対応

$$(m_1, \cdots, m_s) \mapsto \lambda$$

により，2 つの集合

$$\{(m_1, \cdots, m_s) \in \mathbb{Z}_{\ge 0}^s \mid 0 \le m_i \le r_i, \sum_{i=1}^{s} m_i = m\}$$

$$\{\lambda \in \mathcal{P} \mid \lambda/\mu \text{ は } |\lambda/\mu| = m \text{ の vertical strip}\}$$

のあいだの全単射が与えられるので，上記の式は $(m_1,\cdots,m_s)$ に対応する λ を用いて

$$\prod_{i=1}^{s} e_{m_i}(R_i)=\frac{1}{\prod_{i=1}^{s}[m_i]_t![r_i-m_i]_t!}\sum_{w'\in\mathrm{Stab}_n(\mu)} w'\left(X^{\lambda-\mu}\prod_{\substack{1\le j<k\le n\\ \mu_j=\mu_k}}\frac{X_j-tX_k}{X_j-X_k}\right)$$

と書ける．ただし $X^{\lambda-\mu}=X_1^{\lambda_1-\mu_1}\cdots X_n^{\lambda_n-\mu_n}$ である．故に，

$$\begin{aligned}
&P_\mu(X_1,\cdots,X_n;t)P_{(1^m)}(X_1,\cdots,X_n;t)\\
&\quad=\sum_{w\in S_n/\,\mathrm{Stab}_n(\mu)} w\left(X^\mu\prod_{\substack{1\le i<j\le n\\ \mu_i>\mu_j}}\frac{X_i-tX_j}{X_i-X_j}P_{(1^m)}(X_1,\cdots,X_n;t)\right)\\
&=\sum_{w\in S_n/\,\mathrm{Stab}_n(\mu)}\ \sum_{\substack{\lambda/\mu:\text{vertical strip}\\ |\lambda/\mu|=m}}\frac{1}{\prod_{i=1}^{s}[m_i]_t![r_i-m_i]_t!}w\left(X^\mu\prod_{\substack{1\le i<j\le n\\ \mu_i>\mu_j}}\frac{X_i-tX_j}{X_i-X_j}\right)\\
&\qquad\qquad\times\sum_{w'\in\mathrm{Stab}_n(\mu)} ww'\left(X^{\lambda-\mu}\prod_{\substack{1\le i<j\le n\\ \mu_i=\mu_j}}\frac{X_i-tX_j}{X_i-X_j}\right)
\end{aligned}$$

であるが，$w'\in\mathrm{Stab}_n(\mu)$ に対し

$$w\left(X^\mu\prod_{\mu_i>\mu_j}\frac{X_i-tX_j}{X_i-X_j}\right)=ww'\left(X^\mu\prod_{\mu_i>\mu_j}\frac{X_i-tX_j}{X_i-X_j}\right)$$

が成り立つから，

$$=\sum_{\substack{\lambda/\mu:\text{vertical strip}\\ |\lambda/\mu|=m}}\frac{1}{\prod_{i=1}^{s}[m_i]_t![r_i-m_i]_t!}\sum_{w\in S_n} w\left(X^\lambda\prod_{1\le i<j\le n}\frac{X_i-tX_j}{X_i-X_j}\right)$$

であり，補題 3.11 より

$$=\sum_{\substack{\lambda/\mu:\text{vertical strip}\\ |\lambda/\mu|=m}}\frac{1}{\prod_{i=1}^{s}[m_i]_t![r_i-m_i]_t!}R_\lambda(X_1,\cdots,X_n;t)$$

$$= \sum_{\substack{\lambda/\mu:\text{vertical strip} \\ |\lambda/\mu|=m}} \frac{[n - {}^t\lambda_1]_t! \prod_{i \geq 1} [{}^t\lambda_i - {}^t\lambda_{i+1}]_t!}{\prod_{i=1}^{s} [m_i]_t! [r_i - m_i]_t!} P_\lambda(X_1, \cdots, X_n; t)$$

を得る．ここで，

$$\prod_{i=1}^{s} [m_i]_t! = \prod_{i \geq 1} [{}^t\lambda_i - {}^t\mu_i]_t!$$

$$\prod_{i=1}^{s} [r_i - m_i]_t! = [n - {}^t\lambda_1]_t! \prod_{i \geq 1} [{}^t\mu_i - {}^t\lambda_{i+1}]_t!$$

に注意すれば

$$\frac{[n - {}^t\lambda_1]_t! \prod_{i \geq 1} [{}^t\lambda_i - {}^t\lambda_{i+1}]_t!}{\prod_{i=1}^{s} [m_i]_t! [r_i - m_i]_t!} = \prod_{i \geq 1} \begin{bmatrix} {}^t\lambda_i - {}^t\lambda_{i+1} \\ {}^t\lambda_i - {}^t\mu_i \end{bmatrix}_t$$

となる．　□

定義 3.25　$\mu \in \mathcal{P}$ に対し，$n(\mu) = \sum_{i \geq 1} (i-1)\mu_i$ とおき，

$$\tilde{P}_\mu(q) := q^{-n(\mu)} P_\mu|_{t=q^{-1}} \in \Lambda \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Q}$$

と定義する．また，

$$a_\mu(q) = q^{|\mu|+2n(\mu)} \prod_{i \geq 1} (1 - q^{-1})(1 - q^{-2}) \cdots (1 - q^{-m_i(\mu)})$$

とおき，

$$\tilde{Q}_\mu(q) := a_\mu(q) \tilde{P}_\mu(q) \in \Lambda \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Q}$$

と定義する．ここで μ における $i \geq 1$ の重複度を

$$m_i(\mu) := |\{j \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \mid \mu_j = i\}| = {}^t\mu_i - {}^t\mu_{i+1}$$

とする．

命題 3.3 より $\{\tilde{P}_\mu(q)\}_{\mu \in \mathcal{P}}$ と $\{\tilde{Q}_\mu(q)\}_{\mu \in \mathcal{P}}$ はともに $\Lambda \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Q}$ の基底である．

定義 3.26　次数が

$$\deg e_n(f) := n \deg(f)$$

の変数 $\{e_n(f)\}_{n \geq 1, f \in \mathcal{F}}$ で生成される $\mathbb{C}$ 上の多項式環を B とする．

$f \in \mathcal{F}$ に対し $\Lambda(f) = \mathbb{C}[e_1(f), e_2(f), \cdots]$ とおくと，B は多項式環 $\{\Lambda(f)\}_{f \in \mathcal{F}}$ の $\mathbb{C}$ 上の制限テンソル積である．すなわち，有限個の $f \in \mathcal{F}$ を除いて成分が 1 である無限テンソル積の 1 次結合の全体が B に一致する．

定義 3.27　$\boldsymbol{\mu} : \mathcal{F} \to \mathcal{P}$ に対し，$\tilde{P}_{\boldsymbol{\mu}}(q)$, $\tilde{Q}_{\boldsymbol{\mu}}(q) \in B$ を

$$\tilde{P}_{\boldsymbol{\mu}}(q) = \prod_{f \in \mathcal{F}} \tilde{P}_{\boldsymbol{\mu}(f)}(q^{\deg(f)})$$
$$\tilde{Q}_{\boldsymbol{\mu}}(q) = \prod_{f \in \mathcal{F}} \tilde{Q}_{\boldsymbol{\mu}(f)}(q^{\deg(f)})$$

と定める．また，$\tilde{P}_{\boldsymbol{\mu}}(q), \tilde{Q}_{\boldsymbol{\mu}}(q)$ が双対基底をなすように B に内積を定める．すなわち，

$$\langle \tilde{P}_{\boldsymbol{\mu}}(q), \tilde{Q}_{\boldsymbol{\nu}}(q) \rangle = \delta_{\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\nu}}$$

により B の内積を定義する．

3.5　Hall 代数と対称関数環の計量同型

定義 3.28　$\pi_n(f)$ を $(\mathbb{F}_q[X]/(f))^{\oplus n}$ の定める $\mathrm{GL}_{n \deg(f)}(q)$ の共役類の特性関数とする．

定理 3.1

(1) A は $\{\pi_n(f)\}_{n \geq 1, f \in \mathcal{F}}$ で生成される多項式環である．

(2) $\mathbb{C}$-代数同型 $\psi : A \simeq B$ を

$$\pi_n(f) \mapsto q^{-\deg(f)\frac{n(n-1)}{2}} e_n(f) \quad (f \in \mathcal{F},\ n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

で定めると $\psi(\pi_{\boldsymbol{\mu}}) = \tilde{P}_{\boldsymbol{\mu}}(q)$ である．

証明　(1)　各 $f \in \mathcal{F}$ に対し，$\mathbb{F}_q[X]$-加群 $\{V_\lambda(f)\}_{\lambda \in \mathcal{P}}$ を

$$V_\lambda(f) = \bigoplus_{i \geq 1} \mathbb{F}_q[X]/(f^{\lambda_i})$$

で定め，$V_\lambda(f)$ の部分加群 U であって

$$U \simeq V_\mu(f),\ \ V_\lambda(f)/U \simeq V_\nu(f)$$

をみたすものの個数を $g^\lambda_{\mu\nu}(f)$ とおき，$\mathbb{C}$-代数 $A(f)$ を

$$A(f) = \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{P}} \mathbb{C}u_\lambda, \quad u_\mu u_\nu = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} g^\lambda_{\mu\nu}(f) u_\lambda$$

により定義する．すると，A は $\{A(f)\}_{f \in \mathcal{F}}$ の制限テンソル積である．実際，命題 3.2 より $\pi_{\boldsymbol{\mu}}\pi_{\boldsymbol{\nu}} = \sum_{\boldsymbol{\lambda}} g^{\boldsymbol{\lambda}}_{\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\nu}} \pi_{\boldsymbol{\lambda}}$ であるが，$f \in \mathcal{F}$ に対し $V_{\boldsymbol{\lambda}}$ の f-等質成分を

$$V_{\boldsymbol{\lambda}(f)} = \bigoplus_{i \geq 1} \mathbb{F}_q[X]/(f^{\boldsymbol{\lambda}(f)_i}) \simeq V_{\boldsymbol{\lambda}(f)}(f)$$

とすると直和分解

$$V_{\boldsymbol{\lambda}} = \bigoplus_{f \in \mathcal{F}} V_{\boldsymbol{\lambda}(f)}$$

が成立し，$f \neq f'$ ならば任意の $m, m' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_q[X]}(\mathbb{F}_q[X]/(f^m), \mathbb{F}_q[X]/({f'}^{m'})) = 0$$

であることより

$$g^{\boldsymbol{\lambda}}_{\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\nu}} = \prod_{f \in \mathcal{F}} g^{\boldsymbol{\lambda}(f)}_{\boldsymbol{\mu}(f)\boldsymbol{\nu}(f)}(f)$$

となることに注意すれば，同一視 $\pi_{\boldsymbol{\lambda}} = \bigotimes_{f \in \mathcal{F}} u_{\boldsymbol{\lambda}(f)}$ により A の積を

$$\left(\bigotimes_{f \in \mathcal{F}} u_{\boldsymbol{\mu}(f)}\right)\left(\bigotimes_{f \in \mathcal{F}} u_{\boldsymbol{\nu}(f)}\right) = \bigotimes_{f \in \mathcal{F}} \left(\sum_{\lambda \in \mathcal{P}} g^\lambda_{\boldsymbol{\mu}(f)\boldsymbol{\nu}(f)}(f) u_\lambda\right)$$

と表せる．すなわち，A は $\{A(f)\}_{f \in \mathcal{F}}$ の制限テンソル積である．

そこで，$f \in \mathcal{F}$ を固定して $A(f)$ が $\{u_{(1^n)} \mid n \geq 1\}$ で生成される多項式環であることを示す．まず $A(f)$ が可換環であることを示すため，多項式

$$F(X) = X^n + a_1 X^{n-1} + \quad \cdots + a_n$$

に対し $\mathbb{F}_q[X]$-加群同型

$$\mathbb{F}_q[X]/(F) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_q}(\mathbb{F}_q[X]/(F), \mathbb{F}_q)$$

が存在することを示そう．実際，$\mathbb{F}_q[X]/(F)$ の基底

$$\{1 + (F), X + (F), \cdots, X^{n-1} + (F)\}$$

の双対基底 $\{\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_{n-1}\}$ への X の作用は

$$X(\varphi_0, \cdots, \varphi_{n-1}) = (\varphi_0, \cdots, \varphi_{n-1}) \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ -a_n & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}$$

であるから，$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_q}(\mathbb{F}_q[X]/(F), \mathbb{F}_q)$ は φ_{n-1} で生成される巡回 $\mathbb{F}_q[X]$-加群であり，しかも

$$\begin{aligned} F(X)\varphi_{n-1} &= (a_n + X(\cdots(a_3 + X(a_2 + X(a_1 + X)))\cdots))\varphi_{n-1} \\ &= (a_n + X(\cdots(a_3 + X(a_2 + X))\cdots))\varphi_{n-2} \\ &= (a_n + X(\cdots(a_3 + X)\cdots))\varphi_{n-3} \\ &= \cdots = (a_n + X)\varphi_0 = 0 \end{aligned}$$

であるから，全射準同型

$$\mathbb{F}_q[X]/(F) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_q}(\mathbb{F}_q[X]/(F), \mathbb{F}_q)$$

が存在し，両辺の次元を比べて求める同型を得る．この $\mathbb{F}_q[X]$-加群同型と，$g^{\lambda}_{\mu\nu}(f)$ は $V_\lambda(f)$ の $\mathbb{F}_q[X]$-部分加群 U であって，$V = V_\lambda(f)/U$ とおくとき

$$U \simeq V_\mu(f), \quad V \simeq V_\nu(f)$$

をみたすものの個数に等しいことより，$g^{\lambda}_{\mu\nu}(f)$ は $V_\lambda(f)$ の $\mathbb{F}_q[X]$-部分加群 V^* であって，$U^* = V_\lambda(f)/V^*$ とおくとき

$$U^* \simeq V_\mu(f), \quad V^* \simeq V_\nu(f)$$

をみたすものの個数に等しいことがわかるので，$g^\lambda_{\mu\nu}(f) = g^\lambda_{\nu\mu}(f)$ となり $A(f)$ が可換環であることが示された．$\lambda \in \mathcal{P}$ に対し，

$$v_\lambda := \prod_{i \geq 1} u_{(1^{t\lambda_i})} \in A(f)$$

とおく．$\{u_\mu\}_{\mu \in \mathcal{P}}$ は $A(f)$ の基底だから $a_{\lambda\mu} \in \mathbb{C}$ が存在して

$$v_\lambda = \sum_{\mu \in \mathcal{P}} a_{\lambda\mu} u_\mu$$

と書けるが，$a_{\lambda\lambda} = 1$ および $\mu \trianglelefteq \lambda$ 以外のとき $a_{\lambda\mu} = 0$，すなわち

$$v_\lambda = u_\lambda + \sum_{\mu \lhd \lambda} a_{\lambda\mu} u_\mu$$

と書けることを示そう．ここで，係数 $a_{\lambda\mu}$ は $\mathbb{F}_q[X]$-部分加群の減少列

$$V_\mu(f) = U_1 \supseteq U_2 \supseteq \cdots\cdots$$

であって，

$$U_i/U_{i+1} \simeq (\mathbb{F}_q[X]/(f))^{\oplus {}^t\lambda_i} \quad (i = 1, 2, \cdots)$$

をみたすものの個数に等しいことに注意する．$fU_i \subseteq U_{i+1}$ より $\mathrm{Im}(f^i) \subseteq U_{i+1}$ となるから

$$\begin{aligned} {}^t\mu_1 + \cdots + {}^t\mu_i &= \frac{1}{\deg(f)} \dim_{\mathbb{F}_q} V_\mu(f)/\mathrm{Im}(f^i) \\ &\geq \frac{1}{\deg(f)} \dim_{\mathbb{F}_q}(U_1/U_{i+1}) = {}^t\lambda_1 + \cdots + {}^t\lambda_i \end{aligned}$$

すなわち，${}^t\mu \trianglerighteq {}^t\lambda$ を得るがこれは $\lambda \trianglerighteq \mu$ と同値である．$\lambda = \mu$ のときは

$$U_i = \mathrm{Im}(f^{i-1}) \quad (i = 1, 2, \cdots)$$

となり，個数を数えるべき $\mathbb{F}_q[X]$-加群の減少列はただひとつしかないので $a_{\lambda\lambda} = 1$ である．

以上より $\{v_\lambda\}_{\lambda \in \mathcal{P}}$，つまり $\{u_{(1^n)}\}_{n \geq 1}$ の単項式全体が $A(f)$ の基底になる

から，$A(f)$ は $\{u_{(1^n)}\}_{n\geq 1}$ で生成される多項式環である．

(2) $\pi_n(f) \mapsto q^{-\deg(f)\frac{n(n-1)}{2}} e_n(f)$ により $\mathbb{C}$-代数準同型

$$\psi_f : A(f) \longrightarrow \Lambda(f)$$

を定めるとき，$\psi_f(u_\mu) = \tilde{P}_\mu(q^{\deg(f)})$ であることを示せばよい．

$|\mu|$ に関する帰納法で証明する．$|\mu| = 0$ のときは $u_\mu = 1, \tilde{P}_\mu(q^{\deg(f)}) = 1$ より明らか．以下 $|\mu| > 0$ とし，$\nu \subseteq \mu$ を

$${}^t\nu_i = \begin{cases} {}^t\mu_i & (1 \leq i < \mu_1) \\ 0 & (i \geq \mu_1) \end{cases}$$

で定める．すなわち，μ の一番右側の列を除いたものが ν である．$|\mu/\nu| = m$ と略記しよう．u_λ が

$$u_\nu u_{(1^m)} = \sum_\lambda g^\lambda_{\nu(1^m)}(f) u_\lambda$$

の右辺に現れるとすると $V_\lambda(f)$ の $\mathbb{F}_q[X]$-部分加群 U で

$$U \simeq (\mathbb{F}_q[X]/(f))^{\oplus m}, \quad V_\lambda(f)/U \simeq V_\nu(f)$$

をみたすものが存在する．このとき，$\mathbb{F}_q[X]$-加群の全射準同型

$$V_\lambda(f) \longrightarrow V_\nu(f)$$

は $\mathbb{F}_q[X]$-加群の全射準同型

$$f^{i-1}V_\lambda(f)/f^iV_\lambda(f) \longrightarrow f^{i-1}V_\nu(f)/f^iV_\nu(f)$$

を誘導するから

$${}^t\nu_i = \frac{1}{\deg(f)} \dim_{\mathbb{F}_q} \frac{f^{i-1}V_\nu(f)}{f^iV_\nu(f)} \leq \frac{1}{\deg(f)} \dim_{\mathbb{F}_q} \frac{f^{i-1}V_\lambda(f)}{f^iV_\lambda(f)} = {}^t\lambda_i$$

である．これは ${}^t\nu \subseteq {}^t\lambda$ を意味するから，$\nu \subseteq \lambda$ を得る．他方，$U \subseteq \operatorname{Soc} V_\lambda(f)$ より $\mathbb{F}_q[X]$-加群の全射準同型

$$V_\nu(f) \simeq V_\lambda(f)/U \longrightarrow V_\lambda(f)/\operatorname{Soc} V_\lambda(f) \simeq V_{(\lambda_1-1,\lambda_2-1,\cdots)}(f)$$

が存在し，これは $\mathbb{F}_q[X]$-加群の全射準同型

$$f^{i-1}V_\nu(f)/f^iV_\nu(f) \longrightarrow f^{i-1}V_{(\lambda_1-1,\lambda_2-1,\cdots)}(f)/f^iV_{(\lambda_1-1,\lambda_2-1,\cdots)}(f)$$

を誘導するから，同様にして $(\lambda_1-1,\lambda_2-1,\cdots) \subseteq \nu$ を得る．故に λ/ν は vertical strip である．

定義より μ/ν も vertical strip であって，μ は支配順序に関して

$$\{\lambda \mid \lambda/\nu \text{ は vertical strip で } |\lambda/\nu| = m\}$$

の極大元であることがわかるから，$\lambda \trianglelefteq \mu$ を得る．とくに

$$u_\nu u_{(1^m)} = \sum_{\substack{\lambda/\nu \text{ は vertical strip} \\ \lambda\trianglelefteq\mu, |\lambda/\nu|=m}} g^\lambda_{\nu(1^m)}(f) u_\lambda$$

である．このことより，

$$g^\lambda_{\nu(1^m)}(f) = q^{\deg(f)(n(\lambda)-n(\nu)-\frac{m(m-1)}{2})} \prod_{i\geq 1} \begin{bmatrix} {}^t\lambda_i - {}^t\lambda_{i+1} \\ {}^t\lambda_i - {}^t\nu_i \end{bmatrix}_{q^{-\deg(f)}}$$

を示せば十分であることがわかる．実際，この式が成り立てば命題 3.3(2) より

$$\tilde{P}_\nu(q^{\deg(f)})\tilde{P}_{(1^m)}(q^{\deg(f)}) = \sum_{\substack{\lambda/\nu \text{ は vertical strip} \\ \lambda\trianglelefteq\mu, |\lambda/\nu|=m}} g^\lambda_{\nu(1^m)}(f)\tilde{P}_\lambda(q^{\deg(f)})$$

となるので，支配順序に関する帰納法により

$$\psi_f(u_\nu) = \tilde{P}_\nu(q^{\deg(f)}), \quad \psi_f(u_{(1^m)}) = \tilde{P}_{(1^m)}(q^{\deg(f)}),$$
$$\psi_f(u_\lambda) = \tilde{P}_\lambda(q^{\deg(f)}) \ \ (\lambda \triangleleft \mu)$$

から $\psi_f(u_\mu) = \tilde{P}_\mu(q^{\deg(f)})$ を得るからである．

$g^\lambda_{\nu(1^m)}(f)$ を計算しよう．$U \simeq V_{(1^m)}(f)$ をみたす $U \subseteq V_\lambda(f)$ に対し，

$$U_i = U \cap f^iV_\lambda(f)$$

とおくと $U_i = U_{i-1} \cap f^iV_\lambda(f)$ をみたす半単純 $\mathbb{F}_q[X]/(f)$-加群の減少列

$$\operatorname{Soc} V_\lambda(f) \supseteq U = U_0 \supseteq U_1 \supseteq U_2 \supseteq \cdots\cdots$$

が得られる．$U_{i-1}/U_i \simeq (\mathbb{F}_q[X]/(f))^{\oplus d_i}$ と書くと

$$\begin{aligned}
d_i &= \frac{1}{\deg(f)} \dim_{\mathbb{F}_q} U_{i-1}/U_i \\
&= \frac{1}{\deg(f)} \left(\dim_{\mathbb{F}_q} U/U_i - \dim_{\mathbb{F}_q} U/U_{i-1}\right) \\
&= \frac{1}{\deg(f)} \left(\dim_{\mathbb{F}_q} \frac{U + f^i V_\lambda(f)}{f^i V_\lambda(f)} - \dim_{\mathbb{F}_q} \frac{U + f^{i-1} V_\lambda(f)}{f^{i-1} V_\lambda(f)}\right) \\
&= \frac{1}{\deg(f)} \left(\dim_{\mathbb{F}_q} \frac{f^{i-1} V_\lambda(f)}{f^i V_\lambda(f)} - \dim_{\mathbb{F}_q} \frac{U + f^{i-1} V_\lambda(f)}{U + f^i V_\lambda(f)}\right) \\
&= {}^t\lambda_i - \frac{1}{\deg(f)} \dim_{\mathbb{F}_q} \frac{f^{i-1}(V_\lambda(f)/U)}{f^i(V_\lambda(f)/U)}
\end{aligned}$$

となるが，Jordan 標準形の理論より $V_\lambda(f)/U$ の $\mathbb{F}_q[X]$-加群構造は

$$\frac{1}{\deg(f)} \dim_{\mathbb{F}_q} \frac{f^{i-1}(V_\lambda(f)/U)}{f^i(V_\lambda(f)/U)} \quad (i = 1, 2, \cdots)$$

だけから決まることに注意すれば，$V_\lambda(f)/U \simeq V_\nu(f)$ であることと

$$d_i = {}^t\lambda_i - {}^t\nu_i \quad (i = 1, 2, \cdots)$$

は同値である．逆に，半単純 $\mathbb{F}_q[X]/(f)$-加群の減少列

$$\operatorname{Soc} V_\lambda(f) \supseteq U_0 \supseteq U_1 \supseteq U_2 \supseteq \cdots\cdots$$

が $U_{i-1}/U_i \simeq (\mathbb{F}_q[X]/(f))^{\oplus({}^t\lambda_i - {}^t\nu_i)}$ かつ $U_i = U_{i-1} \cap f^i V_\lambda(f)$ をみたすとき，$U = U_0$ とすれば $U_i = U \cap f^i V_\lambda(f)$ になることが $i = 0, 1, \cdots$ に関する帰納法でわかるから，上記の計算より

$$U \simeq V_{(1^m)}(f), \quad V_\lambda(f)/U \simeq V_\nu(f)$$

が成り立つ．故に $g^\lambda_{\nu(1^m)}(f)$ を求めるにはこのような半単純 $\mathbb{F}_q[X]/(f)$-加群の減少列の個数を数えればよい．

ところが，$U_i \subseteq \operatorname{Soc} f^i V_\lambda(f)$ は $\mathbb{F}_q[X]/(f) \simeq \mathbb{F}_{q^{\deg(f)}}$ 上のベクトル空間だから，このような半単純加群の減少列の数え上げは有限体上のベクトル空間の

数え上げであり，f に関わらず同様の計算になるから，$\deg(f)=1$ であるとして一般性を失わない．そこで，以下 $\deg(f)=1$ とし，$V_\lambda(f)$ を V_λ と略記する．

$d_i = {}^t\lambda_i - {}^t\nu_i$ とすると，U_{i-1} を

$$\dim_{\mathbb{F}_q} U_{i-1}/U_i = d_i, \quad U_i = U_{i-1} \cap \operatorname{Soc} f^i V_\lambda$$

をみたすように定めるには，$\operatorname{Soc} f^{i-1}V_\lambda \setminus \operatorname{Soc} f^i V_\lambda$ から d_i 個 1 次独立なベクトルをとって U_i に付加すればよい．ここで，

$$\begin{aligned} f^iV_\lambda/\operatorname{Soc} f^iV_\lambda &\simeq \frac{f^iV_\lambda + \operatorname{Soc} V_\lambda}{\operatorname{Soc} V_\lambda} \\ &\simeq f^i(V_\lambda/\operatorname{Soc} V_\lambda) \simeq f^iV_{(\lambda_1-1,\lambda_2-1,\cdots)} \end{aligned}$$

かつ $1 \le i \le \lambda_1 - 1$ に対し ${}^t(\lambda_1-1,\lambda_2-1,\cdots)_i = {}^t\lambda_{i+1}$ であることに注意すれば

$$\dim_{\mathbb{F}_q} \operatorname{Soc} f^iV_\lambda = \dim_{\mathbb{F}_q} f^iV_\lambda - \dim_{\mathbb{F}_q} f^iV_{(\lambda_1-1,\lambda_2-1,\cdots)}$$

より

$$\dim_{\mathbb{F}_q} \operatorname{Soc} f^{i-1}V_\lambda/\operatorname{Soc} f^iV_\lambda = {}^t\lambda_i - {}^t\lambda_{i+1} \quad (i=1,2,\cdots)$$

である．$l_i = {}^t\lambda_i - {}^t\lambda_{i+1} \quad (i=1,2,\cdots)$ とおく．

$\operatorname{Soc} f^{i-1}V_\lambda \setminus \operatorname{Soc} f^iV_\lambda$ から d_i 個の 1 次独立なベクトルを選んで U_i に付加するやり方は全部で

$$\prod_{j=0}^{d_i-1} \left(q^{\dim_{\mathbb{F}_q} \operatorname{Soc} f^{i-1}V_\lambda} - q^{j+\dim_{\mathbb{F}_q} \operatorname{Soc} f^iV_\lambda}\right)$$

通りあるが，他方こうして得られた U_{i-1} をひとつ固定したとき，この U_{i-1} を与えるのは，d_i 個の 1 次独立なベクトルを $U_i \setminus U_{i-1}$ からとってきたときで，この個数は U_{i-1} によらず一定の数

$$\prod_{j=0}^{d_i-1} \left(q^{\dim_{\mathbb{F}_q} U_{i-1}} - q^{j+\dim_{\mathbb{F}_q} U_i}\right)$$

である．故に U_i を固定したときの U_{i-1} の選びかたの総数は

$$\prod_{j=0}^{d_i-1}\frac{(q^{\dim_{\mathbb{F}_q}\mathrm{Soc}\, f^{i-1}V_\lambda}-q^{j+\dim_{\mathbb{F}_q}\mathrm{Soc}\, f^{i}V_\lambda})}{(q^{\dim_{\mathbb{F}_q}U_{i-1}}-q^{j+\dim_{\mathbb{F}_q}U_i})}$$
$$=\frac{q^{d_i\dim_{\mathbb{F}_q}\mathrm{Soc}\, f^{i-1}V_\lambda}(1-q^{-l_i})\cdots(1-q^{-l_i+d_i-1})}{q^{d_i\dim_{\mathbb{F}_q}U_{i-1}}(1-q^{-d_i})\cdots(1-q^{-1})}$$
$$=q^{d_i\dim_{\mathbb{F}_q}\frac{\mathrm{Soc}\, f^{i-1}V_\lambda}{U_{i-1}}}\begin{bmatrix} l_i \\ d_i \end{bmatrix}_{q^{-1}}$$

となり，U の選びかたの総数が

$$\prod_{i\geq 1}\left(q^{({}^t\lambda_i-{}^t\nu_i)\dim_{\mathbb{F}_q}\frac{\mathrm{Soc}\, f^{i-1}V_\lambda}{U_{i-1}}}\begin{bmatrix} {}^t\lambda_i-{}^t\lambda_{i+1} \\ {}^t\lambda_i-{}^t\nu_i \end{bmatrix}_{q^{-1}}\right)$$

とわかったから，あとは

$$\sum_{i\geq 1}({}^t\lambda_i-{}^t\nu_i)\dim_{\mathbb{F}_q}\frac{\mathrm{Soc}\, f^{i-1}V_\lambda}{U_{i-1}}=n(\lambda)-n(\mu)-\frac{m(m-1)}{2}$$

を示せば求める式

$$g^{\lambda}_{\nu(1^m)}(f)=q^{\deg(f)(n(\lambda)-n(\mu)-\frac{m(m-1)}{2})}\prod_{i\geq 1}\begin{bmatrix} {}^t\lambda_i-{}^t\lambda_{i+1} \\ {}^t\lambda_i-{}^t\nu_i \end{bmatrix}_{q^{-\deg(f)}}$$

を得る．今

$$\begin{cases}\dim_{\mathbb{F}_q}\mathrm{Soc}\, f^{i-1}V_\lambda=\sum_{j\geq i}({}^t\lambda_j-{}^t\lambda_{j+1})\\ \dim_{\mathbb{F}_q}U_{i-1}=\sum_{j\geq i}({}^t\lambda_j-{}^t\nu_j)\end{cases}$$

だから

$$\sum_{i\geq 1}({}^t\lambda_i-{}^t\nu_i)\dim_{\mathbb{F}_q}\frac{\mathrm{Soc}\, f^{i-1}V_\lambda}{U_{i-1}}=\sum_{j\geq i\geq 1}({}^t\lambda_i-{}^t\nu_i)({}^t\nu_j-{}^t\lambda_{j+1})$$

を計算すればよいが，λ/ν を λ の Young 図形と ν の Young 図形の差の部分，$\nu/(\lambda_1-1,\lambda_2-1,\cdots)$ を ν と $(\lambda_1-1,\lambda_2-1,\cdots)$ の Young 図形の差の部分と解釈すると，この数は

$$(x,y) \in (\lambda/\nu) \times (\nu/(\lambda_1 - 1, \lambda_2 - 1, \cdots))$$

であって，x が y の左下にあるものの個数を数えていることになるから

$$\sum_{i \geq 1} \sum_{1 \leq j < i} (\lambda_i - \nu_i)(\nu_j - \lambda_j + 1)$$

に等しい．ここで，$\theta_i = \lambda_i - \nu_i$ とおくと，λ/ν は $|\lambda/\nu| = m$ の vertical strip だったから，$\theta_i = 0, 1$ より

$$\sum_{i \geq 1} \theta_i^2 = \sum_{i \geq 1} \theta_i = m$$

である．故に，$\sum_{i \geq 1} \sum_{1 \leq j < i} (\lambda_i - \nu_i)(\nu_j - \lambda_j + 1)$ は

$$\begin{aligned}\sum_{i > j \geq 1} \theta_i (1 - \theta_j) = \sum_{i > j \geq 1} \theta_i - \sum_{i > j \geq 1} \theta_i \theta_j \\ &= \sum_{i \geq 1} (i-1)(\lambda_i - \nu_i) - \frac{1}{2}\left((\sum_{i \geq 1} \theta_i)^2 - \sum_{i \geq 1} \theta_i^2 \right) \\ &= n(\lambda) - n(\nu) - \frac{m(m-1)}{2}\end{aligned}$$

に等しい．□

Hall 代数 $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ には，$m \neq n$ のとき $\langle A_m, A_n \rangle = 0$,

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \frac{1}{|\,\mathrm{GL}_n(q)|} \sum_{g \in \mathrm{GL}_n(q)} f_1(g) \overline{f_2(g)} \quad (f_1, f_2 \in A_n)$$

により内積が入っており，B には $\langle \tilde{P}_{\boldsymbol{\mu}}(q), \tilde{Q}_{\boldsymbol{\nu}}(q) \rangle = \delta_{\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\nu}}$ で内積が入っていたが，この内積に関して次の定理が成立する．

定理 3.2　$\psi : A \simeq B, \pi_n(f) \mapsto q^{-\deg(f)\frac{n(n-1)}{2}} e_n(f)$ は計量同型である．

証明　$a_{\boldsymbol{\mu}}(q) := \prod_{f \in \mathcal{F}} a_{\boldsymbol{\mu}(f)}(q^{\deg(f)})$ とおくと，内積の定義より

$$\langle \pi_{\boldsymbol{\mu}}, \pi_{\boldsymbol{\nu}} \rangle = \delta_{\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\nu}} \frac{1}{\left|\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_q[X]}(V_{\boldsymbol{\mu}})\right|}, \quad \langle \tilde{P}_{\boldsymbol{\mu}}(q), \tilde{P}_{\boldsymbol{\nu}}(q) \rangle = \delta_{\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\nu}} \frac{1}{a_{\boldsymbol{\mu}}(q)}$$

かつ

$$\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_q[X]}(V_{\boldsymbol{\mu}}) \simeq \prod_{f\in\mathcal{F}} \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_q[X]}(V_{\boldsymbol{\mu}(f)})$$

であるから，示すべきは

$$\left|\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_q[X]}(V_\mu(f))\right| = q^{\deg(f)(|\mu|+2n(\mu))}\prod_{i\geq 1}(1-q^{-\deg(f)})\cdots(1-q^{-\deg(f)m_i(\mu)})$$

である．この式の証明は f に関わらず同じ議論になるので，一般性を失わず $\deg(f)=1$ と仮定してよい．$V_\mu(f)$ を V_μ と略記すると

$$V_\mu = \bigoplus_{i\geq 1}\mathbb{F}_q[X]/(f^{\mu_i})$$

であり，$\mathbb{F}_q[X]/(f^{\mu_i})$ の生成元を v_i とすると，$\varphi\in\mathrm{End}_{\mathbb{F}_q[X]}(V_\mu)$ は

$$w_i = \varphi(v_i)\in V_\mu$$

を与えることにより決まる．$(w_1, w_2, \cdots)$ が $\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_q[X]}(V_\mu)$ の元を定めるためには，すべての $i\geq 1$ に対し

(a) $f^{\mu_i}w_i = 0, f^{\mu_i-1}w_i\neq 0$
(b) $(\mathbb{F}_q[X]w_1+\cdots+\mathbb{F}_q[X]w_{i-1})\cap\mathbb{F}_q[X]w_i = 0$

が成り立つことが必要であるが，実は (a)，(b) で十分であることを示そう．

条件 (a)，(b) が成り立っているとすると，$1\leq j\leq i$ に対し $\varphi_i(v_j) = w_j$ として全射 $\mathbb{F}_q[X]$-加群準同型

$$\varphi_i : \mathbb{F}_q[X]/(f^{\mu_1})\oplus\cdots\oplus\mathbb{F}_q[X]/(f^{\mu_i}) \longrightarrow \mathbb{F}_q[X]w_1+\cdots+\mathbb{F}_q[X]w_i$$

が定義できるが，このとき φ_i はすべて単射である．実際，i に関する帰納法で示せばよく，$r\geq 0$ と

$$w'\in\mathbb{F}_q[X]/(f^{\mu_1})\oplus\cdots\oplus\mathbb{F}_q[X]/(f^{\mu_{i-1}})$$

に対し $\varphi_i(w'+f^r v_i) = 0$ とすると

$$\varphi_{i-1}(w') = -f^r w_i \in (\mathbb{F}_q[X]w_1+\cdots+\mathbb{F}_q[X]w_{i-1})\cap\mathbb{F}_q[X]w_i = 0$$

より $\varphi_{i-1}(w') = 0$ であるから，帰納法の仮定より $w' = 0$ を得る．また，$f^r w_i = 0$ と $f^{\mu_i - 1} w_i \neq 0$ から $r \geq \mu_i$ となるので，$f^r v_i = 0$ を得る．故に φ_i は単射であり，帰納法が成立した．とくに φ は $\mathbb{F}_q[X]$-加群同型である．

次に $f : V_\mu \to V_\mu$ を f 倍写像とし，

$$W_{<i} = \mathbb{F}_q[X]w_1 + \cdots + \mathbb{F}_q[X]w_{i-1}$$

とおく．条件 (a)，(b) が

$$w_i \in \mathrm{Ker}(f^{\mu_i}) \setminus (\mathrm{Ker}(f^{\mu_i - 1}) + W_{<i})$$

と同値であることを示そう．

$w_i \in \mathrm{Ker}(f^{\mu_i}) \setminus (\mathrm{Ker}(f^{\mu_i - 1}) + W_{<i})$ とする．(a) は明らかに成立するので (b) を示す．$\mathbb{F}_q[X]w_i \cap W_{<i} \neq 0$ ならば，$a_j \in \mathbb{F}_q$ が存在して

$$0 \neq \sum_{0 \leq j < \mu_i} a_j f^j w_i \in \mathbb{F}_q[X]w_i \cap W_{<i}$$

となるから，適当な f のベキをかけてやれば $f^{\mu_i - 1} w_i \in W_{<i}$ を得るが，$\mu_1, \cdots, \mu_{i-1} \geq \mu_i$ よりある $w_{<i} \in W_{<i}$ が存在して

$$f^{\mu_i - 1} w_i = f^{\mu_i - 1} w_{<i}$$

と書ける．しかしこれは

$$w_i = (w_i - w_{<i}) + w_{<i} \in \mathrm{Ker}(f^{\mu_i - 1}) + W_{<i}$$

で矛盾である．故に $\mathbb{F}_q[X]w_i \cap W_{<i} = 0$ が示された．

逆に (a)，(b) が成立していれば，$w_i \in \mathrm{Ker}(f^{\mu_i})$ は明らかで，

$$w_i \in \mathrm{Ker}(f^{\mu_i - 1}) + W_{<i}$$

ならば $f^{\mu_i - 1} w_i \in W_{<i}$ になるから

$$W_{<i} \cap \mathbb{F}_q[X]w_i \ni f^{\mu_i - 1} w_i \neq 0$$

で (b) に矛盾する．故に $w_i \notin \mathrm{Ker}(f^{\mu_i - 1}) + W_{<i}$ である．

以上から条件 (a)，(b) をみたす w_i のとり方の総数は

$$q^{\dim_{\mathbb{F}_q}\mathrm{Ker}(f^{\mu_i})} - q^{\dim_{\mathbb{F}_q}(\mathrm{Ker}(f^{\mu_i-1})+W_{<i})\cap\mathrm{Ker}(f^{\mu_i})}$$

である．ここで，

$$\begin{aligned}\dim_{\mathbb{F}_q}(\mathrm{Ker}(f^{\mu_i-1})+W_{<i})\cap\mathrm{Ker}(f^{\mu_i}) &= \dim_{\mathbb{F}_q}(\mathrm{Ker}(f^{\mu_i-1})+W_{<i}\cap\mathrm{Ker}(f^{\mu_i}))\\ &= \dim_{\mathbb{F}_q}\mathrm{Ker}(f^{\mu_i-1}) + \dim_{\mathbb{F}_q}\frac{W_{<i}\cap\mathrm{Ker}(f^{\mu_i})}{W_{<i}\cap\mathrm{Ker}(f^{\mu_i-1})}\end{aligned}$$

となるが，$\mu_1,\cdots,\mu_{i-1}\geq\mu_i$ より

$$\dim_{\mathbb{F}_q}\frac{W_{<i}\cap\mathrm{Ker}(f^{\mu_i})}{W_{<i}\cap\mathrm{Ker}(f^{\mu_i-1})} = i-1$$

であり，また $\dim_{\mathbb{F}_q}\mathrm{Ker}(f^k) = {}^t\mu_1+\cdots+{}^t\mu_k$ なので

$$\dim_{\mathbb{F}_q}(\mathrm{Ker}(f^{\mu_i-1})+W_{<i})\cap\mathrm{Ker}(f^{\mu_i}) = {}^t\mu_1+\cdots+{}^t\mu_{\mu_i-1}+i-1$$

となる．故に

$$\left|\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_q[X]}(V_\mu)\right| = \prod_{i\geq1} q^{{}^t\mu_1+\cdots+{}^t\mu_{\mu_i}}(1-q^{i-1-{}^t\mu_{\mu_i}})$$

が得られた．ここで，$i\geq1$ に対し

$$\begin{aligned}\prod_{j={}^t\mu_{i+1}+1}^{{}^t\mu_i}(1-q^{j-1-{}^t\mu_j}) &= (1-q^{{}^t\mu_{i+1}-{}^t\mu_i})(1-q^{{}^t\mu_{i+1}-{}^t\mu_i+1})\cdots(1-q^{-1})\\ &= (1-q^{-m_i(\mu)})(1-q^{-m_i(\mu)+1})\cdots(1-q^{-1})\end{aligned}$$

であるから

$$\prod_{j\geq1}(1-q^{j-1-{}^t\mu_{\mu_j}}) = \prod_{i\geq1}(1-q^{-1})\cdots(1-q^{-m_i(\mu)})$$

となる．他方，μ を Young 図形と思い，$(x,y)\in\mu$ には ${}^t\mu_y$ が書き込まれていると思い，この数字の和を２通りの方法で計算しよう．まず行について和をとってから次に列について和をとると

$$\sum_{i\geq1}({}^t\mu_1+\cdots+{}^t\mu_{\mu_i})$$

であるから，今度はまず列について和をとってから行について和をとると

$$\begin{aligned}\sum_{i\geq 1}({}^t\mu_1+\cdots+{}^t\mu_{\mu_i}) &= \sum_{i\geq 1}({}^t\mu_i)^2\\ &= \sum_{i\geq 1}{}^t\mu_i + 2\sum_{i\geq 1}\frac{{}^t\mu_i({}^t\mu_i-1)}{2}\\ &= |\mu|+2n(\mu)\end{aligned}$$

となり，

$$\left|\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_q[X]}(V_\mu)\right| = q^{|\mu|+2n(\mu)}\prod_{i\geq 1}(1-q^{-1})\cdots(1-q^{-m_i(\mu)}) = a_\mu(q)$$

を得る．故に $\psi : A \simeq B$ は計量同型である． $\square$

第 4 章
ベキ単指標の理論と Deligne-Lusztig 指標

4.1　ベキ単指標と A 型 Hecke 代数

一般の有限簡約群に対してベキ単指標の概念を定義するのには Deligne-Lusztig 指標を必要とするが，$\mathrm{GL}_n(q)$ の場合は次のように定義できる．

定義 4.1　既約 $\mathbb{C}\,\mathrm{GL}_n(q)$-加群 V が**ベキ単**とは

$$V^{B_n(q)} = \{v \in V \mid b \in B_n(q) \text{ に対し } bv = v\} \neq 0$$

のときをいう．ベキ単既約 $\mathbb{C}\,\mathrm{GL}_n(q)$-加群の指標を**ベキ単既約指標**と呼ぶ．

V を既約 $\mathbb{C}\,\mathrm{GL}_n(q)$-加群とすると

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}B_n(q)}(\mathrm{triv}, \mathrm{Res}^{\mathrm{GL}_n(q)}_{B_n(q)}(V)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}\,\mathrm{GL}_n(q)}(\mathrm{Ind}^{\mathrm{GL}_n(q)}_{B_n(q)}(\mathrm{triv}), V)$$

より，V がベキ単であることと $\mathrm{Ind}^{\mathrm{GL}_n(q)}_{B_n(q)}(\mathrm{triv})$ の部分加群として現れることは同値である．

$\mathrm{Ind}^{\mathrm{GL}_n(q)}_{B_n(q)}(\mathrm{triv})$ の自己準同型代数を詳しく見てみよう．$\mathrm{Ind}^{\mathrm{GL}_n(q)}_{B_n(q)}(\mathrm{triv})$ は $\mathrm{GL}_n(q)$-軌道 $X_n = \mathrm{GL}_n(q)/B_n(q)$ の置換加群であるから

$$\mathrm{Ind}^{\mathrm{GL}_n(q)}_{B_n(q)}(\mathrm{triv}) = \mathbb{C}X_n$$

である．$x, y \in X_n$，$w \in S_n$ のとき，条件 $x^{-1}y \in B_n(q)wB_n(q)$ が一義的に定義されることに注意して，関数 $f_w : X_n \times X_n \to \mathbb{C}$ を

$$f_w(x,y)=\begin{cases}1 & (x^{-1}y\in B_n(q)wB_n(q))\\ 0 & (x^{-1}y\notin B_n(q)wB_n(q))\end{cases}$$

により定義する．また，$T_w\in\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}X_n)$ を

$$T_w : x\mapsto\sum_{y\in X_n}f_w(x,y)y\quad(x\in X_n)$$

により定める．ただし，$\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}X_n)$ は自然に $\mathbb{C}X_n$ へ左から作用する．次の補題は Schur による．補題 4.1 の基底を Schur 基底と呼ぶ．

補題 4.1　$\{T_w\mid w\in S_n\}$ は $\mathrm{End}_{\mathbb{C}\,\mathrm{GL}_n(q)}(\mathbb{C}X_n)$ の基底である．

証明　$g\in\mathrm{GL}_n(q)$ に対し $f_w(gx,gy)=f_w(x,y)$ であるから，

$$\begin{aligned}g(T_wx)&=\sum_{y\in X_n}f_w(x,y)gy=\sum_{y\in X_n}f_w(gx,gy)gy\\&=\sum_{y\in X_n}f_w(gx,y)y=T_w(gx)\end{aligned}$$

であるから，$T_w\in\mathrm{End}_{\mathbb{C}\,\mathrm{GL}_n(q)}(\mathbb{C}X_n)$ である．また，x_0 を $\mathrm{GL}_n(q)$ の単位元が定める X_n の元とすると

$$T_wx_0=\sum_{y\in B_n(q)wB_n(q)/B_n(q)}y$$

だから Bruhat 分解より $\{T_w\mid w\in S_n\}$ は一次独立である．そこで

$$e_B=\frac{1}{|B_n(q)|}\sum_{g\in B_n(q)}g$$

とおこう．$\mathbb{C}X_n\simeq\mathbb{C}\,\mathrm{GL}_n(q)e_B\subseteq\mathbb{C}\,\mathrm{GL}_n(q)$ に注意すれば

$$\begin{aligned}\mathrm{End}_{\mathbb{C}\,\mathrm{GL}_n(q)}(\mathbb{C}X_n)&\simeq\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}\,\mathrm{GL}_n(q)}(\mathbb{C}\,\mathrm{GL}_n(q)e_B,\mathbb{C}\,\mathrm{GL}_n(q)e_B)\\&\simeq e_B(\mathbb{C}\,\mathrm{GL}_n(q))e_B\end{aligned}$$

だから，Bruhat 分解より $\mathbb{C}X_n$ の自己準同型代数の次元は $n!$ に等しく，一次独立性より $\{T_w\mid w\in S_n\}$ は基底である．　□

$\mathbb{C}\,\mathrm{GL}_n(q)$ が半単純代数だから $\mathrm{End}_{\mathbb{C}\,\mathrm{GL}_n(q)}(X_n)$ も半単純 $\mathbb{C}$-代数である．すなわち，$\mathbb{C}\,\mathrm{GL}_n(q)$-加群 X_n は

$$X_n = \bigoplus V_i \boxtimes W_i$$

とベキ単既約 $\mathbb{C}\,\mathrm{GL}_n(q)$-加群 V_i たちの直和に書けて，

$$\mathrm{End}_{\mathbb{C}\,\mathrm{GL}_n(q)}(X_n) \simeq \bigoplus \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W_i)$$

となる．

定義 4.2　$\mathbb{Z}[t]$ を $\mathbb{Z}$ 上の一変数多項式環とする．生成元 $T_1, \cdots, T_{n-1}$ と基本関係

$$(T_i - t)(T_i + 1) = 0,\ \ T_iT_j = T_jT_i\ (j \neq i \pm 1)$$
$$T_iT_jT_i = T_jT_iT_j\ (j = i \pm 1)$$

で定義される $\mathbb{Z}[t]$-代数を $\mathcal{H}_n(t)$ と書き，A 型 **Hecke 代数**と呼ぶ．

すなわち，$\{T_i\}_{1\le i<n}$ で生成される $\mathbb{Z}[t]$ 上の自由テンソル代数を

$$(T_i - t)(T_i + 1),\ T_iT_j - T_jT_i\ (j \neq i \pm 1),\ T_iT_jT_i - T_jT_iT_j\ (j = i \pm 1)$$

を含む最小の両側イデアルで割ったものが $\mathcal{H}_n(t)$ である．次に述べる Iwahori の定理は古典的である．

定理 4.1　Schur 基底 $\{T_w \mid w \in S_n\}$ に対して次の積公式が成立．

$$T_{s_i}T_w = \begin{cases} T_{s_iw} & (\ell(s_iw) > \ell(w)) \\ qT_{s_iw} + (q-1)T_w & (\ell(s_iw) < \ell(w)) \end{cases}$$

とくに，$\mathrm{ev}_q : \mathbb{Z}[t] \to \mathbb{C}$ を $t \mapsto q$ で定め，ev_q による $\mathcal{H}_n(t)$ の特殊化を

$$\mathcal{H}_n(q) = \mathcal{H}_n(t) \underset{\mathrm{ev}_q}{\otimes} \mathbb{C}$$

とすると，$T_i \mapsto T_{s_i}$ により $\mathbb{C}$-代数同型 $\mathcal{H}_n(q) \simeq \mathrm{End}_{\mathbb{C}\,\mathrm{GL}_n(q)}(X_n)$ を得る．

Schur 基底は $\mathcal{H}_n(t)$ の中で既に定義可能であることを示そう．

命題 4.1　$w = s_{i_1} \cdots s_{i_r}$ を w の最短表示とするとき

$$T_w = T_{i_1} \cdots T_{i_r} \in \mathcal{H}_n(t)$$

は最短表示によらず w のみから定まる．

証明　$r = \ell(w)$ に関する帰納法で示す．$r = 1$ のとき一意的に定まるのは明らかだから，$r \geq 2$ とする．

$$w = s_{i_1} \cdots s_{i_r} = s_{j_1} \cdots s_{j_r}$$

を 2 つの最短表示とする．$i_1 \leq j_1$ として一般性を失わない．$i_1 = j_1$ ならば，$s_{i_2} \cdots s_{i_r} = s_{j_2} \cdots s_{j_r}$ なので帰納法の仮定より

$$T_{i_2} \cdots T_{i_r} = T_{j_2} \cdots T_{j_r}$$

であり，$T_{i_1} = T_{j_1}$ を左からかけて

$$T_{i_1} T_{i_2} \cdots T_{i_r} = T_{j_1} T_{j_2} \cdots T_{j_r}$$

を得る．次に $j_1 = i_1 + 1$ ならば，$\ell(s_{i_1} w) < \ell(w)$，$\ell(s_{j_1} w) < \ell(w)$ より

$$w(i_1) > w(i_1 + 1) > w(i_1 + 2)$$

となっていることに注意すれば

$$w = s_{i_1} s_{j_1} s_{i_1} v = s_{j_1} s_{i_1} s_{j_1} v, \quad \ell(w) = \ell(v) + 3$$

と書けるから，帰納法の仮定より

$$T_{i_2} \cdots T_{i_r} = T_{j_1} T_{i_1} T_v, \ \ T_{j_2} \cdots T_{j_r} = T_{i_1} T_{j_1} T_v$$

である．故に

$$T_{i_1} T_{i_2} \cdots T_{i_r} = T_{i_1} T_{j_1} T_{i_1} T_v = T_{j_1} T_{i_1} T_{j_1} T_v = T_{j_1} T_{j_2} \cdots T_{j_r}$$

を得る．最後に $j_1 > i_1 + 1$ ならば，$\ell(s_{i_1} w) < \ell(w)$，$\ell(s_{j_1} w) < \ell(w)$ より

$$w(i_1) > w(i_1 + 1) \ \text{かつ}\ w(j_1) > w(j_1 + 1)$$

だから，$w = s_{i_1} s_{j_1} v$ かつ $\ell(w) = \ell(v) + 2$ と書ける．帰納法の仮定より

$$T_{i_2} \cdots T_{i_r} = T_{j_1} T_v, \quad T_{j_2} \cdots T_{j_r} = T_{i_1} T_v$$

であるから

$$T_{i_1} T_{i_2} \cdots T_{i_r} = T_{i_1} T_{j_1} T_v = T_{j_1} T_{i_1} T_v = T_{j_1} T_{j_2} \cdots T_{j_r}$$

を得る． □

補題 4.2 階数 $n!$ の自由 $\mathbb{Z}[t]$-加群 M を

$$M = \bigoplus_{w \in S_n} \mathbb{Z}[t] e_w$$

とし，$\mathbb{Z}[t]$-線形作用素 $T_i : M \to M$ を

$$T_i e_w = \begin{cases} e_{s_i w} & (\ell(s_i w) > \ell(w)) \\ t e_{s_i w} + (t-1) e_w & (\ell(s_i w) < \ell(w)) \end{cases}$$

により定めると，M は $\mathcal{H}_n(t)$-加群になる．

証明 $(T_i - t)(T_i + 1) = 0$ が成り立つことは明らか．Coxeter 生成元の対 $\{s_i, s_j\}$ を任意にひとつ固定し，w を

$$\ell(s_i w) > \ell(w), \quad \ell(s_j w) > \ell(w)$$

となるようにとる．$j = i + 1$ ならば T_i を基底の一部

$$(e_w, e_{s_i w}, e_{s_j w}, e_{s_i s_j w}, e_{s_j s_i w}, e_{s_i s_j s_i w})$$

に関して行列表示できて

$$\begin{pmatrix} 0 & t & & & & \\ 1 & t-1 & & & & \\ & & 0 & t & & \\ & & 1 & t-1 & & \\ & & & & 0 & t \\ & & & & 1 & t-1 \end{pmatrix}$$

となる．同様に T_j を行列表示して計算すれば $T_i T_j T_i = T_j T_i T_j$ を得る．

$j > i + 1$ のときも同様にして $T_i T_j = T_j T_i$ が証明できる． □

命題 4.2　$\mathcal{H}_n(t)$ は $\mathbb{Z}[t]$-自由加群であり

$$\mathcal{H}_n(t) = \bigoplus_{w \in S_n} \mathbb{Z}[t] T_w$$

と書ける．また，次の積公式が成立．

$$T_i T_w = \begin{cases} T_{s_i w} & (\ell(s_i w) > \ell(w)) \\ t T_{s_i w} + (t-1) T_w & (\ell(s_i w) < \ell(w)) \end{cases}$$

とくに，$\{T_1, \cdots, T_{m-1}, T_{m+1}, \cdots, T_{m+n-1}\}$ の生成する $\mathbb{Z}[t]$-部分代数は $\mathcal{H}_m(t) \boxtimes_{\mathbb{Z}[t]} \mathcal{H}_n(t)$ と同型である．

証明　$w = s_{i_1} \cdots s_{i_r}$ を最短表示とする．$\ell(s_i w) > \ell(w)$ ならば

$$T_i T_w = T_i T_{i_1} \cdots T_{i_r} = T_{s_i w}$$

は明らか．$\ell(s_i w) < \ell(w)$ ならば松本交換条件より

$$s_i w = s_{i_1} \cdots \widehat{s_{i_\alpha}} \cdots s_{i_r}$$

であり，右辺は $s_i w$ の最短表示である．よって

$$w = s_i s_{i_1} \cdots \widehat{s_{i_\alpha}} \cdots s_{i_r}$$

が w の最短表示になることと併せて

$$T_{s_i w} = T_{i_1} \cdots \widehat{T_{i_\alpha}} \cdots T_{i_r}, \ \ T_w = T_i T_{i_1} \cdots \widehat{T_{i_\alpha}} \cdots T_{i_r}$$

を得る．以上から

$$\begin{aligned} T_i T_w &= T_i^2 T_{i_1} \cdots \widehat{T_{i_\alpha}} \cdots T_{i_r} \\ &= t T_{i_1} \cdots \widehat{T_{i_\alpha}} \cdots T_{i_r} + (t-1) T_i T_{i_1} \cdots \widehat{T_{i_\alpha}} \cdots T_{i_r} \\ &= t T_{s_i w} + (t-1) T_w \end{aligned}$$

となり，求める積公式が証明された．

積公式より $\sum_{w \in S_n} \mathbb{Z}[t] T_w$ は 1 を含む $\mathcal{H}_n(t)$ の左イデアルになるから

$$\mathcal{H}_n(t) = \sum_{w \in S_n} \mathbb{Z}[t] T_w$$

を得る．ここで $\mathbb{Z}[t]$-線形写像

$$\mathcal{H}_n(t) \longrightarrow \bigoplus_{w \in S_n} \mathbb{Z}[t] e_w, \quad h \mapsto h e_1$$

を考えると $T_w \mapsto e_w$ なので，$\{T_w \mid w \in S_n\}$ は $\mathbb{Z}[t]$ 上一次独立でもあり，$\mathcal{H}_n(t)$ の $\mathbb{Z}[t]$-加群としての自由基底である． □

$\mathcal{H}_n(t)$ の特殊化により任意の体上で Hecke 代数を定義することができる．すなわち，L を体，$c \in L^\times$ とし，$f : \mathbb{Z}[t] \to L$ を $t \mapsto c$ で定まる特殊化写像とするとき，

$$\mathcal{H}_n(c) = \mathcal{H}_n(t) \underset{f}{\otimes} L$$

と定義する．とくに，$L = \mathbb{C}$，$f = \mathrm{ev}_q$ としたときが $\mathcal{H}_n(q)$ である．

4.2 ベキ単指標の Hall 代数と対称関数環

定義 4.3 $\mathrm{GL}_n(q)$（$n = 0, 1, 2, \cdots$）のベキ単既約指標全体を基底とする Hall 代数 A の部分空間を A^{uni} と書く．

補題 4.3 A^{uni} は A の $\mathbb{C}$-部分代数である．

証明 V_1 が $B_m(q)$-固定ベクトルをもつ既約 $\mathbb{C}\,\mathrm{GL}_m(q)$-加群で V_2 が $B_n(q)$-固定ベクトルをもつ既約 $\mathbb{C}\,\mathrm{GL}_n(q)$-加群のとき

$$T = T_{m+n} = T_m \times T_n \subseteq L = \mathrm{GL}_m \times \mathrm{GL}_n \subseteq G = \mathrm{GL}_{m+n}$$

として $R_L^G(V_1 \boxtimes V_2)$ に現れる既約部分加群 V がすべてベキ単であることを示せばよい．しかし $V_1 \boxtimes V_2$ は $R_T^L(\mathrm{triv})$ の部分加群なので V は

$$R_L^G \circ R_T^L(\mathrm{triv}) \simeq \mathrm{Ind}_{B_n(q)}^{\mathrm{GL}_{m+n}(q)}(\mathrm{triv})$$

の部分加群である．故に V はベキ単である． □

$\mathcal{H}_m(q)\boxtimes\mathcal{H}_n(q)$ を $\{T_i \mid 1\le i<n, i\ne m\}$ が生成する $\mathcal{H}_{m+n}(q)$ の $\mathbb{C}$-部分代数と同一視し，$\mathcal{H}_{m+n}(q)$ を $(\mathcal{H}_{m+n}(q), \mathcal{H}_m(q)\boxtimes\mathcal{H}_n(q))$-両側加群とみよう．

他方，$L=\mathrm{GL}_m\times\mathrm{GL}_n\subseteq G=\mathrm{GL}_{m+n}$ として

$$\mathbb{C}X_{m+n}\simeq R_L^G(\mathbb{C}X_m\times X_n)$$

に注意すると，

$$\mathcal{H}_{m+n}(q)=\mathrm{End}_{\mathbb{C}\,\mathrm{GL}_{m+n}(q)}(R_L^G(\mathbb{C}X_m\times X_n), \mathbb{C}X_{m+n})$$

であるが，$b\boxtimes c\in\mathcal{H}_m(q)\boxtimes\mathcal{H}_n(q)$ は $R_L^G(b\boxtimes c)$ により $R_L^G(\mathbb{C}X_m\times X_n)$ に左から作用するから，$a, f\in\mathcal{H}_{m+n}(q)$，$b\boxtimes c\in\mathcal{H}_m(q)\boxtimes\mathcal{H}_n(q)$ に対し

$$a\cdot f\cdot b\boxtimes c \;=\; \mathbb{C}X_{m+n}\xrightarrow{R_L^G(b\boxtimes c)}\mathbb{C}X_{m+n}\xrightarrow{f}\mathbb{C}X_{m+n}\xrightarrow{a}\mathbb{C}X_{m+n}$$

としても $\mathcal{H}_{m+n}(q)$ は $(\mathcal{H}_{m+n}(q), \mathcal{H}_m(q)\boxtimes\mathcal{H}_n(q))$-両側加群になる．

これら 2 つの両側加群構造は実は同じものである．実際，L を Levi 部分にもつ放物型部分群を P とすれば

$$X_m\times X_n=P(q)/B_{m+n}(q)\subseteq G(q)/B_{m+n}(q)=X_{m+n}$$

と考えて，$R_L^G(b\boxtimes c)$ は次の可換図式

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}X_m\times X_n \arrow[r, "\mathrm{Infl}_L^P(b\boxtimes c)"] \arrow[d] & \mathbb{C}X_{m+n} \\
\mathrm{Ind}_{P(q)}^{G(q)}(\mathbb{C}X_m\times X_n) \arrow[ur, dashed, "\exists 1"'] &
\end{tikzcd}$$

から定まる写像であるが，$w\in S_m\times S_n$ に対し $X_m\times X_n$ で考えた f_w は

$x^{-1}y\in B_{m+n}(q)wB_{m+n}(q)$ のとき $(x,y)\mapsto 1$,
$x^{-1}y\notin B_{m+n}(q)wB_{m+n}(q)$ のとき $(x,y)\mapsto 0$,

で定まる関数

$$P(q)/B_{m+n}(q)\times P(q)/B_{m+n}(q)\longrightarrow\mathbb{C}$$

に等しいことに注意すると，これは X_{m+n} で考えた

$$f_w : G(q)/B_{m+n}(q) \times G(q)/B_{m+n}(q) \longrightarrow \mathbb{C}$$

の制限写像であって，このことより

$$T_w \in \mathcal{H}_{m+n}(q) \text{ の } \mathbb{C}X_m \times X_n \text{ への制限は } T_w \in \mathcal{H}_m(q) \boxtimes \mathcal{H}_n(q)$$

であることがわかる．つまり Harish-Chandra 誘導を用いて $\mathcal{H}_{m+n}(q)$ を $(\mathcal{H}_{m+n}(q), \mathcal{H}_m(q) \boxtimes \mathcal{H}_n(q))$-両側加群と見たときの右作用は自然な埋め込み

$$\mathcal{H}_m(q) \boxtimes \mathcal{H}_n(q) \subseteq \mathcal{H}_{m+n}(q) : T_i \mapsto T_i \ \ (1 \le i \le m+n-1, i \ne m)$$

により $\mathcal{H}_{m+n}(q)$ の右作用を $\mathcal{H}_m(q) \boxtimes \mathcal{H}_n(q)$ に制限したものに他ならない.

定義 4.4 $\mathbb{Z}$-加群 R_q を

$$R_q = \bigoplus_{n \ge 0} K_0(\mathcal{H}_n(q)\text{-mod})$$

で定め，R_q の積を A と同様に $V \in \mathcal{H}_m(q)\text{-mod}, W \in \mathcal{H}_n(q)\text{-mod}$ に対し

$$[V][W] = [\mathrm{Ind}_{\mathcal{H}_m(q) \boxtimes_{\mathbb{C}} \mathcal{H}_n(q)}^{\mathcal{H}_{m+n}(q)}(V \boxtimes W)]$$

で定義する．ただし，

$$\mathrm{Ind}_{\mathcal{H}_m(q) \boxtimes_{\mathbb{C}} \mathcal{H}_n(q)}^{\mathcal{H}_{m+n}(q)}(V \boxtimes W) = \mathcal{H}_{m+n}(q) \underset{\mathcal{H}_m(q) \boxtimes \mathcal{H}_n(q)}{\otimes} (V \boxtimes W)$$

である.

定義 4.5 $\mathcal{H}_n(q)$ の 1 次元表現

$$T_i \mapsto q \quad (1 \le i \le n-1)$$

を triv_q で表わす.

ベキ単既約 $\mathbb{C}\,\mathrm{GL}_n(q)$-加群の直和のなす $\mathbb{C}\,\mathrm{GL}_n(q)\text{-mod}$ の充満部分圏を $\mathbb{C}\,\mathrm{GL}_n(q)\text{-mod}^{\mathrm{uni}}$ とすると,

$$M \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}\,\mathrm{GL}_n(q)}(\mathbb{C}X_n, M), \mathbb{C})$$

は関手 $F_n : \mathbb{C}\,\mathrm{GL}_n(q)\text{-mod}^{\mathrm{uni}} \to \mathcal{H}_n(q)\text{-mod}$ を定める.

補題 4.4　F_n は圏同値であり，ベキ単既約 $\mathbb{C}\,\mathrm{GL}_n(q)$-加群を既約 $\mathcal{H}_n(q)$-加群に写す．とくに，単位加群を triv_q に写す．

証明　$\mathbb{C}\,\mathrm{GL}_n(q)$ と $\mathcal{H}_n(q)$ は半単純 $\mathbb{C}$-代数だから，F_n により既約加群が対応することを示せば十分である．そこで，$\mathbb{C}X_n$ の $\mathbb{C}\,\mathrm{GL}_n(q) \boxtimes \mathcal{H}_n(q)$-加群としての既約分解を

$$\mathbb{C}X_n = \bigoplus V_i^{(n)} \boxtimes W_i^{(n)}$$

とすると，$F_n(V_i^{(n)}) = W_i^{(n)}$ だから F_n によりベキ単既約 $\mathbb{C}\,\mathrm{GL}_n(q)$-加群は既約 $\mathcal{H}_n(q)$-加群に対応する．また，$\mathbb{C}\,\mathrm{GL}_n(q)$ の単位表現は $\mathbb{C}X_n$ の部分加群

$$\mathbb{C}(\sum_{x \in X_n} x) \subseteq \mathbb{C}X_n$$

として実現される．ここで，$g \in \mathrm{GL}_n(q)$ に対して

$$\sum_{x \in X_n} f_w(x, gy) = \sum_{x \in X_n} f_w(g^{-1}x, y) = \sum_{x \in X_n} f_w(x, y)$$

であるから，$\sum_{x \in X_n} f_w(x, y)$ は定数であり，とくに $y = x_0$ とすれば

$$\sum_{x \in X_n} f_w(x, y) = \sum_{x \in X_n} f_w(x, x_0) = |B_n(q)wB_n(q)/B_n(q)|$$

である．故に

$$\begin{aligned} T_i(\sum_{x \in X_n} x) &= \sum_{x \in X_n} \sum_{y \in X_n} f_{s_i}(x, y)y \\ &= \sum_{y \in X_n} \left(\sum_{x \in X_n} f_{s_i}(x, y) \right) y = q(\sum_{y \in X_n} y) \end{aligned}$$

となり，関手 F_n は $\mathbb{C}\,\mathrm{GL}_n(q)$ の単位表現を triv_q に写す．　□

A^{uni} には A の部分空間として自然に内積が定義されているが，R_q に対しても，既約加群が正規直交基底であると宣言することにより内積を定めよう．また，圏同値が Grothendieck 群に誘導する同型写像を $[F_n]$ と書く．すると，次の命題が成立する．

命題 4.3 $\underset{n\geq 0}{\oplus}[F_n]$ は $\mathbb{C}$-代数計量同型

$$A^{\mathrm{uni}} \simeq R_q \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{C}$$

を与え，既約指標は既約 $\mathcal{H}_n(q)$-加群に対応し，単位指標は triv_q に対応する．

証明 補題 4.4 より $A^{\mathrm{uni}} \to R_q \otimes \mathbb{C}$ が $\mathbb{C}$-代数準同型であることを示せば十分である．$\mathbb{C}X_m, \mathbb{C}X_n, \mathbb{C}X_{m+n}$ の既約分解を各々

$$\mathbb{C}X_m = \bigoplus V_i^{(m)} \boxtimes W_i^{(m)},\ \ \mathbb{C}X_n = \bigoplus V_j^{(n)} \boxtimes W_j^{(n)}$$

$$\mathbb{C}X_{m+n} = \bigoplus V_k^{(m+n)} \boxtimes W_k^{(m+n)}$$

とすると，$L = \mathrm{GL}_m \times \mathrm{GL}_n \subseteq G = \mathrm{GL}_{m+n}$ として

$$R_L^G(V_i^{(m)} \boxtimes V_j^{(n)}) = \bigoplus_k c_{ij}^k V_k^{(m+n)}$$

と書ける．このとき，

$$\begin{aligned} F_{m+n}(R_L^G(V_i^{(m)} \boxtimes V_j^{(n)})) &= \bigoplus c_{ij}^k F_{m+n}(V_k^{(m+n)}) \\ &= \bigoplus c_{ij}^k W_k^{(m+n)} \end{aligned}$$

である．他方

$$\mathcal{H}_{m+n}(q) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}\,\mathrm{GL}_{m+n}(q)}(R_L^G(\mathbb{C}X_m \boxtimes \mathbb{C}X_n), \mathbb{C}X_{m+n})$$

の右辺に

$$R_L^G(\mathbb{C}X_m \boxtimes \mathbb{C}X_n) = \bigoplus_{i,j} R_L^G(V_i^{(m)} \boxtimes V_j^{(n)}) \boxtimes W_i^{(m)} \boxtimes W_j^{(n)}$$

$$\mathbb{C}X_{m+n} = \bigoplus_k V_k^{(m+n)} \boxtimes W_k^{(m+n)}$$

を代入して $(\mathcal{H}_{m+n}(q), \mathcal{H}_m(q) \boxtimes \mathcal{H}_n(q))$-両側加群同型

$$\mathcal{H}_{m+n}(q) \simeq \bigoplus_{i,j,k} c_{ij}^k \,\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W_i^{(m)} \boxtimes W_j^{(n)}, W_k^{(m+n)})$$

を得るから，

$$\begin{aligned}&\mathcal{H}_{m+n}(q)\underset{\mathcal{H}_m(q)\boxtimes\mathcal{H}_n(q)}{\otimes}(F_m(V_i^{(m)})\boxtimes F_n(V_j^{(n)}))\\&\simeq\bigoplus_{\alpha,\beta,k}c_{\alpha\beta}^k\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(W_\alpha^{(m)}\boxtimes W_\beta^{(n)},W_k^{(m+n)})\underset{\mathcal{H}_m(q)\boxtimes\mathcal{H}_n(q)}{\otimes}W_i^{(m)}\boxtimes W_j^{(n)}\end{aligned}$$

となるが，一般に有限次元半単純 $\mathbb{C}$-代数 A と既約 A-加群 V_1, V_2 に対して

$$\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(V_1,\mathbb{C})\underset{A}{\otimes}V_2=\begin{cases}\mathbb{C} & (V_1\simeq V_2)\\ 0 & (V_1\not\simeq V_2)\end{cases}$$

が成り立つことより

$$\operatorname{Ind}_{\mathcal{H}_m(q)\boxtimes\mathcal{H}_n(q)}^{\mathcal{H}_{m+n}(q)}(W_i^{(m)}\boxtimes W_j^{(n)})\simeq\bigoplus_k c_{ij}^k W_k^{(m+n)}$$

である．以上から，$A^{\mathrm{uni}}\to R_q\otimes\mathbb{C}$ は $\mathbb{C}$-代数準同型である．　□

ここで，Hoefsmit による $\mathcal{H}_n(q)$ の既約表現の構成について触れておこう．分割 $\lambda\vdash n$ を Young 図形とみなし，$\mathrm{Std}(\lambda)$ を λ の標準盤のなす集合とする．すなわち，Young 図形 λ に $1,\cdots,n$ を 1 回ずつ使って，各行で左から右へ，各列で上から下へ数字が増加するように書きこんだものが標準盤である．定義を見れば明らかなように，標準盤は第 3 章で触れた半標準盤の一種である．

定義 4.6　標準盤 T に対し，$c_T(i)$（$1\le i\le n$）を i が T の a 行 b 列であるとき $c_T(i)=-a+b$ で定める．

補題 4.5　L を体とし，$t\in L^\times$ が

$$t^i+t^{i-1}+\cdots+1\neq 0\quad(1\le i\le n-1)$$

をみたすとする．V^λ を $\mathrm{Std}(\lambda)$ を基底にもつ L 上のベクトル空間とし，

$$T_i: V^\lambda\longrightarrow V^\lambda$$

を次のように定める．

(1) $T \in \mathrm{Std}(\lambda)$ において $i, i+1$ が同じ行にあるとき，$T_iT = tT$.

(2) $T \in \mathrm{Std}(\lambda)$ において $i, i+1$ が同じ列にあるとき，$T_iT = -T$.

(3) (1)，(2) 以外のとき，i と $i+1$ の位置を入れかえて得られる標準盤を T' とすると，

$$T_iT = \frac{(t-1)t^{c_T(i+1)}}{t^{c_T(i+1)} - t^{c_T(i)}}T + (\frac{(t-1)t^{c_T(i+1)}}{t^{c_T(i+1)} - t^{c_T(i)}} + 1)T'$$

このとき，V^λ は $\mathcal{H}_n(t)$-加群である．

$X_1 = 1$，$X_{i+1} = t^{-1}T_iX_iT_i$（$1 \leq i < n$）により $X_1, \cdots, X_n \in \mathcal{H}_n(t)$ を定めると

$$X_iX_j = X_jX_i \quad (1 \leq i \leq j \leq n)$$

が成り立ち，$T \in \mathrm{Std}(\lambda)$ は同時固有ベクトルである．固有値は

$$X_iT = t^{c_T(i)}T \quad (1 \leq i \leq n)$$

で与えられる．

$q \in \mathbb{Q}_{\geq 1}$ なら $\mathcal{H}_n(q)$-加群 V^λ が定義されることに注意しよう．

命題 4.4 $q \in \mathbb{Q}_{\geq 1}$ とする．このとき，$\{V^\lambda \mid \lambda \vdash n\}$ は既約 $\mathcal{H}_n(q)$-加群の同型類の完全代表系である．

証明 $X_1, \cdots, X_n$ の同時固有値を与えたとき標準盤がただ１通りに復元できるので，V^λ における $X_1, \cdots, X_n$ の同時固有値の重複度は高々1 である．故に V^λ の部分 $\mathcal{H}_n(q)$-加群はかならず標準盤を基底にもつから，V^λ の既約性がわかる．また，$\lambda \neq \mu$ ならば V^λ と V^μ に現れる同時固有値は相異なるから $V^\lambda \not\simeq V^\mu$ である．最後に Robinson-Schensted 対応により

$$\sum_{\lambda \vdash n} (\dim V^\lambda)^2 = n!$$

だから，これですべての既約 $\mathcal{H}_n(q)$-加群が得られていることがわかる．□

ここで半単純対称代数の理論を復習しておこう．L を体とする．有限次元 L-代数 A が**対称代数**とは $\mathrm{Tr}(ab) = \mathrm{Tr}(ba)$（$a, b \in A$）をみたす L-線形写像

$$\mathrm{Tr} : A \longrightarrow L$$

であって，$\langle a, b\rangle = \mathrm{Tr}(ab)$ が非退化であるときをいう．このとき，A の基底 $\{a_1, \cdots, a_N\}$，$\{b_1, \cdots, b_N\}$ を $\langle a_i, b_j\rangle = \delta_{ij}$ となるようにとることができる．とくに次が成り立つ．

$$a \in A \text{ に対し，} ab_j = \sum_{i=1}^{N} c_{ij} b_i \ (c_{ij} \in L) \text{ ならば，} a_i a = \sum_{j=1}^{N} c_{ij} a_j.$$

V_1, V_2 を絶対既約 A-加群とし，$f \in \mathrm{Hom}_L(V_1, V_2)$ に対し

$$I(f) : v \mapsto \sum_{i=1}^{N} b_i f(a_i v)$$

とおくと，$a \in A$ に対し

$$I(f)(av) = \sum_{i=1}^{N} b_i f(a_i av) = \sum_{i,j=1}^{N} b_i c_{ij} f(a_j v) = \sum_{j=1}^{N} ab_j f(a_j v) = aI(f)(v)$$

が成り立つから，$I(f) \in \mathrm{Hom}_A(V_1, V_2)$ であり，$I(f)$ に Schur の補題を適用することができる．$I(f)$ は A が群代数 $\mathbb{C}G$ のときの平均化作用素

$$I(f) = \sum_{g \in G} g^{-1} f g$$

の一般化であり，指標の理論を群代数の場合と同様の議論で展開することができる．以下に要点をまとめておこう．

命題 4.5　A を体 L 上の N 次元対称代数とし，A の基底

$$\{a_1, \cdots, a_N\}, \quad \{b_1, \cdots, b_N\}$$

を $\langle a_i, b_j\rangle = \delta_{ij}$ となるようにとる．このとき各絶対既約 A-加群 V に対して次が成立する．

(1) ある $f \in \mathrm{End}_L(V)$ が存在して $I(f) \neq 0$ になることと V が射影 A-加群であることは同値である．

(2) V が射影 A-加群であるならば，$c_V \in L^\times$ が存在して任意の $f \in \mathrm{End}_L(V)$

に対して $I(f) = c_V \operatorname{Tr}(f, V) \operatorname{Id}_V$ となる．また，V の等質成分への射影子は次で与えられる．

$$e_V = \frac{1}{c_V} \sum_{i=1}^{N} \operatorname{Tr}(a_i, V) b_i$$

次の性質は Hecke 代数の表現論において基本的である．

補題 4.6 L を体，$c \in L^\times$ とする．$e \in S_n$ を単位元とするとき，

$$\operatorname{Tr} : T_w \mapsto \begin{cases} 1 & (w = e) \\ 0 & (w \neq e) \end{cases}$$

と定めることにより $\mathcal{H}_n(c)$ は対称 L-代数である．

証明 $a_w = T_w$，$b_w = c^{-\ell(w)} T_{w^{-1}}$（$w \in S_n$）とおき

$$\langle a_y, b_w \rangle = \delta_{yw}$$

が成り立つことを $\ell(y)$ に関する帰納法で証明しよう．$y = e$ のときは明らか．$y = y' s_i$ かつ $\ell(y) = \ell(y') + 1$ とするとき，

$$\langle a_y, b_w \rangle = \langle a_{y'}, T_i b_w \rangle = \begin{cases} c\delta_{y', ws_i} & (\ell(ws_i) > \ell(w)) \\ \delta_{y', ws_i} + (c-1)\delta_{y', w} & (\ell(ws_i) < \ell(w)) \end{cases}$$

であるが，$\ell(ws_i) > \ell(w)$ のとき，$y' = ws_i$ ならば

$$\ell(ws_i) = \ell(y') < \ell(y' s_i) = \ell(w)$$

で矛盾するから，$c\delta_{y', ws_i} = 0 = \delta_{y', ws_i}$ である．他方，$\ell(ws_i) < \ell(w)$ のとき，$y' = w$ ならば

$$\ell(ws_i) = \ell(y') > \ell(y' s_i) < \ell(y') = \ell(w)$$

でやはり矛盾する．以上から $\langle a_y, b_w \rangle = \delta_{y', ws_i} = \delta_{yw}$ となり，とくに非退化対称形式が定まる． □

命題 4.6　$\mathbb{Z}$-代数同型 $R_q \simeq R_1$ が存在し，既約 $\mathcal{H}_n(q)$-加群 V^λ は既約 $\mathbb{C}S_n$-加群 V^λ に対応する．

証明　t を不定元とし，Hoefsmit の表現を $\mathbb{Q}(t)$ の場合に考える．Hoefsmit の表現は $t \mapsto q \in \mathbb{Q}_{\geq 1}$ と特殊化しても定義されるから，特殊化する前と後の

$$\mathrm{Ind}_{\mathcal{H}_m(q)\boxtimes\mathcal{H}_n(q)}^{\mathcal{H}_{m+n}(q)}(V^\mu \boxtimes V^\nu)$$

中の V^λ の重複度 $c_{\mu\nu}^\lambda$ を比較しよう．ここで，$V = V^\lambda$ に対する c_V を $c_\lambda(t)$ と書く．$c_\lambda(t)$ が $t = q$ に極を持つならば，

$$I(\mathrm{Id}_V) = c_\lambda(t)(\dim V)\,\mathrm{Id}_V$$

の分母を払って $t \mapsto q$ と特殊化すれば矛盾する．$t = q$ に零点を持つと恒等的に $I(f) = 0$ となりやはり矛盾するので $c_\lambda(q) \neq 0$ である．以上から射影子 e_{V^λ} はそのまま特殊化できるので

$$c_{\mu\nu}^\lambda = \frac{\dim e_{V^\lambda}\,\mathrm{Ind}_{\mathcal{H}_m(q)\boxtimes\mathcal{H}_n(q)}^{\mathcal{H}_{m+n}(q)}(V^\mu \boxtimes V^\nu)}{\dim V^\lambda}$$

に注意すれば，$t \mapsto q$ と特殊化すると $c_{\mu\nu}^\lambda$ は増加しないことがわかる．他方，

$$c_{\mu\nu}^\lambda = \dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_{m+n}(q)}(\mathrm{Ind}_{\mathcal{H}_m(q)\boxtimes\mathcal{H}_n(q)}^{\mathcal{H}_{m+n}(q)}(V^\mu \boxtimes V^\nu), V^\lambda)$$

より $c_{\mu\nu}^\lambda$ は連立 1 次方程式の解空間の次元として計算できる．故に $t \mapsto q$ と特殊化すると $c_{\mu\nu}^\lambda$ が減少しないことがわかる．以上から $c_{\mu\nu}^\lambda$ は $q \in \mathbb{Q}_{\geq 1}$ への特殊化に依存しない一定の数であることがわかり，題意を得る．　$\square$

命題 4.3 と命題 4.6 を併せて次を得る．

系 4.1　$\mathbb{C}$-代数計量同型 $A^{\mathrm{uni}} \simeq R_1 \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{C}$ が存在し，ベキ単既約指標は既約指標に対応する．

定義 4.7　各 $\lambda \vdash n$ に対して既約 $\mathbb{C}S_n$-加群 V^λ に対応する $\mathrm{GL}_n(q)$ のベキ単既約指標を ξ_λ と書く．

対称群の元 $c_n = (1, 2, \cdots, n) \in S_n$ を

$$c_n(i) = \begin{cases} i+1 & (1 \leq i < n) \\ 1 & (i = n) \end{cases}$$

で定め，$\mu \vdash n$ に対し S_n の放物型部分群 S_μ を考え，

$$c_\mu = c_{\mu_1} \times c_{\mu_2} \times \cdots \in S_{\mu_1} \times S_{\mu_2} \times \cdots = S_\mu$$

と定義する．c_μ で代表される共役類を $C(\mu)$ と書く．$\{C(\mu) \mid \mu \vdash n\}$ は S_n の共役類の完全代表系である．また，

$$z_\mu = |C_{S_n}(c_\mu)| = |\{w \in S_n \mid wc_\mu = c_\mu w\}|$$

とおくと，$|C(\mu)| = n!/z_\mu$ である．S_n 上の複素数値類関数 π_μ を

$$\pi_\mu(w) = \begin{cases} 1 & (w \in C(\mu)) \\ 0 & (w \notin C(\mu)) \end{cases}$$

で定め，線形同型 $\psi : R_1 \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{C} \simeq \Lambda \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{C}$ を $\pi_\mu \mapsto \dfrac{1}{z_\mu} p_\mu$ で定義する．このとき次が成り立つ．

補題 4.7　ψ は $\mathbb{C}$-代数同型である．

証明　$\mu \vdash m$，$\nu \vdash n$ とする．$x \in C(\lambda) \subseteq S_{m+n}$ に対し，

$$\begin{aligned} \pi_\mu \pi_\nu(x) &= \mathrm{Ind}_{S_m \times S_n}^{S_{m+n}}(\pi_\mu \boxtimes \pi_\nu)(x) \\ &= \frac{1}{m!n!} \#\{g \in S_{m+n} \mid g^{-1}xg \in C(\mu) \times C(\nu)\} \end{aligned}$$

であるが，

$$\{g \in S_{m+n} \mid g^{-1}xg \in C(\mu) \times C(\nu)\} \neq \varnothing$$

ならば最初から $x \in C(\lambda) \cap (C(\mu) \times C(\nu))$ としてよく，このとき λ は

$$\mu_1, \mu_2, \cdots, \nu_1, \nu_2, \cdots$$

を大きい順に並べたものとしてただひと通りに定まる．さらに，x の S_{m+n} 中での中心化群を $C_{S_{m+n}}(x)$ として

$$\{g \in S_{m+n} \mid g^{-1}xg \in C_\mu \times C_\nu\} = \{zh \mid h \in S_m \times S_n, z \in C_{S_{m+n}}(x)\}$$

と書ける．すなわちこの集合には $C_{S_{m+n}}(x) \times (S_m \times S_n)$ が推移的に作用し，固定化群は

$$C_{S_{m+n}}(x) \cap (S_m \times S_n) = C_{S_m \times S_n}(x)$$

であるから，

$$\#\{g \in S_{m+n} \mid g^{-1}xg \in C(\mu) \times C(\nu)\} = \frac{z_\lambda m!n!}{z_\mu z_\nu}$$

を得る．よって，$p_\lambda = p_\mu p_\nu$ に注意すれば，

$$\psi(\pi_\mu \pi_\nu) = \frac{z_\lambda}{z_\mu z_\nu}\psi(\pi_\lambda) = \frac{1}{z_\mu z_\nu}p_\lambda = \frac{1}{z_\mu z_\nu}p_\mu p_\nu = \psi(\pi_\mu)\psi(\pi_\nu)$$

となり，ψ は $\mathbb{C}$-代数同型である．　□

次式は Cauchy 恒等式としてよく知られている．証明するには $x_i = y_j = 0$（$i, j > n$）としてから考えればよく，このとき，左辺を $h_i(x)$ と y_j の単項式の積の和で展開したのち x の基本交代式と y の基本交代式をかけて補題 3.9 を用いれば右辺が得られる．

$$\prod_{i,j=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x_i y_j} = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} s_\lambda(x) s_\lambda(y)$$

このように組合せ論的議論で簡単に証明できる等式ではあるが，表現論的には次のような理解が重要である．すなわち，$\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ には $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ が両側から作用するので，$\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ 上の多項式関数全体のなす $\mathbb{C}$-代数を $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$-両側加群とみることができる．$x_i = y_j = 0$（$i, j > n$）とした Cauchy 恒等式は，この多項式表現の既約分解を指標等式として書いた Peter-Weyl 型定理に他ならない．Cauchy 恒等式の左辺をベキ和対称関数で書き直せば

$$\prod_{i,j=1}^{\infty} \frac{1}{1-x_i y_j} = \exp(\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} p_n(x) p_n(y)) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} \frac{1}{z_\lambda} p_\lambda(x) p_\lambda(y)$$

も簡単に証明できることを注意しておく．とくに，$y_i = 0$（$i \geq 2$）とすれば次式を得る．

$$h_m = \sum_{\mu \vdash m} \frac{1}{z_\mu} p_\mu$$

命題 4.7 S_m の単位指標を η_m とすると，$\lambda \vdash n$ に対し

$$\chi^\lambda = \det(\eta_{\lambda_i - i + j}) \in R_1$$

は既約 $\mathbb{C}S_n$-加群 V^λ の指標で，$\psi(\chi^\lambda) = \det(h_{\lambda_i - i + j}) = s_\lambda$ が成り立つ．

証明 Λ に $\langle p_\lambda, p_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu} z_\lambda$ で内積を入れると，

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{P}} \frac{1}{z_\lambda} p_\lambda(x) p_\lambda(y) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} s_\lambda(x) s_\lambda(y)$$

より $\langle s_\lambda, s_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu}$ であり，R_1 の内積を考えると，$\mu \vdash n, \nu \vdash n$ に対して

$$\langle \pi_\mu, \pi_\nu \rangle = \delta_{\mu\nu} \frac{1}{z_\mu}$$

が成り立つから ψ は計量同型になる．他方，$\eta_m = \sum_{\mu \vdash m} \pi_\mu$ より

$$\psi(\eta_m) = \sum_{\mu \vdash m} \frac{1}{z_\mu} p_\mu = h_m$$

であるから，$\chi^\lambda = \det(\eta_{\lambda_i - i + j})$ とおくと，補題 3.9 より $\psi(\chi^\lambda) = s_\lambda$ であるが，χ^λ は単位指標の誘導指標の交代和であるから一般指標であり，また

$$\langle \chi^\lambda, \chi^\lambda \rangle = \langle s_\lambda, s_\lambda \rangle = 1$$

であるから，$\chi^\lambda(1) > 0$ を示せば χ^λ は既約指標になる．ところが

$$\chi^\lambda(1) = \langle \chi^\lambda, \pi_{(1^n)} \rangle = \langle s_\lambda, p_1^n \rangle = \langle s_\lambda, e_1^n \rangle$$

であり，命題 3.3(2) において $t=0$ とすれば e_1^n が Schur 関数 s_λ の非負整数係数一次結合であることがわかるから χ^λ は対称群 S_n の既約指標である．

χ^λ が既約 $\mathbb{C}S_n$-加群 V^λ の指標であることを n に関する帰納法で示そう．実際，上で用いた命題 3.3(2) の式によれば，$\mu \vdash n-1$ に対し

$$s_\mu e_1 = \sum_\lambda s_\lambda$$

であって，和は $\lambda \vdash n$，$\lambda \supseteq \mu$ となるものを走るので，

$$\psi(\mathrm{Ind}_{S_{n-1}}^{S_n}(\chi^\mu)) = s_\mu e_1 = \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \mu \subseteq \lambda}} \psi(\chi^\lambda)$$

であり，Frobenius 相互律より

$$\mathrm{Res}_{S_{n-1}}^{S_n}(\chi^\lambda) = \sum_{\substack{\mu \vdash n-1 \\ \mu \subseteq \lambda}} \chi^\mu$$

と書ける．他方，

$$\mathrm{Res}_{S_{n-1}}^{S_n}(V^\lambda) = \bigoplus_{\substack{\mu \vdash n-1 \\ \mu \subseteq \lambda}} V^\mu$$

だから，帰納法の仮定より $\mathrm{Res}_{S_{n-1}}^{S_n}(V^\lambda)$ の指標は $\mathrm{Res}_{S_{n-1}}^{S_n}(\chi_\lambda)$ である．故に V^λ が $\mathrm{Res}_{S_{n-1}}^{S_n}(V^\lambda)$ から一意的に決まることに注意すれば題意を得る．　□

命題 4.7 を言いかえれば次の命題になる．

命題 4.8　対称群 S_n の単位指標を h_n に対応させると次の $\mathbb{Z}$-代数同型が定まる．

$$R_1 = \bigoplus_{n \geq 0} K_0(\mathbb{C}S_n\text{-mod}) \simeq \Lambda$$

このとき，既約 $\mathbb{C}S_n$-加群 V^λ は Schur 関数 s_λ に対応する．

命題 4.3，命題 4.6，命題 4.8 より，A^{uni} の $\mathbb{Z}$-部分代数 $A_{\mathbb{Z}}^{\mathrm{uni}}$ を

$$A_{\mathbb{Z}}^{\mathrm{uni}} = \bigoplus_{\lambda\in\mathcal{P}} \mathbb{Z}\xi_\lambda$$

で定めると $\mathbb{Z}$-代数計量同型 $A_{\mathbb{Z}}^{\mathrm{uni}} \simeq R_q \simeq R_1 \simeq \Lambda$ を得る．Schur 関数の積を

$$s_\mu s_\nu = \sum_{\lambda\in\mathcal{P}} c_{\mu\nu}^{\lambda} s_\lambda$$

と書くとき，$c_{\mu\nu}^{\lambda}$ を Littlewood-Richardson 係数と呼ぶ．$c_{\mu\nu}^{\lambda}$ を具体的に計算する方法が知られており，種々の観点から研究されている．$\mathrm{GL}_n(q)$ のベキ単指標の Harish-Chandra 誘導は，Littlewood-Richardson 係数を用いて

$$R_{\mathrm{GL}_m\times\mathrm{GL}_n}^{\mathrm{GL}_{m+n}}(\xi_\mu \boxtimes \xi_\nu) = \bigoplus_{\lambda\vdash m+n} c_{\mu\nu}^{\lambda}\xi_\lambda$$

と具体的に計算できることに注意しておく．

4.3 ベキ単指標と Green 関数

定義 4.8 $\mathbb{C}$-代数準同型 $B \to \Lambda$ を

$$e_n(f) \mapsto \begin{cases} e_n & (f = X-1) \\ 0 & (f \neq X-1) \end{cases}$$

により定め，同型 $\psi : A \to B$ と合成した写像を

$$\psi^{\mathrm{uni}} : A \to \Lambda$$

とする．ψ^{uni} の意味は類関数のベキ単共役類への制限である．すなわち，$\mathrm{GL}_n(q)$ 上の複素数値類関数 f に対し

$$\psi^{\mathrm{uni}}(f) = \sum_{\mu\vdash n} c_\mu \widetilde{P}_\mu(q) \quad (c_\mu \in \mathbb{C})$$

と書いたとき，c_μ は f が Jordan 標準形 μ のベキ単共役類でとる値である．

命題 4.9 次の $\mathbb{Z}$-代数同型が存在し，$\psi^{\mathrm{uni}}(\xi_\lambda) = s_\lambda$ が成立．

$$\psi^{\mathrm{uni}} : A_{\mathbb{Z}}^{\mathrm{uni}} \simeq \Lambda$$

証明　$\mathrm{GL}_n(q)$ の単位指標を triv_n とすると $\mathbb{Z}$-代数同型 $A_{\mathbb{Z}}^{\mathrm{uni}} \simeq \Lambda$ より

$$\xi_\lambda = \det(\mathrm{triv}_{\lambda_i - i + j})$$

である．よって，$\psi^{\mathrm{uni}}(\xi_\lambda) = s_\lambda$ を示すには $\psi^{\mathrm{uni}}(\mathrm{triv}_n) = h_n$ を示せば十分である．triv_n がすべての共役類の上で値 1 を取ることより

$$\psi^{\mathrm{uni}}(\mathrm{triv}_n) = \sum_{\mu \vdash n} \widetilde{P}_\mu(q)$$

になるが，補題 5.5 より $\psi^{\mathrm{uni}}(\mathrm{triv}_n) = h_n$ を得る．□

つまり，$A_{\mathbb{Z}}^{\mathrm{uni}}$ と Λ のあいだには，R_1 を経由する同型とベキ単共役類への制限を経由する同型があるが，この 2 つの同型は一致するのである．

定義 4.9　$\rho \vdash n$，$\mu \vdash n$ に対し，$Q_\rho^\mu(q) \in \mathbb{C}$ を

$$p_\rho = \sum_{\mu \vdash n} Q_\rho^\mu(q) \widetilde{P}_\mu(q) \in \Lambda$$

により定義する．

定義 4.10　$\rho \vdash n$ に対し，**ベキ単 Deligne-Lusztig 指標**を

$$R_\rho = \sum_{\lambda \vdash n} \mathrm{Tr}(c_\rho, V^\lambda) \xi_\lambda \in A^{\mathrm{uni}}$$

により定義する．

補題 4.8　$\psi^{\mathrm{uni}}(R_\rho) = p_\rho$ であり，Jordan 標準形が μ のベキ単共役類で R_ρ がとる指標値が $Q_\rho^\mu(q)$ である．

証明　まず

$$z_\rho \pi_\rho = \sum_{\lambda \vdash n} c_\rho^\lambda \chi^\lambda \quad (c_\rho^\lambda \in \mathbb{C})$$

と書いて内積を計算すると

$$c_\rho^\lambda = z_\rho \langle \pi_\rho, \chi^\lambda \rangle = \frac{z_\rho}{n!} \sum_{w \in C(\rho)} \chi^\lambda(w) = \mathrm{Tr}(c_\rho, V^\lambda)$$

であるから，命題 4.8 の同型により対称関数環 Λ に移れば等式

$$p_\rho = \sum_{\lambda \vdash n} \mathrm{Tr}(c_\rho, V^\lambda) s_\lambda$$

を得る．故に

$$\psi^{\mathrm{uni}}(R_\rho) = \sum_{\lambda \vdash n} \mathrm{Tr}(c_\rho, V^\lambda) s_\lambda = p_\rho$$

より $\psi^{\mathrm{uni}}(R_\rho) = \sum Q^\mu_\rho(q) \widetilde{P}_\mu(q)$ である． □

定義 4.11　$\lambda \vdash n$，$\mu \vdash n$ に対し，$K_{\lambda\mu}(t) \in \mathbb{Z}[t]$ を

$$s_\lambda = \sum_{\mu \vdash n} K_{\lambda\mu}(t) P_\mu \in \Lambda \bigotimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[t]$$

により定義し，**Kostka 多項式**と呼ぶ.

補題 4.9　$\mu \vdash n$，$\rho \vdash n$ とする．このとき次の等式が成立する．

$$Q^\mu_\rho(q) = \sum_{\lambda \vdash n} \mathrm{Tr}(c_\rho, V^\lambda) q^{n(\mu)} K_{\lambda\mu}(q^{-1})$$

証明　$K_{\lambda\mu}(t)$ の定義より

$$p_\rho = \sum_{\lambda \vdash n} \sum_{\mu \vdash n} \mathrm{Tr}(c_\rho, V^\lambda) K_{\lambda\mu}(t) P_\mu(X; t)$$

であるから，$t = q^{-1}$ として $\widetilde{P}_\mu(q)$ の定義を思い出せば題意の式を得る． □

定義 4.12　変数 t に関する多項式

$$Q^\mu_\rho(t) = \sum_{\lambda \vdash n} \mathrm{Tr}(c_\rho, V^\lambda) t^{n(\mu)} K_{\lambda\mu}(t^{-1})$$

を **Green 関数**と呼ぶ.

Kostka 多項式は組合せ論的に計算することができる．そのため，半標準盤 T に対して非負整数 $c(T)$ を次のように定義しよう．

T を $sh(T) = \lambda$ の半標準盤とする．このとき，T の成分を 1 行目から順に右から左に読んだものを $w(T)$ とする．例えば,

$$T = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2}\end{array}$$

ならば $w(T) = 21132$ である．次に，$w(T)$ の左端から読み始めて順番に $1, 2, \cdots$ と数字を拾っていく．ただし，右端まで行って見つからなければ左端に戻って続ける．たとえば，$w(T) = 21132$ ならばまず 2 番目の 1 を拾い，次に右端の 2 を拾い，左端に戻ってやり直すと 4 番目の 3 を拾い，これ以上大きい数はないのでこれでいったん終了する．こうして拾った数字に対し index を次の規則

- 1 に対しては 0
- i の index が r ならば，$i+1$ の index を
  - i の右にあれば r
  - i の左にあれば $r+1$

で定める．今の例だと $1, 2, 3$ と拾ったのに応じて index は $0, 0, 1$ となる．

以下，$w(T)$ から今まで拾った数字を除いてまた同じ作業を繰り返す．たとえば，今の例では 21 に対して同じことを繰り返す．すると，$1, 2$ と拾ったのに応じて index は $0, 1$ となる．$w(T)$ のすべての数字を拾った時点で作業は終わり，今までに得られた index の総和を $c(T)$ とする．今の例だと $c(T) = 2$ である．

このように定義した $c(T)$ を用いて次の Lascoux-Schützenberger の定理が成り立つ．

定理 4.2　$\lambda \vdash n$，$\mu \vdash n$ とする．このとき，

$$K_{\lambda\mu}(t) = \sum_T t^{c(T)}$$

である．ただし，T は $sh(T) = \lambda$，$(\mu_1(T), \mu_2(T), \cdots) = \mu$ をみたす半標準盤の全体を走る．とくに，Kostka 多項式は非負整数係数多項式である．

4.4 幾何学的共役類

$\mathrm{GL}_n(q)$ のベキ単既約指標以外の既約指標を理解するには幾何学的共役類の概念が必要である．

3.1 節で説明したように，$s \in \mathrm{GL}_n(q)$ を半単純元とすると，$\mathbb{F}_q^n$ を $X \mapsto s$ により $\mathbb{F}_q[X]$-加群とみなし，非負整数の組 $\{m_f\}_{f\in\mathcal{F}}$ を用いて

$$\mathbb{F}_q^n \simeq \bigoplus_{f\in\mathcal{F}} (\mathbb{F}_q[X]/(f))^{\oplus m_f}$$

と直既約分解すれば，$\mathrm{GL}_n(q)$ の半単純共役類は $(m_f)_{f\in\mathcal{F}}$ で分類されるのであった．故に，半単純共役類の代表元を与えるには $\mathbb{F}_q[X]/(f)$ のみ考えればよく，

$$f(X) = X^d + a_1X^{d-1} + \cdots + a_d$$

のとき，この代表元として

$$J(f) = \begin{pmatrix} 0 & & & -a_d \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & 0 & -a_2 \\ & & 1 & -a_1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_d(q)$$

が取れるのであった．

補題 4.10 $i = 1, 2$ に対し，$f_i \in \mathcal{F}$ が $\deg(f_i) = d$ をみたすとし，

$$m_f = \begin{cases} 1 & (f = f_i) \\ 0 & (f \neq f_i) \end{cases}$$

で定まる半単純元を $s_i \in \mathrm{GL}_d(q)$ とする．このとき，

$$T_i = \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_q[X]}(\mathbb{F}_q[X]/(f_i)) \simeq \mathbb{F}_{q^d}^\times \quad (i = 1, 2)$$

は $\mathrm{GL}_d(q)$ 中で共役である．

証明　簡単な行列の計算により

$$T_i = \left(\bigoplus_{k=0}^{d-1} \mathbb{F}_q J(f_i)^k \right) \setminus \{0\}$$

がわかり，同型 $T_i \simeq \mathbb{F}_{q^d}^\times$ は $f_1(X) = 0$ の根 α と $f_2(X) = 0$ の根 β を用いて，

$$J(f_1) \mapsto \alpha, \quad J(f_2) \mapsto \beta$$

で与えられる．そこで，$c_0, \cdots, c_{d-1} \in \mathbb{F}_q$ が存在して

$$\beta = \sum_{k=0}^{d-1} c_k \alpha^k$$

と書けることに注意して，

$$J' = \sum_{k=0}^{d-1} c_k J(f_1)^k$$

とおくと，J' と $J(f_2)$ はともに固有値が

$$\{\beta, \beta^q, \cdots, \beta^{q^{d-1}}\}$$

の $\mathrm{GL}_d(q)$ の半単純元だから，ある $h \in \mathrm{GL}_d(q)$ が存在して

$$J(f_2) = h^{-1} J' h$$

となる．故に，hT_2h^{-1} は J' と可換な $\mathrm{GL}_d(q)$ の元全体のなす部分群であるから，$T_1 \subseteq hT_2h^{-1}$ となるが，

$$|T_1| = |\mathbb{F}_{q^d}^\times| = |T_2|$$

であるから，$hT_2h^{-1} = T_1$ を得る．　□

1.3 節で定義したように，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{E})$ の極大 torus T が Frobenius 写像 F で不変，すなわち $F(T) = T$ をみたすとき，T^F を $\mathrm{GL}_n(q)$ の極大 torus と呼ぶのであった．補題 1.7 証明中で存在を示した Coxeter torus の定める $\mathrm{GL}_d(q)$ の極大 torus は

$$F(g) = g\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & \\ 0 & 1 & \ddots & & \\ & \vdots & \ddots & \ddots & \\ & & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

をみたす $g \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{E})$ を用いて

$$g\begin{pmatrix} t & & & \\ & t^q & & \\ & & \ddots & \\ & & & t^{q^{d-1}} \end{pmatrix} g^{-1} \quad (t \in \mathbb{F}_{q^d}^{\times})$$

と書ける元のなす $\mathrm{GL}_d(q)$ の部分群であるから，補題 4.10 で得られた極大 torus の $\mathrm{GL}_d(q)$-共役類はこの極大 torus の $\mathrm{GL}_d(q)$-共役類に他ならない．

定義 4.13 $\mu \vdash n$ に対し，$\deg(f_i) = \mu_i$（$i = 1, 2, \cdots$）となる $f_i \in \mathcal{F}$ をとり，

$$T_\mu(q) = \prod_{i \geq 1} \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_q[X]}(\mathbb{F}_q[X]/(f_i))$$

とおく．補題 4.10 より，$T_\mu(q)$ の $\mathrm{GL}_n(q)$-共役類は $f_i \in \mathcal{F}$ の取り方によらず一意的に定まる．この $\mathrm{GL}_n(q)$-共役類に属する極大 torus を **type μ の極大 torus** と呼ぶ．

$\mathrm{GL}_{\mu_i}(\mathbb{E})$ の Coxeter torus（$i = 1, 2, \cdots$）の直積 T_μ に対し $T_\mu(q) = T_\mu^F$ であると思ってよい．次の命題の証明は明らかであろう．

補題 4.11

(1) Frobenius 写像 $F : \mathrm{GL}_n(\mathbb{E}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{E})$ に対し，$g^{-1}F(g) = w$ をみたす $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{E})$ がかならず存在し，$T = gT_n g^{-1}$ は $\mathrm{GL}_n(q)$-共役を除いて一意的に定まる．また $F(T) = T$ である．

(2) $w \in C(\mu)$ ならば T^F は type μ の極大 torus である.

定義 4.14　$P = \mathrm{Hom}(T_n, \mathbb{E}^\times)$ を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{E})$ の weight 格子と呼ぶ.

$1 \le i \le n$ に対し $\varepsilon_i \in P$ を

$$\varepsilon_i : \begin{pmatrix} t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t_n \end{pmatrix} \mapsto t_i$$

により定めると，P は $\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n\}$ を基底とする自由 $\mathbb{Z}$-加群である．S_n は $P \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Q}$ に $w\varepsilon_i = \varepsilon_{w(i)}$ で作用する.

定義 4.15　$w \in S_n$ に対し，$\mathrm{Ad}(w) \circ F : T_n \to T_n$ を

$$\begin{pmatrix} t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t_n \end{pmatrix} \mapsto w \begin{pmatrix} t_1^q & & \\ & \ddots & \\ & & t_n^q \end{pmatrix} w^{-1}$$

により定め，$T_w(q) = T_n^{\mathrm{Ad}(w) \circ F}$ とおく．$w \in C(\mu)$ なら $T_w(q) \simeq T_\mu(q)$ である.

定義 4.16　$\mathbb{E}$-値 1 次指標 $\chi \in \mathrm{Hom}(T_w(q), \mathbb{E}^\times)$ に対し

$$N^*_{T_w(q^d)/T_w(q)}(\chi) \in \mathrm{Hom}(T_w(q^d), \mathbb{E}^\times)$$

を，$t \in T_w(q^d)$ に対し，$t \mapsto \chi(\prod_{i=0}^{d-1} (\mathrm{Ad}(w) \circ F)^i(t))$ で定める.

補題 4.12

(1) $\chi \in P$ に対し，$(\mathrm{Ad}(w) \circ F)(\chi)$ を

$$t \mapsto \chi(\mathrm{Ad}(w) \circ F(t)) \quad (t \in T_n)$$

により定めると，これは qw^{-1} に等しい．とくに群同型

$$\mathrm{Hom}(T_w(q^d), \mathbb{E}^\times) \simeq P/((qw^{-1})^d - 1)P$$

が成立.

(2) $w = (1, 2, \cdots, d)$ ならば $(qw^{-1} - 1)^{-1}P/P \simeq \mathbb{Z}/(q^d - 1)\mathbb{Z}$.

(3) 次の可換図式が成立.

$$\begin{tikzcd}
((qw^{-1})^d - 1)^{-1}P/P \arrow[r, "\sim"] & P/((qw^{-1})^d - 1)P \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Hom}(T_w(q^d), \mathbb{E}^\times) \\
((qw^{-1}) - 1)^{-1}P/P \arrow[r, "\sim"] \arrow[u, "\text{自然な埋め込み}"'] & P/((qw^{-1}) - 1)P \arrow[r, "\sim"] \arrow[u, "\frac{(qw^{-1})^d - 1}{qw^{-1} - 1}\text{倍}"'] & \mathrm{Hom}(T_w(q), \mathbb{E}^\times) \arrow[u, "N^*_{T_w(q^d)/T_w(q)}"']
\end{tikzcd}$$

証明 一般の場合も同様であるから $w = (1, 2, \cdots, d)$ のときを考える.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ad}(w) \circ F(\varepsilon_i)\left(\begin{pmatrix} t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t_d \end{pmatrix}\right) &= \varepsilon_i\left(\mathrm{Ad}(w)\begin{pmatrix} t_1^q & & \\ & \ddots & \\ & & t_d^q \end{pmatrix}\right) \\
&= \varepsilon_i\left(\begin{pmatrix} t_d^q & & & \\ & t_1^q & & \\ & & \ddots & \\ & & & t_{d-1}^q \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

であるから, $\mathrm{Ad}(w) \circ F(\varepsilon_i) = q\varepsilon_{w^{-1}(i)} = qw^{-1}(\varepsilon_i)$ となり, (1) が示された.

$w = (1, \cdots, d)$ より $qw^{-1} - 1$ は

$$\begin{cases}
\varepsilon_1 & \mapsto q\varepsilon_d - \varepsilon_1 \\
\varepsilon_2 & \mapsto q\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \\
 & \vdots \\
\varepsilon_d & \mapsto q\varepsilon_{d-1} - \varepsilon_d
\end{cases}$$

と P に作用するから, $P/(q^{-1}w - 1)P$ において

$$\varepsilon_1 \equiv q\varepsilon_d,\ \ \varepsilon_2 \equiv q\varepsilon_1 \equiv q^2\varepsilon_d, \cdots, \varepsilon_{d-1} \equiv q^{d-1}\varepsilon_d,\ \ (q^d - 1)\varepsilon_d \equiv 0$$

となり, $P/(qw^{-1} - 1)P$ は $\mathbb{Z}$ 上 ε_d で生成されている. とくに全射準同型

$$\mathbb{Z}/(q^d - 1)\mathbb{Z} \twoheadrightarrow P/(qw^{-1} - 1)P$$

を得る. ここで $P \simeq \mathbb{Z}^d$ と同一視すると $(qw^{-1} - 1)P$ の基底は

$$\begin{pmatrix} -1 & q & & \\ & -1 & \ddots & \\ & & \ddots & q \\ q & & & -1 \end{pmatrix}$$

の列ベクトルで与えられるから，この行列を列基本変形して

$$\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & -1 & \\ q & \cdots & q^{d-1} & q^d-1 \end{pmatrix}$$

の列ベクトルも基底である．故に，この行列を行基本変形して

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & q^d-1 \end{pmatrix}$$

となることより $P/(qw^{-1}-1)P \simeq \mathbb{Z}/(q^d-1)\mathbb{Z}$ を得る．同型

$$\mathrm{Hom}(T_w(q), \mathbb{E}^\times) \simeq P/(qw^{-1}-1)P$$

を示すには次が完全系列であることを示せばよい．

$$1 \longrightarrow P \overset{qw^{-1}-1}{\longrightarrow} P \longrightarrow \mathrm{Hom}(T_w(q), \mathbb{E}^\times)$$

実際これが示されれば，$P/(qw^{-1}-1)P \hookrightarrow \mathrm{Hom}(T_w(q), \mathbb{E}^\times)$ で両辺の位数を比べて同型を得る．$qw^{-1}-1$ の単射性は明らかであるから ζ を $\mathbb{F}_{q^d}^\times$ の生成元とし，$\chi \in P$ の $T_w(q)$ への制限が自明指標だとすると，

$$\chi = \sum_{i=1}^{d} n_i \varepsilon_i$$

と書いて，

$$\begin{pmatrix} \zeta & & & \\ & \zeta^q & & \\ & & \ddots & \\ & & & \zeta^{q^{d-1}} \end{pmatrix} \in T_w(q)$$

での値をとると

$$\zeta^{n_1+qn_2+\cdots+q^{d-1}n_d} = 1$$

だから，$\sum_{i=1}^{d} q^{i-1}n_i = (q^d-1)m$（$m \in \mathbb{Z}$）と書くと，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{d} n_i\varepsilon_i &= (\sum_{i=1}^{d-2} n_i\varepsilon_i) + (n_{d-1}+qn_d)\varepsilon_{d-1} + \underbrace{n_d(-q\varepsilon_{d-1}+\varepsilon_d)}_{(qw^{-1}-1)P\ \text{の元}} \\ &\equiv (\sum_{i=1}^{d-3} n_i\varepsilon_i) + (n_{d-2}+qn_{d-1}+q^2n_d)\varepsilon_{d-2} \\ &\qquad + (n_{d-1}+qn_d)\underbrace{(-q\varepsilon_{d-2}+\varepsilon_{d-1})}_{(qw^{-1}-1)P\ \text{の元}} \\ &\equiv \cdots\cdots \equiv (n_1+qn_2+\cdots+q^{d-1}n_d)\varepsilon_1 \equiv (q^d-1)m\varepsilon_1\end{aligned}$$

となるが，(2) より $(q^d-1)\varepsilon_1 \in (qw^{-1}-1)P$ であり，

$$\sum_{i=1}^{d} n_i\varepsilon_i \in (qw^{-1}-1)P$$

を得る．図式が可換であることは定義より明らかである． □

定義 4.17 帰納系

$$N^*_{T_w(q^{md})/T_w(q^m)} : \mathrm{Hom}(T_w(q^m), \mathbb{E}^\times) \to \mathrm{Hom}(T_w(q^{md}), \mathbb{E}^\times)$$

を用いて，

$$T^\vee = \varinjlim_m \mathrm{Hom}(T_w(q^m), \mathbb{E}^\times)$$

と定める．

w の位数を N とすると，$F(w) = w$ より

$$(\mathrm{Ad}(w) \circ F)^N = \mathrm{Ad}(wF(w)\cdots F^{N-1}(w)) \circ F^N = F^N$$

だから

$$T^\vee = \varinjlim_m \mathrm{Hom}(T_n(q^m), \mathbb{E}^\times)$$

となり，$T^\vee$ は w の取りかたに依らない．ここで可換図式

$$\begin{tikzcd} \frac{1}{q^m-1}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Hom}(\mathbb{F}_{q^m}^\times, \mathbb{E}^\times) \\ \frac{1}{q-1}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \arrow[r, "\sim"] \arrow[u] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Hom}(\mathbb{F}_q^\times, \mathbb{E}^\times) \arrow[u, "N^*_{\mathbb{F}_{q^m}/\mathbb{F}_q}"'] \end{tikzcd}$$

より

$$\varinjlim_m \mathrm{Hom}(\mathbb{F}_{q^m}^\times, \mathbb{E}^\times) = \varinjlim_m \frac{1}{q^m-1}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Q}_{p'}/\mathbb{Z}$$

だから，$T_n(q^m) = (\mathbb{F}_{q^m}^\times)^d$ より

$$T^\vee = \varinjlim_m \mathrm{Hom}(T_n(q^m), \mathbb{E}^\times) \simeq P \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Q}_{p'}/P$$

であり，$\mathrm{Hom}(T_w(q^m), \mathbb{E}^\times)$ は

$$((qw^{-1})^m - 1)^{-1}P/P \subseteq P \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Q}_{p'}/P$$

と同一視される．とくに，$w \in C(\mu)$ をひとつ選べば，$T_\mu(q) \simeq T_w(q)$ で，

$$\mathrm{Hom}(T_\mu(q), \mathbb{E}^\times) \simeq \mathrm{Hom}(T_w(q), \mathbb{E}^\times)$$

より，$\chi : T_\mu(q) \to \mathbb{E}^\times$ は $P \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Q}_{p'}/P$ の元を定める．

例 4.1　$\mu = (2,1)$ とする．$f(X) = X^2 - X - 1$ は $\mathbb{F}_3$ 上既約だから

$$\mathbb{F}_q^3 \simeq \mathbb{F}_q[X]/(f) \oplus \mathbb{F}_q[X]/(X-1)$$

とすると，この直既約分解は $\mathrm{GL}_3(q)$ の極大 torus $T_\mu(q)$ を定め，

$$J(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

と可換な行列を計算すれば

$$T_\mu(q) = \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_q[X]}(\mathbb{F}_q[X]/(f)) \times \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_q[X]}(\mathbb{F}_q[X]/(X-1))$$

$$= \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b & 0 \\ b & a+b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{smallmatrix} \right) \mid a, b \in \mathbb{F}_3, a^2 + ab - b^2 \neq 0, c \neq 0 \right\}$$

となる．$\mathrm{Hom}(T_\mu(q), \mathbb{E}^\times)$ の元

$$\chi_1 : T_\mu(q) \to \mathbb{E}^\times, \quad \left(\begin{smallmatrix} a & b & 0 \\ b & a+b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{smallmatrix} \right) \mapsto \det \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & a+b \end{smallmatrix} \right) = a^2 + ab - b^2$$

$$\chi_2 : T_\mu(q) \to \mathbb{E}^\times, \quad \left(\begin{smallmatrix} a & b & 0 \\ b & a+b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{smallmatrix} \right) \mapsto c$$

を考えよう．$f(X) = 0$ の根 $\zeta = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ を 1 つ固定して

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \zeta & \zeta^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおくと，

$$g^{-1} F(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であり，$w = (1,2) \in C(\mu)$ を選べば

$$T_\mu(q) = g T_w(q) g^{-1} \simeq T_w(q)$$

になる．χ_1, χ_2 は $\mathrm{Hom}(T_w(q), \mathbb{E}^\times)$ の元としては

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_1^3 & \\ & & \lambda_2 \end{pmatrix} \mapsto \lambda_1^4, \quad \lambda_2$$

だから，$P \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Q}_{p'}/P$ の元

$$(q(1,2)^{-1} - 1)^{-1} 4\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2}{2}, \quad (q(1,2)^{-1} - 1)^{-1} \varepsilon_3 = \frac{\varepsilon_3}{2}$$

を定める．他方，$\sigma = (1,3)$ に対し，$\sigma^{-1} w \sigma = (2,3) \in C(\mu)$ を選べば，

$$T_\mu(q) = g\sigma T_{\sigma^{-1} w \sigma}(q) (g\sigma)^{-1} \simeq T_{\sigma^{-1} w \sigma}(q)$$

でもあるから，χ_1, χ_2 は $\mathrm{Hom}(T_{\sigma^{-1}w\sigma}(q), \mathbb{E}^\times)$ の元としては

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_2^3 \end{pmatrix} \mapsto \lambda_2^4,\quad \lambda_1$$

なので，$P \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Q}_{3'}/P$ の元

$$(q(2,3)^{-1}-1)^{-1}4\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_2+3\varepsilon_3}{2}, \quad (q(2,3)^{-1}-1)^{-1}\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_1}{2}$$

を定める．ここで

$$\begin{cases} \dfrac{\varepsilon_2+3\varepsilon_3}{2} = \sigma^{-1}\dfrac{\varepsilon_1+3\varepsilon_2}{2} + \underbrace{(-\varepsilon_2+\varepsilon_3)}_{P\ \text{の元}} \\ \dfrac{\varepsilon_1}{2} = \sigma^{-1}\dfrac{\varepsilon_3}{2} \end{cases}$$

だから，ともに $P \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Q}_{p'}/P$ の同じ S_n-軌道に属する．

一般に，$\xi \in \mathrm{Hom}(T_\mu(q), \mathbb{E}^\times)$ は $(qw^{-1}-1)^{-1}P/P$ の S_n-軌道を定める．実際，$w \in C(\mu)$ をひとつ選べば，$\sigma \in S_n$ に対し

$$T_\mu(q) = gT_w(q)g^{-1} = g\sigma T_{\sigma^{-1}w\sigma}(q)(g\sigma)^{-1}$$

だから, ξ に対応する $\mathrm{Hom}(T_w(q), \mathbb{E}^\times)$ の元も ξ と書くと, ξ の定める $P \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Q}_{p'}/P$ の元は，$C(\mu)$ の元の取り方に応じて

$$(q\sigma^{-1}w^{-1}\sigma - 1)^{-1}\sigma^{-1}\xi \quad (\sigma \in S_n)$$

となる．故に $T^\vee \simeq P \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Q}_{p'}/P$ の中で S_n-軌道を一意的に定める．

定義 4.18　$T_\mu(q)$ を $\mathrm{GL}_n(q)$ の type μ の極大 torus とし，$P \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Q}_{p'}/P$ の中で $\xi : T_\mu(q) \to \mathbb{E}^\times$ が定める S_n-軌道を ξ の**幾何学的共役類**と呼ぶ.

$T, S \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{E})$ を $F(T) = T$，$F(S) = S$ をみたす極大 torus とする．

$$\xi : T_\mu(q) = T^F \to \mathbb{E}^\times,\ \ \eta : T_\nu(q) = S^F \to \mathbb{E}^\times$$

に対し，ある $g \in G^{F^m} = \mathrm{GL}_n(q^m)$ が存在して，

$$\begin{tikzcd}
T^{F^m} \arrow[rr, "\widetilde{\mathrm{Ad}(g)}"'] \arrow[d, "N_{F^m/F}"] & & S^{F^m} \arrow[d, "N_{F^m/F}"'] \\
T^F = T_\mu(q) \arrow[dr, "\xi"] & & S^F = T_\nu(q) \arrow[dl, "\eta"'] \\
& \mathbb{E}^\times &
\end{tikzcd}$$

となれば，m を適当にとれば T^{F^m}, S^{F^m} を共に type $(1, \cdots, 1)$ の極大 torus にすることが出来るので，$\mathrm{Ad}(g)$ で T^{F^m} と S^{F^m} を一致させると，そのあとは $\sigma \in S_n$ に対する $\mathrm{Ad}(\sigma)$ のみの違いになる．つまり ξ と η が $T^\vee$ 中の同じ S_n-軌道を定める．逆に ξ と η が $T^\vee$ の同じ S_n-軌道を定めれば，最初の可換図式が成り立つ．実は，一般の簡約代数群の場合には幾何学的共役類をこの可換図式を用いて定義するのである．この考え方によれば，$T^\vee$ も $\mathrm{GL}_n(\mathbb{E})$ の Langlands 双対の $\mathrm{GL}_n(\mathbb{E})$ の極大 torus であると考えるべきである．また，ξ が $T^\vee$ の中で S_n-軌道を定めるとは，ξ が $\mathrm{GL}_n(\mathbb{E})$ の Langlands 双対代数群の半単純共役類を定めると言っても同じである． そして，$\mathrm{GL}_n(q)$ の既約指標の分類はこの半単純共役類ごとにベキ単既約指標の分類に帰着される．これを既約指標の Jordan 分解と呼び，より一般の簡約代数群に対し成り立つ．

4.5 Deligne-Lusztig 指標

$\theta : \mathbb{E}^\times \hookrightarrow \mathbb{C}^\times$ を 1 つ固定し，$\xi \in \mathrm{Hom}(T_\mu(q), \mathbb{E}^\times)$ を 1 次指標

$$T_\mu(q) \longrightarrow \mathbb{C}^\times \simeq \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$$

と同一視する．このとき Deligne-Lusztig 指標 $R_{T_\mu}^G(\xi)$ が定義される．証明を紹介することは本書の程度を超えるが，雰囲気だけ味わっておこう．

$B_n \supseteq T_n$ を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{E})$ の標準 Borel 部分群と標準極大 torus とし，U_n を B_n のベキ単根基とする．$w \in C(\mu)$ に対し，$g^{-1}F(g) = w$ となる $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{E})$ を用いて $T = gT_ng^{-1}$ とおく．このとき，T への Frobenius 作用は T_n には $\mathrm{Ad}(w) \circ F$ で作用し，$T^F = gT_w(q)g^{-1}$ と $T_\mu(q)$ を同一視できる．

$$U = gU_n g^{-1},\quad B = TU$$

とおく．$g \mapsto g^{-1}F(g)$ で定まる写像

$$L : \mathrm{GL}_n(\mathbb{E}) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{E})$$

を Lang 写像と呼ぶ．このとき，$L^{-1}(U)$ には $h \in \mathrm{GL}_n(q)$，$t \in T_w(q)$ が

$$x \to hx(gtg^{-1}) \quad (x \in L^{-1}(U))$$

により左右から作用する．故に ℓ-進コホモロジー群の交代和

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i H_c^i(L^{-1}(U), \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

は $(\overline{\mathbb{Q}}_\ell \mathrm{GL}_n(q), \overline{\mathbb{Q}}_\ell T_w(q))$-両側加群の交代和であり，

$$R^G_{T\subseteq B}(\xi) = \frac{1}{|T_w(q)|} \sum_{t\in T_w(q)} \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i \operatorname{Tr}(t, H_c^i(L^{-1}(U), \overline{\mathbb{Q}}_\ell))\xi(gtg^{-1})^{-1}$$

は $\mathrm{GL}_n(q)$ の一般指標である．極大 torus を $T = (hg)T_n(hg)^{-1}$（$h \in \mathrm{GL}_n(q)$）に取り換えても，得られる一般指標は同じである．また，$R^G_{T\subseteq B}(\xi)$ が極大 torus T を含む Borel 部分群 B の取り方によらないことも比較的簡単にわかるので，$R^G_{T\subseteq B}(\xi)$ は $w \in S_n$ の共役類 $C(\mu)$ のみに依存する．そこで，以下では $R^G_{T\subseteq B}(\xi)$ を $R^G_{T_\mu}(\xi)$ と書く．

定義 4.19　$R^G_{T_\mu}(\xi)$ を **Deligne-Lusztig 指標**と呼ぶ．

$\mu = (\mu_1, \mu_2, \cdots) \in \mathcal{P}$ に対し

$$\varepsilon_{T_\mu} = (-1)^{\ell(\mu)},\quad \ell(\mu) = \max\{i \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \mid \mu_i > 0\}$$

かつ $\varepsilon_G = (-1)^n$ とおく．Deligne-Lusztig 理論では次の性質が基本的である．

(1) ξ の定める $T^\vee$ の元が相異なる n 個の固有値を持つとする．このとき，$\varepsilon_G \varepsilon_{T_\mu} R^G_{T_\mu}(\xi)$ は $\mathrm{GL}_n(q)$ の既約指標を与える．

(2) $T_\mu = \prod_{i\geq 1} T_{(\mu_i)}$ と Coxeter torus の直積で表わし，$\xi = \boxtimes_{i\geq 1}\xi_i$ と書くと，

$$R^G_{T_\mu}(\xi) = R^G_{L_\mu}(\boxtimes R^{\mathrm{GL}_{\mu_i}}_{T_{(\mu_i)}}(\xi_i))$$

が成り立つ．ただし，

$$G = \mathrm{GL}_n, \quad L_\mu = \prod_{i \geq 1} \mathrm{GL}_{\mu_i}$$

であり，$R^G_{L_\mu}$ は Harish-Chandra 誘導である．とくに $\mathrm{GL}_n(q)$（$n \geq 0$）の類関数のなす Hall 代数 A の中で

$$R^G_{T_\mu}(\xi) = \prod_{i \geq 1} R^{\mathrm{GL}_{\mu_i}}_{T_{(\mu_i)}}(\xi_i)$$

と書ける．

(3) $\mathrm{GL}_n(q)$ のベキ単元全体のなす集合上の類関数 Q^G_T を

$$Q^G_T(u) = R^G_T(\mathrm{triv})(u) \quad (u \text{ は } \mathrm{GL}_n(q) \text{ のベキ単元})$$

により定義すると，$g \in \mathrm{GL}_n(q)$ の Jordan 分解 $g = su = us$ に対し Deligne-Lusztig 指標の指標公式

$$R^G_T(\xi)(g) = \frac{1}{|C^0(s)^F|} \sum_{\substack{x \in G^F \\ x^{-1}sx \in T^F}} \xi(x^{-1}sx) Q^{C^0(s)}_{xTx^{-1}}(u)$$

が成り立つ．

(4) $G_{\mathrm{uni}} = \{u \in G \mid u \text{ はベキ単元}\}$ とし，

$$\tilde{G}_{\mathrm{uni}} = \{(g, xB) \in G_{\mathrm{uni}} \times G/B \mid x^{-1}gx \in B\}$$

とおくと，第 1 成分への射影

$$\pi : \tilde{G}_{\mathrm{uni}} \to G_{\mathrm{uni}}$$

は特異点解消で Springer 解消と呼ばれる．Jordan 標準形が λ のベキ単元全体のなす G-軌道を $\mathcal{O}_\lambda$ と書くとき，Borho-MacPherson の定理によれば既約 S_n-加群 V_λ が存在して

$$\pi_! \mathbb{Q}_\ell[\dim \tilde{G}_{\mathrm{uni}}] = \bigoplus IC(\overline{\mathcal{O}}_\lambda, \mathbb{Q}_\ell) \boxtimes V_\lambda$$

と分解できる．$u \in G_{\mathrm{uni}}$ に対し $\mathcal{B}_u = \pi^{-1}(u)$ とおくと，$w \in C(\mu)$ に対し

$$Q^G_{T_\mu}(u) = \sum_{i \geq 0} \mathrm{Tr}(w, H^{2i}(\mathcal{B}_u, \overline{\mathbb{Q}}_\ell))q^i$$

が成り立つ．この公式は指標層の理論を用いて得られる深い結果であり，$Q^G_{T_\mu}(u)$ が S_n-加群 $H^*(\mathcal{B}_u, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ から決まることがわかる．また，次で定義される概指標

$$R_\lambda = \frac{1}{n!} \sum_{\rho \vdash n} |C(\rho)| \,\mathrm{Tr}(c_\rho, V_\lambda) R^G_{T_\rho}(\mathrm{triv})$$

は $\mathrm{GL}_n(q)$ の場合ベキ単既約指標の完全代表系を与える．

(5) ベキ単共役類 $\mathcal{O}_\lambda$ に対し，Borho-MacPherson の定理を通じて既約 S_n-加群 V_λ が対応する．この対応を Springer 対応と呼ぶ．ベキ単共役類の誘導の概念と S_n-加群の分岐則を用いると，帰納的に V_λ を決定することができ，V_λ が Hoefsmit の表現 V^λ と同値であることがわかる．

Deligne-Lusztig 指標の基本性質 (4) より，R_λ をベキ単共役類に制限すると単純 G-同変偏屈層 $IC(\overline{\mathcal{O}}_\lambda, \mathbb{Q}_\ell)$ の特性関数になるから，ベキ単元 u に対し $R_\lambda(u) \neq 0$ ならば $u \in \overline{\mathcal{O}}_\lambda$ である．他方，補題 3.11(2) より

$$s_\lambda = \sum_{\mu \trianglelefteq \lambda} c_{\lambda\mu} \widetilde{P}_\mu(q)$$

と書けるから，命題 4.9 より $\xi_\lambda(u) \neq 0$ ならば $u \in \overline{\mathcal{O}}_\lambda$ である．以上から $R_\lambda = \xi_\lambda$ であり，Deligne-Lusztig 指標の基本性質 (5) より

$$R^G_{T_\rho}(\mathrm{triv}) = \sum_{\lambda \vdash n} \mathrm{Tr}(c_\rho, V^\lambda)\xi_\lambda$$

を得る．すなわち，$R^G_{T_\rho}(\mathrm{triv}) = R_\rho$ である．

Deligne-Lusztig 指標の性質 (2) より Coxeter torus のときを考えれば十分であるから，以下 $G = \mathrm{GL}_d(q), \mu = (d)$ として，Deligne-Lusztig 指標がどういう対称式を与えているかを見ていこう．そのため，Deligne-Lusztig 指標の指標公式を書き直す．まず，$\mathrm{GL}_n(q)$ の半単純元 s の共役類と $T^F = T_\mu(q)$ が

交わるためには，s の固有値が $\lambda, \lambda^q, \cdots, \lambda^{q^{d-1}}$ の形をしていることが必要で，λ の Frobenius 軌道が

$$\{\lambda, \lambda^q, \cdots, \lambda^{q^{a-1}}\} \quad (\lambda^{q^a} = \lambda)$$

ならば，この Frobenius 軌道の元を根にもつ a 次既約多項式を $f \in \mathcal{F}$ として，s の定める半単純共役類は直既約分解

$$\mathbb{F}_q^d \simeq (\mathbb{F}_q[X]/(f))^{\oplus \frac{d}{a}} \simeq (\mathbb{F}_{q^a})^{\oplus \frac{d}{a}}$$

により与えられる．故に

$$C^0(s)^F = \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_q[X]}(\mathbb{F}_q^d) = \mathrm{GL}_{\frac{d}{\deg(f)}}(q^{\deg(f)})$$

であるから，同型 $\psi : A \simeq B$ を用いて対称式の世界に移ると，補題 4.8 より $R_{T_\rho}^G(\mathrm{triv})$ のベキ単共役類での指標値が $Q_\rho^\mu(q)$ で与えられるから，$g = su$ の属する共役類の特性関数の ψ による像が $\widetilde{P}_\mu(f)$ になることと併せて，

$$\begin{aligned}
\psi(R_{T_{(d)}}^G(\xi)) &= \sum_{a|d} \sum_{\substack{f \in \mathcal{F} \\ \deg(f)=a}} \sum_{\substack{t \in T_\mu(q) \text{ は } s \text{ と} \\ \mathrm{GL}_d(q)\text{-共役}}} \xi(t) \sum_{\mu \vdash \frac{d}{a}} Q_{(\frac{d}{a})}^\mu (q^{\deg(f)}) \widetilde{P}_\mu(f) \\
&= \sum_{a|d} \sum_{\substack{f \in \mathcal{F} \\ \deg(f)=a}} \left(\sum_{\substack{t \in T_\mu(q) \text{ は } s \text{ と} \\ \mathrm{GL}_d(q)\text{-共役}}} \xi(t) \right) p_{\frac{d}{a}}(f)
\end{aligned}$$

となる．s と t が同じ固有値 $\{\lambda, \cdots, \lambda^{q^{d-1}}\}$ をもつのは，同型 $T_\mu(q) \simeq \mathbb{F}_{q^d}^\times$ により s と t を $\mathbb{F}_{q^d}^\times$ の元とみなして同じ既約多項式 $f \in \mathcal{F}$ の根になっているときだから，$\varepsilon_G \varepsilon_{T_\mu} = (-1)^{d-1}$ に注意すれば，さらに

$$\psi(\varepsilon_G \varepsilon_{T_{(d)}} R_{T_{(d)}}^G(\xi)) = (-1)^{d-1} \sum_{a|d} \sum_{\substack{f \in \mathcal{F} \\ \deg(f)=a}} (\sum_{\substack{t \in \mathbb{F}_{q^d}^\times \\ f(t)=0}} \xi(t)) p_{\frac{d}{a}}(f)$$

と書き直せる．次に ξ を幾何学的共役類に置き換えよう．

$g \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{E})$ を $g^{-1}F(g) = (1, 2, \cdots, d)$ をみたす元として，$T_\mu(q) \simeq \mathbb{F}_{q^d}^\times$ の指標は

$$\xi : g \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda^q & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda^{q^{d-1}} \end{pmatrix} g^{-1} \mapsto \theta(\lambda)^r \quad (\lambda \in \mathbb{F}_{q^d}^\times)$$

の形である．そして，ξ の定める幾何学的共役類は

$$(qw^{-1}-1)^{-1}r\varepsilon_1 = \frac{r}{q^d-1}(\varepsilon_1 + q^{d-1}\varepsilon_2 + \cdots + q\varepsilon_d) \in P \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Q}_{p'}/P = T^\vee$$

の S_n-軌道であるが，係数を対応させる写像

$$\xi \mapsto \frac{r}{q^d-1}$$

は S_n-軌道の代表元の選び方にはよらず，補題 4.12(2) の同型

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{F}_{q^d}^\times, \mathbb{E}^\times) \simeq \frac{\mathbb{Z}}{q^d-1}/\mathbb{Z}$$

を与えるから，ξ を $\mathbb{Q}_{p'}/\mathbb{Z}$ の元 $\dfrac{r}{q^d-1}$ だと思うことができる．

定義 4.20　$\xi \in \mathbb{Q}_{p'}/\mathbb{Z}$ の Frobenius 軌道を $\varphi = [\xi]$ と書き，この軌道に含まれる元の個数を $\deg(\varphi)$ と書く．

$\xi \in \dfrac{\mathbb{Z}}{q^d-1}/\mathbb{Z}$ ならば，d は $\deg(\varphi)$ で割り切れる．そこで

$$\xi = \frac{r}{q^{\deg(\varphi)}-1} \quad (r \in \mathbb{Z})$$

と書くと

$$\xi = \frac{r \cdot \frac{q^d-1}{q^{\deg(\varphi)}-1}}{q^d-1}$$

であるから，$t \in \mathbb{F}_{q^d}^\times$ に対して

$$\xi(t) = \theta(t^{\frac{q^d-1}{q^{\deg(\varphi)}-1}r})$$

である．故に $\xi \in \mathbb{Q}_{p'}/\mathbb{Z}$ とみなすと次の定義に到達する．

定義 4.21 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$，$\xi = \dfrac{r}{q^{\deg(\varphi)} - 1} \in \mathbb{Q}_{p'}/\mathbb{Z}$ とする．$d = m \deg(\varphi)$ として $p_m(\varphi)$ を次式により定義する．

$$p_m(\varphi) = (-1)^{d-1} \sum_{a|d} \sum_{\substack{f \in \mathcal{F} \\ \deg(f)=a}} \sum_{\substack{t \in \mathbb{F}_{q^d}^{\times} \\ f(t)=0}} \theta(t^{\frac{q^d-1}{q^{\deg(\varphi)}-1} r}) p_{\frac{d}{a}}(f)$$

すなわち，同型 $\psi : A \simeq B$ のもとで

$$p_{\frac{d}{\deg(\varphi)}}(\varphi) = \psi(\varepsilon_G \varepsilon_{T_{(d)}} R^G_{T_{(d)}}(\xi))$$

である．ここで，φ は $\mathcal{F}$ の元とも思えるから，以後はそう考えることにする．

第 5 章

指標理論と既約 cuspidal 加群の構成

5.1 Brauer 指標

G を有限群，L を（可換）体，$\overline{L}$ を L の代数閉包とする．既約 LG-加群 S に対し，$S \underset{L}{\otimes} \overline{L}$ は $\overline{L}G$-加群であるが既約になるとは限らない．たとえば，

$$\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k, \quad ij = k, jk = i, ki = j, i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

を四元数体とし，$G = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ とおくと，$\mathbb{H}$ は自然に既約 $\mathbb{R}G$-加群であるが，$\mathbb{H} \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathbb{C} \simeq \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$ は既約 $\mathbb{C}G$-加群ではない．

定義 5.1 G を有限群，$\overline{L}$ を体 L の代数閉包とする．既約 LG-加群 S に対し，$S \underset{L}{\otimes} \overline{L}$ が既約 $\overline{L}G$-加群になるとき S を**絶対既約**LG-加群とよぶ.

定義 5.2 G を有限群，L を体とする．既約 LG-加群がすべて絶対既約のとき，L を G の**分解体**という.

半単純代数の一般論より，自然数 n_i と L 上の斜体 Δ_i（$1 \leq i \leq r$）が存在して L-代数同型

$$LG/\operatorname{Rad} LG \simeq \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Mat}_{n_i}(\Delta_i)$$

が存在する．このとき，既約 LG-加群は $\varDelta_i^{n_i}$ で与えられ，$\dim_L \varDelta_i > 1$ なら $\varDelta_i^{n_i}$ は絶対既約ではないので，L が分解体であることと自然数 n_i（$1 \leq i \leq r$）が存在して L-代数同型

$$LG/\operatorname{Rad} LG \simeq \bigoplus_{i=1}^{r} \operatorname{Mat}_{n_i}(L)$$

が存在することは同値である．

補題 5.1　L を有限群 G の分解体とすると係数拡大による全単射

$$-\underset{L}{\otimes}\overline{L} : \{\text{ 既約 } LG\text{-加群の同型類 }\} \simeq \{\text{ 既約 } \overline{L}G\text{-加群の同型類 }\}$$

が存在する．

証明　L が分解体であるから自然数 n_i（$1 \leq i \leq r$）が存在して

$$LG/\operatorname{Rad} LG \simeq \bigoplus_{i=1}^{r} \operatorname{Mat}_{n_i}(L)$$

と書ける．故に $J = (\operatorname{Rad} LG) \underset{L}{\otimes} \overline{L}$ とおくと

$$\overline{L}G/J \simeq \bigoplus_{i=1}^{r} \operatorname{Mat}_{n_i}(\overline{L})$$

が成り立つから，$\overline{L}G/J$ は半単純代数でとくに $\operatorname{Rad} \overline{L}G \subseteq J$ を得る．他方 J はベキ零イデアルであるから，ある既約 $\overline{L}G$-加群 S に対して $JS = S$ とすると矛盾．つまりすべての既約 $\overline{L}G$-加群 S に対して $JS = 0$ であるから，逆の包含関係 $J \subseteq \operatorname{Rad} \overline{L}G$ が成り立つ．故に

$$\overline{L}G/\operatorname{Rad} \overline{L}G \simeq \bigoplus_{i=1}^{r} \operatorname{Mat}_{n_i}(\overline{L})$$

となり，とくに任意の既約 $\overline{L}G$-加群 $\overline{L}^{n_i}$ は既約 LG-加群 $S = L^{n_i}$ の $\overline{L}$ への係数拡大の形で書け，しかも同型でない既約加群の係数拡大は同型でない既約加群になるので題意を得る． □

標数 0 の分解体を考えよう．次で定義される自然数

$$\min\{n \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \mid \text{任意の } g \in G \text{ に対し } g^n = e\}$$

を G の**指数**とよぶのであった．ただし $e \in G$ は単位元である．このとき次の定理（Brauer の分解体定理）が成り立つ．

定理 5.1　G を有限群，n を G の指数とする．

$$\zeta = \exp(2\pi\sqrt{-1}/n) \in \overline{\mathbb{Q}}$$

とおくと $\mathbb{Q}(\zeta)$ は G の分解体である．とくに標数 0 の体 K が 1 の $|G|$ 乗根をすべて含むならば K は G の分解体である．

次に標数 ℓ の分解体を考えよう．$|G|_{\ell'} = \ell^{-\nu_\ell(|G|)}|G|$ とおく．ただし $\nu_\ell(|G|)$ は $|G|$ が ℓ で割り切れる回数である．

命題 5.1　G を有限群，n を G の指数，$n_{\ell'} = \ell^{-\nu_\ell(n)}n$ とする．標数 ℓ の体 F が $n_{\ell'}$ 乗根をすべて含むならば F は G の分解体である．とくに標数 ℓ の体 F が 1 の $|G|_{\ell'}$ 乗根をすべて含むならば F は G の分解体である．

証明　F を有限体と仮定して一般性を失わない．半単純代数の一般論より，自然数 n_i と F 上の斜体 $\varDelta_i$ が存在して，F-代数同型

$$FG/\operatorname{Rad} FG \simeq \bigoplus_{i=1}^{r} \operatorname{Mat}_{n_i}(\varDelta_i)$$

が得られるが，Wedderburn の定理より有限斜体は有限体であるので，$\varDelta_i$ はすべて F の有限次拡大体であり，最初から $F \subseteq \varDelta_i$ はともに $\mathbb{F}$ の有限部分体であるとしてよい．FG から $\operatorname{Mat}_{n_i}(\varDelta_i)$ への全射準同型写像を

$$\rho_i : FG \longrightarrow \operatorname{Mat}_{n_i}(\varDelta_i)$$

とする．ρ_i は既約 FG-加群 $\varDelta_i^{n_i}$ 上の表現行列を対応させる写像である．このとき，任意の $c \in \varDelta_i$ に対し $\operatorname{Mat}_{n_i}(\varDelta_i)$ の元

$$\begin{pmatrix} c & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

を考えると，ある FG の元の表現行列として実現できるから，この表現行列の対角成分の和を考えれば

$$c = \sum_{j=1}^{m} c_j \operatorname{Tr}(\rho_i(g_j)) \quad (c_j \in F, g_j \in G)$$

と書ける．仮定より $\rho_i(g_j)$ の固有値はすべて F に含まれることに注意すれば $\Delta_i \subseteq F$ となり，$\Delta_i = F$ が示された．以上から

$$FG/\operatorname{Rad} FG \simeq \bigoplus_{i=1}^{r} \operatorname{Mat}_{n_i}(F)$$

となり，F は G の分解体である． □

有限群のモジュラー表現では，標数 0 の体上での表現と標数 ℓ の体上での表現を関係づけて議論することが有用である．次の概念を導入しよう．

定義 5.3 R を完備離散付値環，R の商体を K，剰余体を F とするとき，K の標数が 0 で F の標数が ℓ ならば，3つ組 (K, R, F) を ℓ-**モジュラー系**とよぶ．

L を $\mathbb{Q}$ に 1 の原始 $|G|$ 乗根を添加した体とする．定理 5.1 より L は G の分解体である．$\mathcal{O}_L$ を L の整環とすると $\mathcal{O}_L$ は Dedekind 環，すなわち整閉 Noether 整域であって 0 と異なる素イデアルはすべて極大イデアルである．

定義 5.4 $\mathcal{O}$ を Dedekind 環とする．$\mathcal{O}$ の商体に含まれる $\mathcal{O}$-部分加群 $\mathfrak{a}$ がある $\mathcal{O}$ の元 $t \neq 0$ に対し $t\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}$ となるとき，$\mathfrak{a}$ を $\mathcal{O}$ の**分数イデアル**とよぶ．

たとえば，$a \in L^\times$ に対し，$\mathcal{O}_L a$ は $\mathcal{O}_L$ の分数イデアルである．Dedekind 環では次の素イデアル分解の一意性が成り立つのであった．

補題 5.2　$\mathcal{O}$ を Dedekind 環，$\mathfrak{a}$ を $\mathcal{O}$ の分数イデアルとすると，整数 e_i，極大イデアル $\mathfrak{p}_i$ （$1 \leq i \leq r$）が存在して素イデアル分解

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{p}_r^{e_r}$$

がただひとつ存在する．このとき，$e_i = \log_{\mathfrak{p}_i} \mathfrak{a}$ と書く．

以下，ℓ を含む $\mathcal{O}_L$ の素イデアル $\mathfrak{p}$ をひとつ固定し，離散付値

$$\nu_{\mathfrak{p}} : L^\times \to \mathbb{Z}$$

を $\nu_{\mathfrak{p}}(a) = \log_{\mathfrak{p}} \mathcal{O}_L a$ により定める．また，$\nu_{\mathfrak{p}}(0) = \infty$ と定める．

$R_{\mathfrak{p}} = \{a \in L \mid \nu_{\mathfrak{p}}(a) \geq 0\}$ は離散付値環で，$\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}} = \{a \in L \mid \nu_{\mathfrak{p}}(a) > 0\}$ が $R_{\mathfrak{p}}$ のただひとつの極大イデアルを与える．

定義 5.5　完備離散付値環 R を $R_{\mathfrak{p}}$ の完備化，すなわち

$$R = \varprojlim_n R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^n R_{\mathfrak{p}}$$

で定め，R の商体を K，剰余体を F とする．

F は標数 ℓ の体であるから (K, R, F) は ℓ-モジュラー系をなす．また，F は有限体である．

以上で R が 1 の $|G|$ 乗根をすべて含む ℓ-モジュラー系 (K, R, F) の存在がわかった．定理 5.1 と命題 5.1 より K，F はともに G の分解体である．

以下では R が 1 の $|G|$ 乗根をすべて含むような ℓ-モジュラー系 (K, R, F) をひとつ固定し，また R 中の 1 の原始 $|G|_{\ell'}$ 乗根 ε をひとつ固定する．自然な写像 $R \to F$ による ε の像を $\overline{\varepsilon}$ とおくと $\overline{\varepsilon}$ は 1 の原始 $|G|_{\ell'}$ 乗根である．

定義 5.6　有限群 G に対し，G の ℓ-正則元全体のなす集合を $G_{\ell'}$ と書く．

有限群 G の指標は G 上で定義された K-値類関数であるのに対し，Brauer 指標は $G_{\ell'}$ 上で定義された K-値類関数で，次のように定義される．

定義 5.7 V を $\mathbb{F}G$-加群とする．$g \in G_{\ell'}$ に対し，g の V 上の固有値は

$$\{\overline{\varepsilon}^{m_1}, \cdots, \overline{\varepsilon}^{m_d}\}$$

と書ける．このとき

$$\varphi_V(g) = \varepsilon^{m_1} + \cdots + \varepsilon^{m_d}$$

と定めると，$\varphi_V : G_{\ell'} \to K$ は類関数である．φ_V を V の **Brauer 指標**という．

$G \setminus G_{\ell'}$ 上の値を 0 と定義すれば，Brauer 指標を G 上で定義された K-値類関数と思うこともできる．

よく知られているように，有限群 G の標数 0 の代数閉体上の群代数の既約加群の同型類の個数は G の共役類の個数に等しい．次の定理はこの事実を正標数の場合に一般化したものであり，やはり Brauer によって得られた．

定理 5.2 G を有限群とする．このとき，既約 $\mathbb{F}G$-加群の同型類の個数は G の ℓ-正則共役類の個数に等しい．

証明 $\{V_1, \cdots, V_r\}$ を既約 $\mathbb{F}G$-加群の同型類の完全代表系とし，$\varphi_i = \varphi_{V_i}$ とおく．$\{\varphi_1, \cdots, \varphi_r\}$ が $G_{\ell'}$ 上の K-値類関数全体のなすベクトル空間の基底になることを示そう．

まず $\{\varphi_1, \cdots, \varphi_r\}$ が一次従属だとして矛盾を導く．必要なら分母を払えば最初からある $d_i \in R$（$1 \leq i \leq r$）が存在して，$d_1 \in R^\times$ かつ

$$\sum_{i=1}^{r} d_i \varphi_i = 0$$

として一般性を失わないのは明らかであろう．自然な写像 $R \to F$ を施せば $d_i \mapsto \beta_i$ として，$\beta_1 \neq 0$ かつ

$$\beta_1 \operatorname{Tr}_{V_1} + \sum_{j=2}^{r} \beta_j \operatorname{Tr}_{V_j} = 0$$

となる．ここで

$$\mathbb{F}G/\operatorname{Rad}\mathbb{F}G \simeq \bigoplus_{i=1}^{r} \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V_i)$$

より，$e_i \in \mathbb{F}G$ が存在して $\operatorname{Tr}_{V_j}(e_i) = \delta_{ij}$ と出来ることに注意すれば，

$$\beta_1 = \beta_1 \operatorname{Tr}_{V_1}(e_1) + \sum_{j=2}^{r} \beta_j \operatorname{Tr}_{V_j}(e_1) = 0$$

となって $\beta_1 \neq 0$ に反する．故に $\{\varphi_1, \cdots, \varphi_r\}$ は一次独立である．

$\{\varphi_1, \cdots, \varphi_r\}$ が基底になることを示すには G の ℓ-正則共役類の特性関数が $\{\varphi_1, \cdots, \varphi_r\}$ の張る部分空間に含まれることを示せばよい．$W_1, \cdots, W_m$ を既約 KG-加群の同型類の完全代表系，χ_i を W_i の指標とする．また，$\{C_1, \cdots, C_m\}$ を G の共役類の完全代表系とし，$\pi_i : G \to K$ を C_i の特性関数とする．このとき，各共役類ごとに代表元 $x_j \in C_j$ を選び $C_G(x_j)$ を x_j の中心化群として K-値関数

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\chi_i(x_j^{-1})}{|C_G(x_j)|} \chi_i$$

を考えると，第 2 直交関係式より

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\chi_i(x_j^{-1})}{|C_G(x_j)|} \chi_i(x) = \begin{cases} 1 & (x \in C_j) \\ 0 & (x \notin C_j) \end{cases}$$

であるから

$$\pi_j = \sum_{i=1}^{m} \frac{\chi_i(x_j^{-1})}{|C_G(x_j)|} \chi_i$$

を得る．ここで W_i の元 $w_i \neq 0$ をとり $L_i = RGw_i$ と置くと，R が離散付値環であることと $L_i \subseteq W_i$ より L_i は自由 R-加群であるから

$$\overline{L}_i = L_i \underset{R}{\otimes} F$$

は次元が同じ FG-加群であって，Brauer 指標の定義に戻って考えれば $\overline{L}_i$ の Brauer 指標は $\chi_i|_{G_{\ell'}}$ に等しいことがわかる．故に，$\overline{L}_i$ の組成商に現れる V_j

の回数を $d_{ij} = [\overline{L}_i : V_j]$ とすれば

$$\chi_i|_{G_{\ell'}} = \sum_{j=1}^{r} d_{ij}\varphi_j$$

となるから，$\pi_j|_{G_{\ell'}}$ も $\varphi_1, \cdots, \varphi_r$ の張る部分空間に含まれる． □

定義 5.8 H を有限群とする．p-群 P と位数が p と素な巡回群 C が存在して群同型

$$H \simeq P \times C$$

が存在するとき H を p-**基本群**とよぶ．

複素数値関数がいつ既約通常指標の整数係数一次結合に書けるかについては次の Brauer の指標定理が知られている．実は分解体定理もこの定理から導くことができる．

定理 5.3 G を有限群，f を G 上の複素数値類関数とする．f が一般指標になるための必要十分条件は任意の p-基本部分群 H に対して $\mathrm{Res}_H^G(f)$ が H の一般指標になることである．

KG-mod を有限次元 KG-加群のなす加群圏とし，FG-mod を有限次元 FG-加群のなす加群圏とする．Grothendieck 群 $K_0(KG\text{-mod})$，$K_0(FG\text{-mod})$ は各々一般指標のなす $\mathbb{Z}$-代数，Brauer 指標のなす $\mathbb{Z}$-代数と同一視できる．

$\{\varphi_1, \cdots, \varphi_r\}$ を既約 Brauer 指標の完全代表系とすると定理 5.2 の証明より

$$K_0(FG\text{-mod}) = \mathbb{Z}\varphi_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\varphi_r$$

である．標数 0 の体上の表現と標数 ℓ の体上の表現を関係づけるのが還元という操作と分解写像である．

定義 5.9 KG-加群 V に対し，RG-部分加群 V_R を

$$V_R \bigotimes_R K = V$$

をみたすようにとるとき，

$$\overline{V} = V_R \underset{R}{\otimes} F$$

を V の（$\mathbf{mod}\ \ell$）**還元**という．V_R のとり方により $\overline{V}$ は異なるが，組成因子とその重複度は V_R のとり方によらない．つまり

$$K_0(KG\text{-mod}) \longrightarrow K_0(FG\text{-mod})$$

が $[V] \mapsto [\overline{V}]$ で定義される．これを**分解写像**という．

$K_0(KG\text{-mod})$ の元を一般指標と思い，定義に戻って考えれば，分解写像は一般指標 χ に対して $\chi|_{G_{\ell'}}$ を対応させる写像であるから

$$\chi|_{G_{\ell'}} = \sum_{i=1}^{r} m_i \varphi_i$$

とかけば $m_i \in \mathbb{Z}$ が各組成因子の重複度に他ならない．とくに組成因子とその重複度は V_R のとり方によらないことがわかる．

有限群のモジュラー表現論では ℓ が $|G|$ を割り切る場合以外を考えなくてよい．その理由は次の Maschke の定理による．

定理 5.4　L を正標数の体，G を有限群とする．LG が半単純代数になるための必要十分条件は L の標数が $|G|$ を割り切らないことである．

補題 5.3　G を有限群とし，(K, R, F) を R が 1 の $|G|$ 乗根をすべて含む ℓ-モジュラー系とする．FG が半単純代数ならば分解写像は恒等写像である．すなわち，すべての既約 FG-加群は既約 KG-加群の還元で得られ，任意の FG-加群は既約 FG-加群の直和である．

証明　定理 5.2 より既約指標の完全代表系を $\{\chi_1, \cdots, \chi_r\}$ とおくことができる．Maschke の定理より F において $|G| \neq 0$ であるから中心ベキ等元

$$e_i = \frac{\chi_i(1)}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(g^{-1}) g \in FG$$

が定義される．既約 Brauer 指標の個数が既約指標の個数と等しいことより既約 FGe_i-加群はただひとつである．つまり，分解写像を考えれば，$m_i \in \mathbb{Z}$

$(1 \leq i \leq r)$ が存在して $\chi_i = m_i\varphi_i$ と書ける．ところが半単純性より

$$|G| = \sum_{i=1}^{r} \varphi_i(e)^2 \leq \sum_{i=1}^{r} \chi_i(e)^2 = |G|$$

だから $m_i = 1$ を得る．　□

つまり FG が半単純代数の場合は還元が圏同値 FG-mod $\simeq KG$-mod を与えるので，モジュラー表現を考えなくてよい．

5.2　$\mathrm{GL}_n(q)$ の一般指標 $\chi_{n,r}$ の構成

有理整数環 $\mathbb{Z}$ の素点 p による局所化を $\mathbb{Q}_{p'}$ とする．すなわち

$$\mathbb{Q}_{p'} = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid a, b \in \mathbb{Z}, p \text{ と } b \text{ は互いに素} \right\}$$

である．このとき次が成立する．

補題 5.4　群同型 $\mathbb{Q}_{p'}/\mathbb{Z} \simeq \mathbb{E}^\times$ が存在する．また，同型 $\mathbb{Q}_{p'}/\mathbb{Z} \simeq \mathbb{E}^\times$ を与えることと単射準同型 $\theta : \mathbb{E}^\times \hookrightarrow \mathbb{C}^\times$ を与えることは同値である．

証明　$n_i = (i!)_{p'}$ とおき，$\mathbb{E}$ に値をとる数列 $(\xi_i)_{i\geq 1}$ であって，

(a) $\xi_i \neq 0$ ならば ξ_i は 1 の原始 n_i 乗根，

(b) $i < j$ かつ $\xi_i \neq 0$，$\xi_j \neq 0$ ならば $\xi_j^{n_j/n_i} = \xi_i$，

をみたすもの全体のなす集合を $\mathcal{S}$ とする．また，$\xi = (\xi_i)_{i\geq 1} \in \mathcal{S}$ に対し，

$$\mathrm{Supp}(\xi) = \{ i \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \mid \xi_i \neq 0 \}$$

とする．このとき，$\xi \leq \eta$ を

$$\mathrm{Supp}(\xi) \subseteq \mathrm{Supp}(\eta) \text{ かつ } i \in \mathrm{Supp}(\xi) \text{ ならば } \xi_i = \eta_i$$

と定めることにより $\mathcal{S}$ は帰納的半順序集合である．実際，

$$\xi^{(1)} \leq \xi^{(2)} \leq \cdots$$

ならば，$\xi = (\xi_i)_{i\geq 1} \in \mathcal{S}$ を

$$\xi_i = \begin{cases} \xi_i^{(k)} & (i \in \cup_{k\geq 1} \mathrm{Supp}(\xi^{(k)})) \\ 0 & (i \notin \cup_{k\geq 1} \mathrm{Supp}(\xi^{(k)})) \end{cases}$$

で定めれば任意の k について $\xi^{(k)} \leq \xi$ である．

故に，Zorn の補題より極大元 $\xi_{\max} = (\xi_i)_{i\geq 1}$ が存在するから，

$$\mathrm{Supp}(\xi_{\max}) \neq \mathbb{Z}_{\geq 1}$$

として矛盾を導こう．

$$a = \min\{x \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \mid x \notin \mathrm{Supp}(\xi_{\max})\}$$

とする．もし $\mathrm{Supp}(\xi_{\max}) = \{1, 2, \cdots, a-1\}$ ならば，$\xi'_a \in \mathbb{E}^\times$ を

$$(\xi'_a)^{n_a/n_{a-1}} = \xi_{a-1}$$

をみたすように選び，

$$\xi' = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{a-1}, \xi'_a, 0, 0, \cdots)$$

とおけば，ξ'_a は原始 n_a 乗根であり，$i < a$ ならば

$$(\xi'_a)^{n_i/n_a} = (\xi'_a)^{\frac{n_{a-1}}{n_a}\frac{n_i}{n_{a-1}}} = \xi_{a-1}^{n_i/n_{a-1}} = \xi_i$$

が成り立つから $\xi' \in \mathcal{S}$ である．しかし，$\xi_{\max} < \xi'$ であるからこれは $\xi_{\max}$ の極大性に反する．故に $\{x \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \mid x > a, x \in \mathrm{Supp}(\xi_{\max})\} \neq \varnothing$ としてよく，

$$b = \min\{x \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \mid x > a, x \in \mathrm{Supp}(\xi_{\max})\}$$

が定義できる．$\xi'_a = \xi_b^{n_b/n_a}$ とおくと任意の $i \in \mathrm{Supp}(\xi_{\max})$ について，

- $i < a$ ならば，$(\xi'_a)^{n_a/n_i} = \xi_b^{\frac{n_b}{n_a}\frac{n_a}{n_i}} = \xi_b^{n_b/n_i} = \xi_i$
- $i > a$ ならば，$i \geq b$ に注意して，$\xi_i^{n_i/n_a} = \xi_i^{\frac{n_i}{n_b}\frac{n_b}{n_a}} = \xi_b^{n_b/n_a} = \xi'_a$

となり，ξ_a を ξ'_a に変えたものを ξ' とすれば，やはり $\xi' \in \mathcal{S}$ かつ $\xi_{\max} < \xi'$ となって矛盾する．以上から $\mathrm{Supp}(\xi_{\max}) = \mathbb{Z}_{\geq 1}$ である．

$\xi_{\max} = (\xi_i)_{i\geq 1}$ を用いて群準同型 $\mathbb{Q}_{p'}/\mathbb{Z} \to \mathbb{E}^\times$ を $s/n_i \mapsto \xi_i^s$ で定めることができる．$s/n_i \notin \mathbb{Z}$ ならば，ξ_i が 1 の原始 n_i 乗根故 $\xi_i^s \neq 1$ であるからこの写像は単射である．他方，$\mathbb{E}^\times$ の元はすべて 1 のベキ根であるからこの写像が全射であることは明らかである．以上から群同型 $\mathbb{Q}_{p'}/\mathbb{Z} \simeq \mathbb{E}^\times$ が得られた．

単射群準同型 $\theta : \mathbb{E}^\times \hookrightarrow \mathbb{C}^\times$ が与えられたとすると，対数写像と合成して

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \log \circ \theta : \mathbb{E}^\times \hookrightarrow \mathbb{C}^\times \simeq \mathbb{C}/\mathbb{Z}$$

が得られるが，この写像は $\mathbb{Q}_{p'}/\mathbb{Z}$ を経由し同型 $\mathbb{E}^\times \simeq \mathbb{Q}_{p'}/\mathbb{Z}$ を与える．逆に同型 $\mathbb{E}^\times \simeq \mathbb{Q}_{p'}/\mathbb{Z}$ が与えられたとすると，指数写像と合成して

$$\mathbb{E}^\times \simeq \mathbb{Q}_{p'}/\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{C}/\mathbb{Z} \simeq \mathbb{C}^\times$$

により $\mathbb{E}^\times \hookrightarrow \mathbb{C}^\times$ が得られる． □

G を有限群とし，準同型 $\theta : \mathbb{E}^\times \hookrightarrow \mathbb{C}^\times$ をひとつ固定する．

定理 5.5　V を $\mathbb{E}G$-加群，$\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ を V の表現とする．$g \in G$ に対して $\rho(g)$ の固有値が $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ のとき r 次基本対称式 e_r を用いて

$$\chi_r(g) = e_r(\theta(\lambda_1), \cdots, \theta(\lambda_n))$$

と定める．このとき，$\chi_r : G \to \mathbb{C}$ は一般指標である．

証明　$\overset{r}{\wedge} V$ も G の表現であり，g の $\overset{r}{\wedge} V$ における固有値は

$$\{\lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_r} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n\}$$

だから，$\overset{r}{\wedge} V$ に対する χ_1 が χ_r に等しい．よって $r = 1$ として一般性を失わない．$H = P \times C$ を G の p-基本部分群とすると，$h \in H$ は $h = g_1 g_2$ と書けて $g_1 g_2 = g_2 g_1$ かつ g_1 は p-元，g_2 は p-正則元である．すると，V 上での g_1 の固有値がすべて 1 であることと併せて $\chi_1(h) = \chi_1(g_2)$ を得るが，他方 C は位数が p と素な巡回群だから $\chi_1|_C$ は C の一般指標であり，

$$\chi_1|_H = (P \text{ の単位指標}) \otimes \chi_1|_C$$

は H の一般指標であるから，定理 5.3 より χ_1 は G の一般指標である．　□

以下，$G = \mathrm{GL}_n(q)$ として定理 5.5 を適用しよう．

定義 5.10　$\mathrm{GL}_n(\mathbb{E})$ の定義加群 $V = \mathbb{E}^n$ を $\mathrm{GL}_n(q)$ へ制限して $\mathbb{E}\,\mathrm{GL}_n(q)$-加群とみなす．この表現に対して定理 5.5 で定めた一般指標を $\chi_{n,r}$ と書く．

第 3 章の設定に戻り，A を Hall 代数，B を $\{e_n(f)\}_{n\geq 1, f\in\mathcal{F}}$ で生成される $\mathbb{C}$ 上の多項式環とする．定理 3.2 で示したように，

$$\pi_n(f) \mapsto q^{-\deg f\frac{n(n-1)}{2}} e_n(f)$$

により計量同型 $\psi : A \simeq B$ が定まるのであった．

補題 5.5　対称関数環 Λ 中で次の等式が成立．

$$h_n = \sum_{\mu\vdash n} \widetilde{P}_\mu(q)$$

証明　$\psi : A \simeq B$ は $f \in \mathcal{F}$ ごとに定まる計量同型 $\psi_f : A(f) \simeq B(f)$ から得られるのであった．ここで $\mathbb{F}_q[X]$-加群 $\{V_\lambda(f)\}_{\lambda\in\mathcal{P}}$ を

$$V_\lambda(f) = \bigoplus_{i\geq 1} \mathbb{F}_q[X]/(f^{\lambda_i})$$

で定め，$V_\lambda(f)$ の部分加群 U であって

$$U \simeq V_\mu(f),\ \ V_\lambda(f)/U \simeq V_\nu(f)$$

をみたすものの個数を $g^\lambda_{\mu\nu}(f)$ とおくとき，$\mathbb{C}$-代数 $A(f)$ は

$$A(f) = \bigoplus_{\lambda\in\mathcal{P}} \mathbb{C}u_\lambda$$

に $u_\mu u_\nu = \sum g^\lambda_{\mu\nu}(f) u_\lambda$ で積を定めたものであり，$B(f)$ は多項式環

$$B(f) = \mathbb{C}[e_1(f), e_2(f), \cdots]$$

である．また同型写像 ψ_f は

$$\psi_f : u_{(1^n)} \mapsto q^{-\deg f \frac{n(n-1)}{2}} e_n(f)$$

で与えられる．$A(f)$ は可換環で $g^\lambda_{\mu\nu}(f) = g^\lambda_{\nu\mu}(f)$ が成り立つ．

そこで，$f = X - 1$ とし，$c_\lambda \in \mathbb{Z}$ を

$$\left(\sum_{\mu \vdash a} u_\mu\right) u_{(1^b)} = \sum_{\lambda \vdash a+b} c_\lambda u_\lambda$$

により定めると，既約 $\mathbb{F}_q[X]$-加群 $S = \mathbb{F}_q[X]/(X-1)$ を用いて

$$c_\lambda = \sum_{\mu \vdash a} \#\{U \subseteq V_\lambda \mid U \simeq S^{\oplus b}, V_\lambda/U \simeq V_\mu\}$$

であるが，$\mu \vdash a$ で和をとるということは V_λ/U がどうなるかは気にしないで U を考えるということであるから，$\mathrm{Soc}\, V_\lambda$ の b 次元部分空間を数えればよく，

$$c_\lambda = \begin{bmatrix} \ell(\lambda) \\ b \end{bmatrix}_q = \prod_{i=1}^{b} \frac{q^{\ell(\lambda)-i+1} - 1}{q^{b-i+1} - 1}$$

を得る．ただし，$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots)$ に対し $\ell(\lambda) = \max\{i \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \mid \lambda_i > 0\}$ である．この計算からとくに

$$\sum_{a+b=m} (-1)^b \sum_{\mu \vdash a} u_\mu u_{(1^b)} = \sum_{\lambda \vdash m} \sum_{b=0}^{\ell(\lambda)} (-1)^b \begin{bmatrix} \ell(\lambda) \\ b \end{bmatrix}_q u_\lambda$$

であるから，定理 3.1(2) とその証明より，ψ_f を施して

$$\sum_{a+b=m} (-1)^b \sum_{\mu \vdash a} \widetilde{P}_\mu(q) e_b = \sum_{\lambda \vdash m} \sum_{b=0}^{\ell(\lambda)} (-1)^b q^{\frac{b(b-1)}{2}} \begin{bmatrix} \ell(\lambda) \\ b \end{bmatrix}_q \widetilde{P}_\lambda(q)$$

が成り立つ．ここで

$$\sum_{b=0}^{l} q^{\frac{b(b-1)}{2}} \begin{bmatrix} l \\ b \end{bmatrix}_q t^b = \prod_{i=0}^{l-1} (1 + q^i t)$$

だから，$t = -1, l = \ell(\lambda)$ として，$\ell(\lambda) > 0$ ならば

$$\sum_{b=0}^{\ell(\lambda)} (-1)^b q^{\frac{b(b-1)}{2}} \begin{bmatrix} \ell(\lambda) \\ b \end{bmatrix}_q = \prod_{i=0}^{\ell(\lambda)-1} (1 - q^i) = 0$$

であることに注意すると．$m \geq 1$ のとき

$$\sum_{a+b=m} (-1)^b \sum_{\mu \vdash a} \widetilde{P}_\mu(q) e_b = 0$$

とわかる．他方，対称関数 $h_0 = 1, h_1, h_2, \cdots$ は漸化式

$$\sum_{a+b=m} (-1)^b h_a e_b = 0 \quad (m \geq 1)$$

から定まるので，題意の $\sum_{\mu \vdash n} \widetilde{P}_\mu(q) = h_n$ を得る． □

定義 5.11　$f \in \mathcal{F}$ に対し，f の固有値が $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_d\}$ のとき $\theta(\tilde{f}) \in \mathbb{C}[T]$ を

$$\theta(\tilde{f}) = (1 + \theta(\lambda_1)T) \cdots (1 + \theta(\lambda_d)T)$$

で定める．

無限級数 $H(T, Y)$ を次のように定義しよう．ただし，$X_{i,f}$ の n 次基本対称関数が $e_n(f)$ である．

定義 5.12　$H(T, Y) = \prod_{f \in \mathcal{F}} \prod_{i \geq 1} (1 - X_{i,f}\theta(\tilde{f}) Y^{\deg f})^{-1} \in B[[T, Y]]$

このとき，$\psi(\chi_{n,r})$ は次の公式で計算できる．

命題 5.2　$H(T, Y) = \sum_{n \geq 0} \sum_{r=0}^{n} \psi(\chi_{n,r}) T^r Y^n$ が成立．

証明　$\boldsymbol{\mu} \vdash n$ の定める $\mathrm{GL}_n(q)$ の共役類を $C_{\boldsymbol{\mu}}$ とし，指標 $\chi_{n,r}$ が $C_{\boldsymbol{\mu}}$ でとる値を $\chi_{n,r}(C_{\boldsymbol{\mu}})$ と書くとき，

$$\chi_{n,r} = \sum_{\boldsymbol{\mu} \vdash n} \chi_{n,r}(C_{\boldsymbol{\mu}}) \pi_{\boldsymbol{\mu}}$$

であるから，定理 3.1(2) より

$$\psi(\chi_{n,r}) = \sum_{\boldsymbol{\mu} \vdash n} \chi_{n,r}(C_{\boldsymbol{\mu}}) \widetilde{P}_{\boldsymbol{\mu}}(q)$$

である．ここで，$g \in C_{\boldsymbol{\mu}}$ の固有値を $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ とすると，$\chi_{n,r}$ の定義より

$$\sum_{r=0}^{n} \chi_{n,r}(g) T^r = \prod_{i=1}^{n} (1 + \theta(\lambda_i) T)$$

であるから，$g \in C_{\boldsymbol{\mu}}$ の固有多項式が

$$(T - \lambda_1) \cdots (T - \lambda_n) = \prod_{f \in \mathcal{F}} f^{|\boldsymbol{\mu}(f)|}$$

と既約分解されることに注意すれば

$$\sum_{r=0}^{n} \chi_{n,r}(C_{\boldsymbol{\mu}}) T^r = \prod_{f \in \mathcal{F}} \theta(\widetilde{f})^{|\boldsymbol{\mu}(f)|}$$

を得る．故に

$$\begin{aligned}
\sum_{r=0}^{n} \psi(\chi_{n,r}) T^r &= \sum_{r=0}^{n} \sum_{\boldsymbol{\mu} \vdash n} \chi_{n,r}(C_{\boldsymbol{\mu}}) \widetilde{P}_{\boldsymbol{\mu}}(q) T^r \\
&= \sum_{\boldsymbol{\mu} \vdash n} \left(\sum_{r=0}^{n} \chi_{n,r}(C_{\boldsymbol{\mu}}) T^r \right) \widetilde{P}_{\boldsymbol{\mu}}(q) \\
&= \sum_{\boldsymbol{\mu} \vdash n} \prod_{f \in \mathcal{F}} \theta(\widetilde{f})^{|\boldsymbol{\mu}(f)|} \widetilde{P}_{\boldsymbol{\mu}}(q)
\end{aligned}$$

となるから，$\alpha : \mathcal{F} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し

$$\mathcal{P}_\alpha = \{\boldsymbol{\mu} : \mathcal{F} \to \mathcal{P} \mid |\boldsymbol{\mu}(f)| = \alpha(f) \ (f \in \mathcal{F})\}$$

と定義すれば

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq 0} \sum_{r=0}^{n} \psi(\chi_{n,r}) T^r Y^n &= \sum_{n \geq 0} \sum_{\boldsymbol{\mu} \vdash n} \prod_{f \in \mathcal{F}} \theta(\widetilde{f})^{|\boldsymbol{\mu}(f)|} \widetilde{P}_{\boldsymbol{\mu}}(q) Y^n \\
&= \sum_{\alpha} \sum_{\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{P}_\alpha} \prod_{f \in \mathcal{F}} (\theta(\widetilde{f}) Y^{\deg f})^{\alpha(f)} \widetilde{P}_{\boldsymbol{\mu}}(q) \\
&= \sum_{\alpha} (\sum_{\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{P}_\alpha} \widetilde{P}_{\boldsymbol{\mu}}(q)) \prod_{f \in \mathcal{F}} (\theta(\widetilde{f}) Y^{\deg f})^{\alpha(f)}
\end{aligned}$$

となるので，補題 5.5 より

$$\sum_{\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{P}_\alpha} \widetilde{P}_{\boldsymbol{\mu}}(q) = \prod_{f \in \mathcal{F}} h_{\alpha(f)}(f)$$

となることを用いれば

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0}\sum_{r=0}^{n}\psi(\chi_{n,r})T^rY^n &= \sum_{\alpha}\prod_{f\in\mathcal{F}}h_{\alpha(f)}(f)\prod_{f\in\mathcal{F}}(\theta(\widetilde{f})Y^{\deg f})^{\alpha(f)} \\ &= \prod_{f\in\mathcal{F}}(\sum_{\alpha(f)=0}^{\infty}h_{\alpha(f)}(f)(\theta(\widetilde{f})Y^{\deg f})^{\alpha(f)} \\ &= \prod_{f\in\mathcal{F}}\prod_{i\geq 1}(1-X_{i,f}\theta(\widetilde{f})Y^{\deg f})^{-1} = H(T,Y)\end{aligned}$$

となって題意の式が示された．□

5.3　$\mathrm{GL}_n(q)$ の通常既約指標の決定

Deligne-Lusztig 理論によれば，幾何学的共役類ごとに Lusztig 系列と呼ばれる既約指標の集合 $\mathcal{E}(G,(\xi))$ が定まり，$\mathcal{E}(G,(\xi))$ に属する既約指標の分類は ξ の中心化群の Langlands 双対のベキ単既約指標の分類に帰着する．今の場合，幾何学的共役類とは Langlands 双対の $\mathrm{GL}_n(\mathbb{E})$ で考えた半単純共役類に他ならず，Deligne-Lusztig 指標の基本性質 (4) を Lusztig 系列に対して考えると，

$$s_\lambda(\varphi)=\sum_{\rho\vdash n}\frac{1}{z_\rho}\operatorname{Tr}(c_\rho,V^\lambda)p_\rho(\varphi)$$

が既約指標を Deligne-Lusztig 指標の線形和で書いた式になる．すなわち Langlands 双対で考えた Schur 関数が既約指標を与えるのである．この描像のもとでは，次で定義する Schur 関数 $S_{\boldsymbol{\lambda}}$ が既約指標を与えることは明らかであろう．本節ではこの結果を組合せ論的議論で証明する．

定義 5.13　$\boldsymbol{\lambda}:\mathcal{F}\to\mathcal{P}$ に対し，Schur 関数 $S_{\boldsymbol{\lambda}}$ を

$$S_{\boldsymbol{\lambda}}=\prod_{\varphi\in\mathcal{F}}s_{\boldsymbol{\lambda}(\varphi)}(\varphi)\in B$$

により定義する．

$p_{\boldsymbol{\mu}}(f)$ を変数 $\{X_{i,f}\}_{i\geq 1}$ に関するベキ和対称式とし，

$$p_{\boldsymbol{\mu}} = \prod_{f \in \mathcal{F}} p_{\boldsymbol{\mu}(f)}(f) \in B$$

と定義する．$\{p_{\boldsymbol{\mu}} \mid \boldsymbol{\mu} : \mathcal{F} \to \mathcal{P}\}$ は B の基底である．B の複素共役を

$$\overline{\sum_{\boldsymbol{\mu}} c_{\boldsymbol{\mu}} p_{\boldsymbol{\mu}}} = \sum_{\boldsymbol{\mu}} \overline{c_{\boldsymbol{\mu}}} p_{\boldsymbol{\mu}} \quad (c_{\boldsymbol{\mu}} \in \mathbb{C})$$

で定義する．

補題 5.6

(1) $q_r = q_r(X;t) \in \Lambda \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Z}[t]$ を

$$\prod_{i \geq 1} \frac{1 - tX_iY}{1 - X_iY} = \sum_{r \geq 0} q_r(X;t)Y^r$$

により定義し，$\lambda \in \mathcal{P}$ に対し

$$q_\lambda = q_{\lambda_1} q_{\lambda_2} \cdots \in \Lambda \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Z}[t]$$

とする．また，$m_i(\lambda) = \#\{j \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \mid \lambda_j = i\}$ を用いて

$$b_\lambda(t) = \prod_{i \geq 1} (1-t) \cdots (1 - t^{m_i(\lambda)}) \in \mathbb{Z}[t]$$

と定め，$Q_\lambda = b_\lambda(t) P_\lambda$ とする．このとき，$a_{\lambda\mu}(t) \in \mathbb{Q}(t)$ が存在して

$$q_\lambda = Q_\lambda + \sum_{\mu \rhd \lambda} a_{\lambda\mu}(t) Q_\mu \in \Lambda \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Q}(t)$$

と書ける．

(2) 次の等式が成立.

$$\prod_{i,j \geq 1} \frac{1 - tX_iY_j}{1 - X_iY_j} = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} P_\lambda(X;t) Q_\lambda(Y;t)$$

証明 (1) を $\ell(\lambda) = \max\{i \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \mid \lambda_i > 0\}$ に関する帰納法で示す.
$\lambda = (r)$ のとき，

$$
\begin{aligned}
P_{(r)}(X_1,\cdots,X_n;t) &= \sum_{w\in S_n/S_1\times S_{n-1}} w\left(X_1^r\prod_{j=2}^{n}\frac{X_i-tX_j}{X_i-X_j}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n} X_i^r\prod_{j\neq i}\frac{X_i-tX_j}{X_i-X_j}
\end{aligned}
$$

となるから，r に関する母関数を作れば

$$
\sum_{r\geq 1} P_{(r)}(X_1,\cdots,X_n;t)Y^r = \sum_{i=1}^{n}\frac{X_iY}{1-X_iY}\prod_{j\neq i}\frac{X_i-tX_j}{X_i-X_j}
$$

である．ここで変数 Z に関する次の部分分数展開を考えれば

$$
\prod_{j=1}^{n}\frac{Z-tX_j}{Z-X_j} = 1+\sum_{i=1}^{n}(1-t)X_i\prod_{j\neq i}\frac{X_i-tX_j}{X_i-X_j}\frac{1}{Z-X_i}
$$

$Z=Y^{-1}$ として，

$$
1+\sum_{r\geq 1}(1-t)P_{(r)}(X_1,\cdots,X_n;t)Y^r = \prod_{j=1}^{n}\frac{1-tX_jY}{1-X_jY}
$$

を得る．故に $Q_{(r)}=(1-t)P_{(r)}=q_r$ であり，題意が成り立つ．

次に $\ell(\lambda)>1$ と仮定し，$\lambda_{\geq 2}=(\lambda_2,\lambda_3,\cdots)$ とおく．補題 3.11(1) より

$$
\begin{aligned}
&P_\lambda(X_1,\cdots,X_n;t)\\
&= \frac{1}{[n-\ell(\lambda)]_t!\prod_{i\geq 1}[m_i(\lambda)]_t!}\sum_{w\in S_n} w\left(X_1^{\lambda_1}\cdots X_n^{\lambda_n}\prod_{1\leq i<j\leq n}\frac{X_i-tX_j}{X_i-X_j}\right)
\end{aligned}
$$

だから，$Q_\lambda(X_1,\cdots,X_n;t)$ は

$$
\frac{(1-t)^{\ell(\lambda)}}{[n-\ell(\lambda)]_t!}\sum_{w\in S_n} w\left(X_1^{\lambda_1}\cdots X_n^{\lambda_n}\prod_{2\leq j\leq n}\frac{X_1-tX_j}{X_1-X_j}\prod_{2\leq i<j\leq n}\frac{X_i-tX_j}{X_i-X_j}\right)
$$

に等しく，これを変形すると，$Q_\lambda(X_1,\cdots,X_n;t)$ が

$$
(1-t)\sum_{w\in S_n/S_1\times S_{n-1}} w\left(X_1^{\lambda_1}\prod_{2\leq j\leq n}\frac{X_1-tX_j}{X_1-X_j}Q_{\lambda_{\geq 2}}(X_2,\cdots,X_n;t)\right)
$$

$$= (1-t)\sum_{i=1}^{n} X_i^{\lambda_1}\prod_{j\neq i}\frac{X_i - tX_j}{X_i - X_j}Q_{\lambda_{\geq 2}}(X_1,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,X_n;t)$$

に等しいことがわかる．他方，

$$\begin{aligned}\sum_{r\geq 0} q_r(X_1,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,X_n;t)Y^r &= \prod_{j\neq i}\frac{1-tX_jY}{1-X_jY}\\ &= \frac{1-X_iY}{1-tX_iY}\Big(\sum_{s\geq 0} q_s(X_1,\cdots,X_n;t)Y^s\Big)\end{aligned}$$

より

$$q_r(X_1,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,X_n;t) = \sum_{\substack{\alpha\in\{0,1\}\\ \beta\geq 0}}(-1)^\alpha t^\beta X_i^{\alpha+\beta} q_{r-\alpha-\beta}(X_1,\cdots,X_n;t)$$

となるから，$\mu_{\geq 2} = (\mu_2,\mu_3,\cdots)$ に対し

$$\begin{aligned}&q_{\mu_{\geq 2}}(X_1,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,X_n;t)\\ &\qquad = \sum_{\substack{\alpha=(\alpha_2,\alpha_3,\cdots)\\ \beta=(\beta_2,\beta_3,\cdots)\\ \alpha_i=0,1,\beta_i\geq 0}}(-1)^{|\alpha|}t^{|\beta|}X_i^{|\alpha|+|\beta|}q_{(\mu_2-\alpha_2-\beta_2,\cdots)}(X_1,\cdots,X_n;t)\end{aligned}$$

であることに注意すると

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n} X_i^{\lambda_1}\prod_{j\neq i}\frac{X_i - tX_j}{X_i - X_j}q_{\mu_{\geq 2}}(X_1,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,X_n;t)\\ &\quad = \sum_{\alpha,\beta}(-1)^{|\alpha|}t^{|\beta|}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^{\lambda_1+|\alpha|+|\beta|}\prod_{j\neq i}\frac{X_i - tX_j}{X_i - X_j}\right)q_{(\mu_2-\alpha_2-\beta_2,\cdots)}(X_1,\cdots,X_n;t)\\ &\quad = \sum_{\alpha,\beta}(-1)^{|\alpha|}t^{|\beta|}P_{(\lambda_1+|\alpha|+|\beta|)}(X_1,\cdots,X_n;t)q_{(\mu_2-\alpha_2-\beta_2,\cdots)}(X_1,\cdots,X_n;t)\\ &\qquad\qquad = \sum_{\alpha,\beta}\frac{(-1)^{|\alpha|}t^{|\beta|}}{1-t}q_{(\lambda_1+|\alpha|+|\beta|,\mu_2-\alpha_2-\beta_2,\cdots)}(X_1,\cdots,X_n;t)\end{aligned}$$

となるが，$Q_{\lambda_{\geq 2}}(X_1,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,X_n;t)$ に $q_{\mu_{\geq 2}}(X_1,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,X_n;t)$ が現れるのは帰納法の仮定より $\mu_{\geq 2}\trianglerighteq\lambda_{\geq 2}$ のときに限るから，$Q_\lambda(X_1,\cdots,X_n;t)$ に $q_\mu(X_1,\cdots,X_n;t)$ が現れるならば μ は

$$\mu = (\lambda_1 + |\alpha| + |\beta|, \mu_2 - \alpha_2 - \beta_2, \mu_3 - \alpha_3 - \beta_3, \cdots)$$

の形であり，とくに $\mu \trianglerighteq \lambda$ の項しか現れない．以上から

$$Q_\lambda = a'_{\lambda\lambda}(t) q_\lambda + \sum_{\mu \triangleright \lambda} a'_{\lambda\mu}(t) q_\mu \quad (a'_{\lambda\mu}(t) \in \mathbb{Q}(t))$$

と書けるが，$\mu = \lambda$ になるのは $|\alpha| = |\beta| = 0, \mu_{\geq 2} = \lambda_{\geq 2}$ のときに限るから $a'_{\lambda\lambda}(t) = 1$ である．故にこの式を逆に解いて (1) を得る．

(2) を示すため，まず

$$\prod_{i,j \geq 1} \frac{1 - tX_iY_j}{1 - X_iY_j} = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} q_\lambda(X;t) m_\lambda(Y) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} m_\lambda(X) q_\lambda(Y;t)$$

と書こう．ただし，$m_\lambda(X)$ は

$$m_\lambda(X) = \sum_{\sigma \in S_\infty} X_{\sigma(1)}^{\lambda_1} X_{\sigma(2)}^{\lambda_2} \cdots = P_\lambda(X;0)$$

で定義され，単項対称関数と呼ばれる．$\{m_\lambda\}_{\lambda \in \mathcal{P}}$ は Λ の $\mathbb{Z}$ 上の基底をなすから，

$$q_\lambda = \sum_{\mu \in \mathcal{P}} c_{\lambda\mu}(t) m_\mu \quad (c_{\lambda\mu}(t) \in \mathbb{Z}[t])$$

と書けて，

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{P}} q_\lambda(X;t) m_\lambda(Y) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} m_\lambda(X) q_\lambda(Y;t)$$

より $c_{\lambda\mu}(t) = c_{\mu\lambda}(t)$ である．次に

$$\begin{cases} q_\lambda = \sum_{\mu \in \mathcal{P}} a_{\lambda\mu}(t) Q_\mu & (a_{\lambda\mu}(t) \in \mathbb{Q}(t)) \\ m_\lambda = \sum_{\mu \in \mathcal{P}} b_{\lambda\mu}(t) Q_\mu & (b_{\lambda\mu}(t) \in \mathbb{Q}(t)) \end{cases}$$

と書く．すると，行列

$$A = (a_{\lambda\mu}(t))_{\lambda,\mu \in \mathcal{P}}, \;\; B = (b_{\lambda\mu}(t))_{\lambda,\mu \in \mathcal{P}}, \;\; C = (c_{\lambda\mu}(t))_{\lambda,\mu \in \mathcal{P}}$$

に対し $A = CB$ が成り立つ．ここで，補題 3.11(2) より

$$P_\lambda = s_\lambda + \sum_{\mu \lhd \lambda} u_{\lambda\mu}(t) s_\mu \quad (u_{\lambda\mu}(t) \in \mathbb{Z}[t])$$

の形であり，またこの式を逆に解けば

$$s_\lambda = P_\lambda + \sum_{\mu \lhd \lambda} v_{\lambda\mu}(t) P_\mu \quad (v_{\lambda\mu}(t) \in \mathbb{Z}[t])$$

となるから，$t=1$ とおけば

$$s_\lambda = m_\lambda + \sum_{\mu \lhd \lambda} K_{\lambda\mu} m_\mu \quad (K_{\lambda\mu} \in \mathbb{Z})$$

も得られる．この２式より

$$Q_\lambda = b_\lambda(t) P_\lambda = b_\lambda(t) m_\lambda + \sum_{\mu \lhd \lambda} b'_{\lambda\mu}(t) m_\mu \quad (b'_{\lambda\mu}(t) \in \mathbb{Z}[t])$$

と書けるから，この式を逆に解いて

$$m_\lambda = b_\lambda(t)^{-1} Q_\lambda + \sum_{\mu \lhd \lambda} b_{\lambda\mu}(t) Q_\mu$$

を得る．$D = {}^tBA$ とおくと，$A = CB$ かつ C は対称行列なので，$D = {}^tBCB$ も対称行列である．そこで D の (λ, μ) 成分を $d_{\lambda\mu}(t)$ とすると，(1) と併せて

$$d_{\lambda\mu}(t) = \sum_{\lambda \unlhd \nu \unlhd \mu} b_{\nu\lambda}(t) a_{\nu\mu}(t)$$

となるから D は三角行列であるが，他方 D は対称行列なので D は対角行列である．また，対角成分は $d_{\lambda\lambda}(t) = b_\lambda(t)^{-1}$ である．故に

$$\begin{aligned}
\prod_{i,j \geq 1} \frac{1 - tX_iY_j}{1 - X_iY_j} &= \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} q_\lambda(X;t) m_\lambda(Y) \\
&= \sum_{\lambda,\mu,\nu \in \mathcal{P}} a_{\lambda\mu}(t) b_{\lambda\nu}(t) Q_\mu(X;t) Q_\nu(Y;t) \\
&= \sum_{\mu,\nu \in \mathcal{P}} d_{\nu\mu}(t) Q_\mu(X;t) Q_\nu(Y;t) \\
&= \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} P_\lambda(X;t) Q_\lambda(Y;t)
\end{aligned}$$

を得る． □

補題 5.6 の証明に現れた $K_{\lambda\mu}$ は実は Kostka 数，すなわち

$$sh(T) = \lambda,\ \ (\mu_1(T), \mu_2(T), \cdots) = \mu$$

をみたす半標準盤の数に等しい．さて，この補題 5.6 より次の系が得られる．

系 5.1　次の等式が成立.

$$\prod_{i,j\geq 1} \frac{1 - X_iY_j}{1 - qX_iY_j} = \sum_{\lambda\in\mathcal{P}} \widetilde{P}_\lambda(X;q)\widetilde{Q}_\lambda(Y;q)$$

証明　補題 5.6(2) の式に $t = q^{-1}, X_i \mapsto qX_i$ と代入すると，

$$\begin{aligned}\prod_{i,j\geq 1} \frac{1 - X_iY_j}{1 - qX_iY_j} &= \sum_\lambda q^{|\lambda|} P_\lambda(X;q^{-1})Q_\lambda(Y;q^{-1}) \\ &= \sum_\lambda q^{-n(\lambda)} P_\lambda(X;q^{-1}) q^{|\lambda|+2n(\lambda)} q^{-n(\lambda)} b_\lambda(q^{-1}) P_\lambda(Y;q^{-1})\end{aligned}$$

であるから，$a_\lambda(q) = q^{|\lambda|+2n(\lambda)} b_\lambda(q^{-1})$ として

$$\begin{cases} \widetilde{P}_\lambda(q) = q^{-n(\lambda)} P_\lambda(X;q^{-1}) \\ \widetilde{Q}_\lambda(q) = a_\lambda(q)\widetilde{P}_\lambda(q) \end{cases}$$

と定義されていたことに注意すれば題意の式を得る．　□

命題 5.3　$\{S_{\boldsymbol{\lambda}} \mid \boldsymbol{\lambda} : \mathcal{F} \to \mathcal{P}\}$ は B の正規直交基底を与える.

証明　$\displaystyle\prod_{i,j\geq 1} \frac{1}{1 - X_iY_j} = \sum_\lambda s_\lambda(X)s_\lambda(Y)$ より

$$\log(\sum_\lambda s_\lambda \otimes s_\lambda) = \sum_{m\geq 1} \frac{1}{m} p_m \otimes p_m$$

であるから，$S_{\boldsymbol{\lambda}} = \displaystyle\prod_{\varphi\in\mathcal{F}} s_{\boldsymbol{\lambda}(\varphi)}(\varphi)$ より

$$\log(\sum_{\boldsymbol{\lambda}} S_{\boldsymbol{\lambda}} \otimes \overline{S_{\boldsymbol{\lambda}}}) = \sum_{m\geq 1}\sum_{\varphi\in\mathcal{F}} \frac{1}{m} p_m(\varphi) \otimes \overline{p_m(\varphi)}$$

となる．$d = m\deg(\varphi)$ とおけば $\xi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{F}_{q^d}^\times, \mathbb{C}^\times)$ を Frobenius 軌道 φ を与える 1 次指標として

$$p_m(\varphi) = (-1)^{d-1}\sum_{a|d}\sum_{\substack{f\in\mathcal{F}\\ \deg(f)=a}}\sum_{\substack{t\in\mathbb{F}_{q^d}^\times\\ f(t)=0}}\xi(t)p_{\frac{d}{a}}(f)$$

であったから，$f(t)=0$ をみたす $t \in \mathbb{F}_{q^d}^\times$ に対して $\widetilde{p}_d(t) = p_{\frac{d}{a}}(f)$ とおくと

$$p_m(\varphi) = (-1)^{d-1}\sum_{t\in\mathbb{F}_{q^d}^\times}\xi(t)\widetilde{p}_d(t)$$

となり，また，$\xi \in \varphi$ に対し $\widetilde{p}_d(\xi) = p_m(\varphi)$ とおくと

$$\sum_{\substack{\varphi\in\mathcal{F}\\ \deg(\varphi)|d}}\frac{\deg(\varphi)}{d}p_{\frac{d}{\deg(\varphi)}}(\varphi)\otimes\overline{p_{\frac{d}{\deg(\varphi)}}(\varphi)} = \sum_{\xi\in\mathrm{Hom}(\mathbb{F}_{q^d}^\times,\mathbb{C}^\times)}\frac{1}{d}\widetilde{p}_d(\xi)\otimes\overline{\widetilde{p}_d(\xi)}$$

となるから，$(\varphi, m) \mapsto (\varphi, m\deg(\varphi))$ により定まる全単射

$$\mathcal{F}\times\mathbb{Z}_{\geq 1} \simeq \{(\varphi, d)\in\mathcal{F}\times\mathbb{Z}_{\geq 1} \mid \deg(\varphi)|d\}$$

を用いて

$$\sum_{m\geq 1}\sum_{\varphi\in\mathcal{F}}\frac{1}{m}p_m(\varphi)\otimes\overline{p_m(\varphi)} = \sum_{d\geq 1}\sum_{\substack{\varphi\in\mathcal{F}\\ \deg(\varphi)|d}}\frac{\deg(\varphi)}{d}p_{\frac{d}{\deg(\varphi)}}(\varphi)\otimes\overline{p_{\frac{d}{\deg(\varphi)}}(\varphi)}$$

と書き換えれば，これは

$$\sum_{d\geq 1}\sum_{x,y\in\mathbb{F}_{q^d}^\times}\frac{1}{d}\left(\sum_{\xi\in\mathrm{Hom}(\mathbb{F}_{q^d}^\times,\mathbb{C}^\times)}\xi(x)\overline{\xi(y)}\right)\widetilde{p}_d(x)\otimes\widetilde{p}_d(y)$$

に等しく，$\mathbb{F}_{q^d}^\times$ の既約指標に関する第 2 直交関係式より

$$\sum_{m\geq 1}\sum_{\varphi\in\mathcal{F}}\frac{1}{m}p_m(\varphi)\otimes\overline{p_m(\varphi)} = \sum_{d\geq 1}\sum_{t\in\mathbb{F}_{q^d}^\times}\frac{q^d-1}{d}\widetilde{p}_d(t)\otimes\widetilde{p}_d(t)$$

を得る．他方，系 5.1 より，任意の $f \in \mathcal{F}$ に対して対称式環 $\Lambda(f)$ に関する恒等式

$$\sum_{\mu \in \mathcal{P}} \widetilde{P}_{\mu}(q^{\deg(f)}) \otimes \widetilde{Q}_{\mu}(q^{\deg(f)}) = \prod_{i,j \geq 1} \frac{1 - X_{i,f} \otimes X_{j,f}}{1 - q^{\deg(f)} X_{i,f} \otimes X_{j,f}}$$

が成り立つので，

$$\sum_{\boldsymbol{\mu}} \widetilde{P}_{\boldsymbol{\mu}}(q) \otimes \widetilde{Q}_{\boldsymbol{\mu}}(q) = \prod_{f \in \mathcal{F}} \left(\sum_{\mu \in \mathcal{P}} \widetilde{P}_{\mu}(q^{\deg(f)}) \otimes \widetilde{Q}_{\mu}(q^{\deg(f)}) \right)$$

に注意すれば，$\log(\sum_{\boldsymbol{\mu}} \widetilde{P}_{\boldsymbol{\mu}}(q) \otimes \widetilde{Q}_{\boldsymbol{\mu}}(q))$ は

$$\begin{aligned} &\sum_{f \in \mathcal{F}} \left(- \sum_{n \geq 1} \sum_{i,j \geq 1} \frac{1}{n} X_{i,f}^n \otimes X_{j,f}^n + \sum_{n \geq 1} \sum_{i,j \geq 1} \frac{1}{n} q^{n \deg(f)} X_{i,f}^n \otimes X_{j,f}^n \right) \\ &\qquad = \sum_{f \in \mathcal{F}} \sum_{n \geq 1} \frac{q^{n \deg(f)} - 1}{n} p_n(f) \otimes p_n(f) \end{aligned}$$

に等しい．そこで，全単射 $(f, n) \mapsto (f, n \deg(f))$ により書き換えれば

$$\begin{aligned} \log(\sum_{\boldsymbol{\mu}} \widetilde{P}_{\boldsymbol{\mu}}(q) \otimes \widetilde{Q}_{\boldsymbol{\mu}}(q)) &= \sum_{d \geq 1} \sum_{\substack{f \in \mathcal{F} \\ \deg(f) \mid d}} \frac{(q^d - 1)\deg(f)}{d} p_{\frac{d}{\deg(f)}}(f) \otimes p_{\frac{d}{\deg(f)}}(f) \\ &= \sum_{d \geq 1} \sum_{t \in \mathbb{F}_{q^d}^{\times}} \frac{q^d - 1}{d} \widetilde{p}_d(t) \otimes \widetilde{p}_d(t) \end{aligned}$$

となるから，

$$\sum_{\boldsymbol{\lambda}} S_{\boldsymbol{\lambda}} \otimes \overline{S_{\boldsymbol{\lambda}}} = \sum_{\boldsymbol{\mu}} \widetilde{P}_{\boldsymbol{\mu}}(q) \otimes \widetilde{Q}_{\boldsymbol{\mu}}(q)$$

となり，$\langle S_{\boldsymbol{\lambda}}, S_{\boldsymbol{\mu}} \rangle = \delta_{\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\mu}}$ を得る．　□

定義 5.14　$A_{\mathbb{Z},n}$ を $\mathrm{GL}_n(q)$ の一般指標のなす自由 $\mathbb{Z}$-加群とし，

$$A_{\mathbb{Z}} = \bigoplus_{n \geq 0} A_{\mathbb{Z},n}$$

とおく．また，$B_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}[\{e_n(\varphi)\}_{n \geq 1, \varphi \in \mathcal{F}}]$，すなわち

$$B_{\mathbb{Z}} = \bigoplus_{\boldsymbol{\lambda}} \mathbb{Z} S_{\boldsymbol{\lambda}}$$

と定める．

定理 5.6 $\mathbb{C}$-代数同型 $\psi : A \simeq B$ は $\mathbb{Z}$-代数同型 $A_{\mathbb{Z}} \simeq B_{\mathbb{Z}}$ を誘導する．

証明 $e_n(\varphi) \in \psi(A_{\mathbb{Z}})$ が示せれば十分である．実際，これが言えれば

$$S_{\boldsymbol{\lambda}} = \prod_{\varphi \in \mathcal{F}} s_{\boldsymbol{\lambda}(\varphi)}(\varphi), \quad s_{\boldsymbol{\lambda}(\varphi)}(\varphi) \in \mathbb{Z}[e_1(\varphi), e_2(\varphi), \cdots]$$

より，ある $\xi_{\boldsymbol{\lambda}} \in A_{\mathbb{Z}}$ が存在して $S_{\boldsymbol{\lambda}} = \psi(\xi_{\boldsymbol{\lambda}})$ と書けるから，

$$\langle \xi_{\boldsymbol{\lambda}}, \xi_{\boldsymbol{\mu}} \rangle = \langle S_{\boldsymbol{\lambda}}, S_{\boldsymbol{\mu}} \rangle = \delta_{\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\mu}}$$

より符号を除いて $\xi_{\boldsymbol{\lambda}}$ は既約指標で，

$$\{\xi_{\boldsymbol{\lambda}} \mid \boldsymbol{\lambda} : \mathcal{F} \to \mathcal{P}\}$$

は $A_{\mathbb{Z}}$ の $\mathbb{Z}$-加群としての基底を与える．故に $\psi(A_{\mathbb{Z}}) = B_{\mathbb{Z}}$ となり，ψ は計量同型なので同型 $\psi : A_{\mathbb{Z}} \simeq B_{\mathbb{Z}}$ を得る．故に以下では $e_n(\varphi) \in \psi(A_{\mathbb{Z}})$ を示す．

まず，$\deg(\varphi) = d$ かつ $\xi \in \mathbb{Q}_{p'}/\mathbb{Z}$ に対し $\varphi = [\xi]$ とし，

$$\xi = \frac{r}{q^d - 1}$$

と書けば，ξ は $n = md$ に対し $\mathrm{Hom}(\mathbb{F}_{q^n}^{\times}, \mathbb{C}^{\times})$ の元

$$x \mapsto \theta^r(x^{\frac{q^n-1}{q^d-1}}) \quad (x \in \mathbb{F}_{q^n}^{\times})$$

を定め，$x \in \mathbb{F}_{q^n}^{\times}$ が $f \in \mathcal{F}$ の根のとき $\widetilde{p}_n(x) = p_{\frac{n}{\deg(f)}}(f)$ として

$$p_m(\varphi) = (-1)^{n-1} \sum_{x \in \mathbb{F}_{q^n}^{\times}} \theta^r(x^{\frac{q^n-1}{q^d-1}}) \widetilde{p}_n(x)$$

である．定理 5.5 を $\theta^r : \mathbb{E}^{\times} \to \mathbb{C}^{\times}$ に対して適用し，

$$H(T, Y) = \prod_{f \in \mathcal{F}} \prod_{i \geq 1} (1 - X_{i,f} \theta^r(\widetilde{f}) Y^{\deg(f)})^{-1} \in B[[T, Y]]$$

とおくと，命題 5.2 より $H(T,Y)$ の T^aY^b の係数は $\psi(A_{\mathbb{Z}})$ の元である．

$F:\mathbb{E}\to\mathbb{E}$ を Frobenius 写像 $x\mapsto x^q$ とすると，$\deg(f)=d$ のとき $f\in\mathcal{F}$ の根は $\{x,Fx,\cdots,F^{d-1}x\}$ と書けるから

$$\theta^r(\widetilde{f})^m=\prod_{i=0}^{md-1}(1+\theta^r(F^ix)T)$$

である．故に，

$$\begin{aligned}\log H(T,Y)&=-\sum_{f\in\mathcal{F}}\sum_{i\geq 1}\log(1-X_{i,f}\theta^r(\widetilde{f})Y^{\deg(f)})\\&=\sum_{m\geq 1}\frac{1}{m}\sum_{f\in\mathcal{F}}\theta^r(\widetilde{f})^m p_m(f)Y^{m\deg(f)}\\&=\sum_{n\geq 1}\sum_{\substack{f\in\mathcal{F}\\ \deg(f)\mid n}}\frac{\deg(f)}{n}\prod_{i=0}^{n-1}(1+\theta^r(F^ix)T)p_{\frac{n}{\deg(f)}}(f)Y^n\\&=\sum_{n\geq 1}\sum_{x\in\mathbb{F}_{q^n}^\times}\frac{1}{n}\prod_{i=0}^{n-1}(1+\theta^r(F^ix)T)\widetilde{p}_n(x)Y^n\end{aligned}$$

を得る．ここで

$$\prod_{i=0}^{n-1}(1+\theta^r(F^ix)T)=\sum_{I\subseteq\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}T^{|I|}\prod_{i\in I}\theta^r(F^ix)$$

である．$\mathrm{Hom}(\mathbb{F}_{q^n}^\times,\mathbb{C}^\times)$ と $\mathrm{Hom}(\mathbb{F}_{q^n}^\times,\mathbb{E}^\times)$ を θ により同一視し，

$$\xi_{n,I}:x\mapsto\prod_{i\in I}(F^ix)^r\quad(x\in\mathbb{F}_{q^n}^\times)$$

により $\xi_{n,I}\in\mathrm{Hom}(\mathbb{F}_{q^n}^\times,\mathbb{E}^\times)$ を定義しよう．

$$\xi_{d,\{0\}}:x\mapsto x^r\quad(x\in\mathbb{F}_{q^d}^\times)$$

は ξ が定める $\mathrm{Hom}(\mathbb{F}_{q^d}^\times,\mathbb{E}^\times)$ の元である．n の約数 $s=s_{n,I}$ を

$$s\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}=\{i\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\mid I+i=I\}$$

で定めると，$\xi_{n,I}$ の Frobenius 軌道は $\{\xi_{n,I},\xi_{n,I+1},\cdots,\xi_{n,I+s-1}\}$ であり，$J\subseteq\mathbb{Z}/s\mathbb{Z}$ がただひとつ存在して $I=(J+s\mathbb{Z})/n\mathbb{Z}$ と書ける．そして，

$$\begin{cases} \xi_{n,I} = N^*_{\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_{q^s}}(\xi_{s,J}) \\ \xi_{n,I+1} = N^*_{\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_{q^s}}(\xi_{s,J+1}) \\ \quad \cdots \\ \xi_{n,I+s-1} = N^*_{\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_{q^s}}(\xi_{s,J+s-1}) \end{cases}$$

より $\xi_{s,J}$ は $\mathbb{Q}_{p'}/\mathbb{Z}$ 中で $\xi_{n,I}$ と同じ Frobenius 軌道を定める．そこで

$$[J] = \{J, J+1, \cdots, J+s-1\}$$

と定義し，$\xi_{n,I}$ が $\mathbb{Q}_{p'}/\mathbb{Z}$ 中で定める Frobenius 軌道を $\varphi_{[J]}$ と書く．とくに，$s = \deg(\varphi_{[J]})$ である．逆に s が n の約数のとき，

$$J, J+1, \cdots, J+s-1$$

がすべて相異なる $J \subseteq \mathbb{Z}/s\mathbb{Z}$ に対し $\xi_{s,J}$ を考えれば $\xi_{n,I}$ を復元できる．故に，

$$\begin{aligned} \log H(T,Y) &= \sum_{n\geq 1}\sum_{I\subseteq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}\sum_{x\in\mathbb{F}_{q^n}^\times} \frac{1}{n}\xi_{n,I}(x)\widetilde{p}_n(x)T^{|I|}Y^n \\ &= \sum_{n\geq 1}\sum_{[I]}\sum_{x\in\mathbb{F}_{q^n}^\times} \frac{s_{n,I}}{n}\xi_{n,I}(x)\widetilde{p}_n(x)T^{|I|}Y^n \\ &= \sum_{n\geq 1}\sum_{s|n}\frac{s}{n}\sum_{\substack{[J] \\ \deg(\varphi_{[J]})=s}}\left(\sum_{x\in\mathbb{F}_{q^n}^\times}\xi_{n,I}(x)\widetilde{p}_n(x)\right)T^{\frac{n}{s}|J|}Y^n \\ &= \sum_{n\geq 1}\sum_{s|n}\frac{s}{n}\sum_{\substack{[J] \\ \deg(\varphi_{[J]})=s}}(-1)^{n-1}p_{\frac{n}{s}}(\varphi_{[J]})T^{\frac{n}{s}|J|}Y^n \\ &= -\sum_{s\geq 1}\sum_{\substack{[J] \\ \deg(\varphi_{[J]})=s}}\sum_{m\geq 1}\frac{1}{m}p_m(\varphi_{[J]})((-Y)^sT^{|J|})^m \end{aligned}$$

と変形できる．ここで

$$\begin{aligned} -\sum_{m\geq 1}\frac{1}{m}p_m(X)t^m &= \sum_{m\geq 1} -\frac{1}{m}(X_1^m + X_2^m + \cdots)t^m \\ &= \sum_{i\geq 1}\log(1-X_it) = \log(\sum_{m\geq 0}e_m(X)(-t)^m) \end{aligned}$$

であるから

$$\log H(T,Y)=\sum_{s\geq 1}\sum_{\substack{[J]\\ \deg(\varphi_{[J]})=s}}\log(\sum_{m\geq 0}e_m(\varphi_{[J]})((-1)^{s-1}Y^sT^{|J|})^m)$$

となり，

$$H(T,Y)=\prod_{s\geq 1}\prod_{\substack{[J]\\ \deg(\varphi_{[J]})=s}}\left(\sum_{m\geq 0}e_m(\varphi_{[J]})((-1)^{s-1}Y^sT^{|J|})^m\right)$$

を得る．とくに，T^nY^{nd} の係数 $\psi(\chi_{nd,n})$ は

$$\psi(\chi_{nd,n})=\sum_{v:\{(s,[J])\}\to\mathbb{Z}_{\geq 0}}\pm\prod_{(s,[J])}e_{v(s,[J])}(\varphi_{[J]})$$

である．ただし和は

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{(s,[J])}sv(s,[J])=nd\\ \displaystyle\sum_{(s,[J])}|J|v(s,[J])=n\end{cases}$$

を走る．ここで $J=\{0\}\subseteq\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ とすると，$(s,[J])=(d,\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})$ であり，$\xi_{d,J}$ が ξ の定める $\mathrm{Hom}(\mathbb{F}_{q^d}^\times,\mathbb{E}^\times)$ の元であることより $\varphi_{[J]}=\varphi$ となるから，

$$\psi(\chi_{nd,n})=\pm e_n(\varphi)+\cdots$$

であって，他の項は $v(s,[J])<n$ 又は $v(s,[J])=n,\deg(\varphi_{[J]})<d$ である．実際，$v(s,[J])=n$ かつ $\deg(\varphi_{[J]})=d$ ならば，$|J|=1$ かつ $[J]=\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ である．故に，$\mathbb{Z}_{\geq 0}\times\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 上の全順序を

$$n<n' \text{ 又は } n=n',d\leq d'$$

のとき $(n,d)\leq(n',d')$ と定義することにより，$e_n(\varphi)\in\psi(A_{\mathbb{Z}})$ が $(n,\deg(\varphi))$ に関する帰納法で示される．　□

定義 5.15　Young 図形 λ に対し，$x=(i,j)$ が $1\leq i\leq\ell(\lambda),1\leq j\leq\lambda_i$ をみたすとき $x\in\lambda$ と書く．このとき $h(x)\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$ を

$$h(x) = \lambda_i + {}^t\lambda_j - i - j + 1$$

で定義する.

定理 5.7 同型 $\psi : A_n \simeq B_n$ のもとで $\xi_{\boldsymbol{\lambda}} \mapsto S_{\boldsymbol{\lambda}}$ とすると, $\xi_{\boldsymbol{\lambda}}$ は $\mathrm{GL}_n(q)$ の既約指標を与え, この既約表現の次数は

$$(q^n - 1)\cdots(q-1)\prod_{\varphi\in\mathcal{F}}\frac{(q^{\deg(\varphi)})^{n({}^t\boldsymbol{\lambda}(\varphi))}}{\prod_{x\in\boldsymbol{\lambda}(\varphi)}((q^{\deg(\varphi)})^{h(x)}-1)}$$

で与えられる.

証明 定理 5.6 の証明により, 符号を除けば $\xi_{\boldsymbol{\lambda}}$ が既約指標であることがすでにわかっているから, $\xi_{\boldsymbol{\lambda}}(1)$ を計算すれば十分である. $\delta : B \to \mathbb{C}$ を

$$\delta(\widetilde{p}_m(x)) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{m-1}}{q^m - 1} & (x = 1) \\ 0 & (x \neq 1) \end{cases}$$

と定めると, 命題 5.3 の証明中で示したように,

$$\log(\sum_{\boldsymbol{\lambda}} S_{\boldsymbol{\lambda}} \otimes \overline{S_{\boldsymbol{\lambda}}}) = \sum_{m\geq 1}\frac{q^m-1}{m}\sum_{x\in\mathbb{F}_{q^m}^\times}\widetilde{p}_m(x)\otimes\widetilde{p}_m(x)$$

だから, $f = X - 1 \in \mathcal{F}$ として

$$\begin{aligned}\log(\sum_{\boldsymbol{\lambda}}\delta(S_{\boldsymbol{\lambda}})\overline{S_{\boldsymbol{\lambda}}}) &= \sum_{m\geq 1}\frac{(-1)^{m-1}}{m}\widetilde{p}_m(1) = \sum_{m\geq 1}\frac{(-1)^{m-1}}{m}p_m(f) \\ &= \sum_{m\geq 1}\frac{(-1)^{m-1}}{m}(X_{1,f}^m + X_{2,f}^m + \cdots) = \sum_{i\geq 1}\log(1 + X_{i,f})\end{aligned}$$

つまり

$$\sum_{\boldsymbol{\lambda}}\delta(S_{\boldsymbol{\lambda}})\overline{S_{\boldsymbol{\lambda}}} = \prod_{i\geq 1}(1 + X_{i,f}) = \sum_{n\geq 0}e_n(f)$$

である. 故に

$$e_n(f) = \sum_{\boldsymbol{\lambda}\vdash n}\delta(S_{\boldsymbol{\lambda}})\overline{S_{\boldsymbol{\lambda}}}$$

を得る．指標 $\xi_{\boldsymbol{\lambda}}$ が $\boldsymbol{\mu}$ の定める $\mathrm{GL}_n(q)$ の共役類でとる値を $\xi_{\boldsymbol{\lambda}}^{\boldsymbol{\mu}}$ と書くと

$$S_{\boldsymbol{\lambda}} = \sum_{\boldsymbol{\mu}\vdash n} \xi_{\boldsymbol{\lambda}}^{\boldsymbol{\mu}} \widetilde{P}_{\boldsymbol{\mu}}(q)$$

であるから，内積の定義と $S_{\boldsymbol{\lambda}}$ が正規直交基底であることより

$$\widetilde{Q}_{\boldsymbol{\mu}}(q) = \sum_{\boldsymbol{\lambda}\vdash n} \xi_{\boldsymbol{\lambda}}^{\boldsymbol{\mu}} \overline{S_{\boldsymbol{\lambda}}}$$

と書き直せて，とくに

$$\widetilde{Q}_{(1^n)}(f) = \sum_{\boldsymbol{\lambda}\vdash n} \xi_{\boldsymbol{\lambda}}(1) \overline{S_{\boldsymbol{\lambda}}}$$

を得る．$P_{(1^n)}(f) = e_n(f)$ だから $\widetilde{P}_\mu = q^{-n(\mu)} P_\mu|_{t=q^{-1}}$ より

$$\widetilde{P}_{(1^n)}(f) = q^{-\frac{n(n-1)}{2}} e_n(f)$$

であり，$\widetilde{Q}_{(1^n)}(f) = a_{(1^n)}(q)\widetilde{P}_{(1^n)}(f)$ かつ

$$a_\mu(q) = q^{|\mu|+2n(\mu)} \prod_{i\geq 1} (1-q^{-1})\cdots(1-q^{-m_i(\mu)})$$

であったから，

$$\widetilde{Q}_{(1^n)}(f) = (q-1)\cdots(q^n-1) e_n(f)$$

である．故に

$$\begin{aligned} (q-1)\cdots(q^n-1) e_n(f) &= \sum_{\boldsymbol{\lambda}\vdash n} \xi_{\boldsymbol{\lambda}}(1)\overline{S_{\boldsymbol{\lambda}}} \\ e_n(f) &= \sum_{\boldsymbol{\lambda}\vdash n} \delta(S_{\boldsymbol{\lambda}})\overline{S_{\boldsymbol{\lambda}}} \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} \xi_{\boldsymbol{\lambda}}(1) &= (q^n-1)\cdots(q-1)\delta(S_{\boldsymbol{\lambda}}) \\ &= (q^n-1)\cdots(q-1) \prod_{\varphi\in\mathcal{F}} \delta(s_{\boldsymbol{\lambda}(\varphi)}(\varphi)) \end{aligned}$$

を得る．$\delta(S_{\boldsymbol{\lambda}(\varphi)}(\varphi))$ を計算するには

$$\delta(\widetilde{p}_n(\xi)) = (-1)^{n-1} \sum_{x \in \mathbb{F}_{q^n}^\times} \xi(x)\delta(\widetilde{p}_n(x)) = \frac{1}{q^n - 1}$$

より $n = m\deg(\varphi)$ として

$$\delta(p_m(\varphi)) = \delta(\widetilde{p}_n(\xi)) = \frac{1}{q^n - 1} = \sum_{i \geq 1} q^{-in} = \sum_{i \geq 1} (q^{-i\deg(\varphi)})^m$$

であることに注目すればよく，すると

$$\delta(s_{\boldsymbol{\lambda}(\varphi)}(\varphi)) = s_{\boldsymbol{\lambda}(\varphi)}(q^{-\deg(\varphi)}, q^{-2\deg(\varphi)}, \cdots)$$

となるから，$s_\lambda(q^{-1}, q^{-2}, \cdots)$ を計算すればよい．しかし，

$$D(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = \begin{vmatrix} X_1^{\alpha_1} & \cdots & X_1^{\alpha_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_n^{\alpha_1} & \cdots & X_n^{\alpha_n} \end{vmatrix}$$

とおくとき，

$$s_\lambda(X_1, \cdots, X_n) = \frac{D(\lambda_1 + n - 1, \lambda_2 + n - 2, \cdots, \lambda_n)}{D(n-1, n-2, \cdots, 0)}$$

であったから，$X_i = q^{-i}$ とおいて Van der Monde 恒等式を用いれば

$$\begin{aligned} s_\lambda(q^{-1}, q^{-2}, \cdots) &= \lim_{n \to \infty} s_\lambda(q^{-1}, \cdots, q^{-n}, 0, 0, \cdots) \\ &= q^{-|\lambda| - n(\lambda)} \prod_{x \in \lambda} \frac{1}{1 - q^{-h(x)}} \end{aligned}$$

を得る．$\sum_{x \in \lambda} h(x) = |\lambda| + n(\lambda) + n({}^t\lambda)$ に注意すれば，

$$\xi_{\boldsymbol{\lambda}}(1) = (q^n - 1) \cdots (q - 1) \prod_{\varphi \in \mathcal{F}} \frac{(q^{\deg(\varphi)})^{n({}^t\boldsymbol{\lambda}(\varphi))}}{\prod_{x \in \boldsymbol{\lambda}(\varphi)} ((q^{\deg(\varphi)})^{h(x)} - 1)}$$

が得られ，とくに $\xi_{\boldsymbol{\lambda}}(1) > 0$ である． □

5.4　既約 cuspidal 加群の構成

補題 5.7　G を有限群，H を G の部分群，K を G の標数 0 の分解体，V を既約 KG-加群で $\mathrm{Res}_H^G(V)$ が既約であるとする．V の指標を χ とするとき，

$$\frac{|H|}{\dim V}\chi(g_1g_2)=\sum_{h\in H}\chi(g_1h)\chi(h^{-1}g_2)$$

が任意の $g_1,g_2\in G$ について成立する．

証明　V の基底をとり G の表現を $\rho: G\to \mathrm{GL}_n(K)$ とする．$F\in \mathrm{Mat}_n(K)$ に対して，Schur の補題より

$$\sum_{h\in H}\rho(h)F\rho(h)^{-1}$$

はスカラー行列である．とくに F として行列単位 E_{jk} をとると $i\neq l$ なら

$$\sum_{h\in H}\rho_{ij}(h)\rho_{kl}(h^{-1})=0$$

であるが，これは $\sum_{h\in H}\rho_{kl}(h)\rho_{ij}(h^{-1})$ とも書けるから，$j\neq k$ なら

$$\sum_{h\in H}\rho_{ij}(h)\rho_{kl}(h^{-1})=0$$

である．故に

$$\begin{aligned}\sum_{h\in H}\chi(g_1h)\chi(h^{-1}g_2)&=\sum_{i,j,k,l}\rho_{ij}(g_1)\left(\sum_{h\in H}\rho_{ji}(h)\rho_{kl}(h^{-1})\right)\rho_{lk}(g_2)\\&=\sum_{i,j=1}^{n}\rho_{ij}(g_1)\left(\sum_{h\in H}\rho_{ji}(h)\rho_{ij}(h^{-1})\right)\rho_{ji}(g_2)\end{aligned}$$

である．次に F として行列単位 E_{jj} をとると，

$$\sum_{h\in H}\rho_{ij}(h)\rho_{ji}(h^{-1})$$

は i によらず一定であるが，これは $\sum_{h\in H}\rho_{ji}(h)\rho_{ij}(h^{-1})$ とも書けるから j にもよらない．よって

$$\begin{aligned}\sum_{h\in H}\rho_{ij}(h)\rho_{ji}(h^{-1}) &= \frac{1}{n^2}\sum_{h\in H}\sum_{i,j=1}^{n}\rho_{ij}(h)\rho_{ji}(h^{-1})\\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{h\in H}\sum_{i=1}^{n}\rho_{ii}(hh^{-1})\\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{h\in H}n = \frac{|H|}{\dim V}\end{aligned}$$

となり,

$$\sum_{h\in H}\chi(g_1h)\chi(h^{-1}g_2) = \frac{|H|}{\dim V}\sum_{i=1}^{n}\rho_{ii}(g_1g_2) = \frac{|H|}{\dim V}\chi(g_1g_2)$$

を得る. □

$G=\mathrm{GL}_n(q)$, $U=U_n(q)$ と略記しよう. (K,R,F) を R が 1 の $|G|$ 乗根をすべて含む ℓ-モジュラー系とする. $\varepsilon:\mathbb{F}_q\to K^\times$ を単位指標と異なる加法的指標とし, U の 1 次指標 $\kappa:U\to K^\times$ を

$$\kappa(u)=\varepsilon(\sum_{i=1}^{n-1}u_{i,i+1})$$

で定めると $\kappa:U\to R^\times$ である. 次に, G の部分群 $H=H_n(q)$ を

$$H_n(q)=\begin{pmatrix}1 & *\\ 0 & \mathrm{GL}_{n-1}(q)\end{pmatrix}$$

とする. U は H の部分群であるから, H の U による左剰余類分解を

$$H=\coprod_{i=1}^{N}g_iU$$

と書く. ただし $N=|H|/|U|$ であり, g_1 は単位元とする.

補題 5.8　$\mu\vDash n,\mu\neq(n)$ とすると, $u_i\in U_\mu(q)$ が存在して次が成立.

(i) $g_i^{-1}u_ig_i\in U_n(q)=U$

(ii) $\kappa(g_i^{-1}u_ig_i)\neq 1$

証明　$H/U\simeq\mathrm{GL}_{n-1}(q)/U_{n-1}(q)$ より $g_i\in\mathrm{GL}_{n-1}(q)$ としてよいから

$$g_i = bw \quad (b \in B_n(q), w \in S_1 \times S_{n-1})$$

の形に書ける．$Z = \{w(1), w(2), \cdots, w(\mu_1)\}$ とし，

$$i = \max\{k \mid 1, 2, \cdots, k \in Z\}$$

とおく．$1 \in Z$ より $i \geq 1$ である．また，$\mu \neq (n)$ より $\mu_1 < n$ であるから $i < n$ である．i の定義より $i+1 \notin Z$ であるから，

$$\begin{cases} w(j) = i & (1 \leq j \leq \mu_1) \\ w(k) = i+1 & (\mu_1 < k \leq n) \end{cases}$$

をみたす j, k が存在する．$\alpha \in \mathbb{F}_q$ を $\alpha \notin \mathrm{Ker}(\varepsilon)$ をみたすようにとり，

$$u' = I_n + \alpha E_{i,i+1}$$

とおくと，$u' \in U$ であり，

$$wu'w^{-1} = I_n + \alpha E_{j,k} \in U_\mu(q)$$

であるから，$u_i = g_i u' g_i^{-1}$ とおけば，

$$\text{(i)}\ \ g_i^{-1} u_i g_i \in U \quad \text{(ii)}\ \ \kappa(g_i^{-1} u_i g_i) \neq 1$$

は明らかで，$B_n(q) \subseteq P_\mu(q)$ より

$$u_i = b(wu'w^{-1})b^{-1} \in bU_\mu(q)b^{-1} = U_\mu(q)$$

である．□

(K, R, F)，$G \supseteq H \supseteq U$，$\kappa : U \to K^\times$ を上のとおりとすると，次の命題が成り立つ．

命題 5.4　既約 KG-加群 V が存在して次の条件をみたすとする．

(i) $\dim V = \dfrac{|H|}{|U|} = (q^{n-1}-1)\cdots(q^2-1)(q-1)$.

(ii) $\mathrm{Res}_H^G(V)$ は既約 KH-加群.

(iii) $\mathrm{Res}_U^G(V)$ に κ が重複度 1 で現れる.

このとき，χ を V の指標とし，G 上の K-値関数 $J : G \to K$ を

$$J(g) = \frac{1}{|U|} \sum_{u \in U} \chi(gu)\kappa(u^{-1})$$

で定義すれば次が成立する．

(1) V_R を $\{v_1, \cdots, v_N\}$ を自由基底にもつ R-加群とする．このとき，V_R は

$$gv_i = \sum_{j=1}^{N} J(g_j^{-1} g g_i) v_j \quad (g \in G)$$

により RG-加群になる．ただし，$H = \bigsqcup_{i=1}^{N} g_i U$ であり，g_1 は単位元である．

(2) $uv_1 = \kappa(u)v_1$ $(u \in U)$ かつ，RH-加群同型

$$\mathrm{Res}_H^G(V_R) \simeq \mathrm{Ind}_U^H(Rv_1)$$

が存在する．

(3) $V_R \underset{R}{\otimes} F$ は既約 cuspidal FG-加群である．

(4) $V_R \underset{R}{\otimes} K$ は既約 cuspidal KG-加群であり，KG-加群同型

$$V_R \underset{R}{\otimes} K \simeq V$$

が存在する．

証明　R は完備局所環であり，q が ℓ で割り切れないことより $|U| = q^{\frac{n(n-1)}{2}}$ の付値は 0 であるから，$|U|$ は R で可逆である．とくに $J : G \to R$ である．さて，$g_1, g_2 \in G$ に対し

$$g_1(g_2 v_i) = \sum_{j,k=1}^{N} J(g_k^{-1} g_1 g_j) J(g_j^{-1} g_2 g_i) v_k$$

であるから，(1) を示すには

$$\sum_{j=1}^{N} J(g_k^{-1} g_1 g_j) J(g_j^{-1} g_2 g_i) = J(g_k^{-1} g_1 g_2 g_i)$$

を示せばよい．$g_k^{-1}g_1, g_2g_i$ を改めて g_1, g_2 と書けば，これは

$$\sum_{j=1}^{N} J(g_1g_j)J(g_j^{-1}g_2) = J(g_1g_2)$$

と同値である．ここで

$$\sum_{j=1}^{N} J(g_1g_j)J(g_j^{-1}g_2) = \frac{1}{|U|^2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{u,u'\in U}\chi(g_1g_ju)\chi(g_j^{-1}g_2u')\kappa(u^{-1})\kappa(u'^{-1})$$

だから，$v = u'u$ と置き換えると右辺は

$$\begin{aligned}&\frac{1}{|U|^2}\sum_{v\in U}\sum_{j=1}^{N}\sum_{u\in U}\chi(g_1g_ju)\chi(g_j^{-1}g_2vu^{-1})\kappa(v^{-1})\\ &\qquad = \frac{1}{|U|^2}\sum_{v\in U}\sum_{j=1}^{N}\sum_{u\in U}\chi(g_1(g_ju))\chi((g_ju)^{-1}g_2v)\kappa(v^{-1})\end{aligned}$$

と書けるが，

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{u\in U}\chi(g_1(g_ju))\chi((g_ju)^{-1}g_2v) = \sum_{h\in H}\chi(g_1h)\chi(h^{-1}g_2v)$$

なので，補題 5.7 より

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{N} J(g_1g_j)J(g_j^{-1}g_2) &= \frac{1}{|U|^2}\sum_{v\in U}\frac{|H|}{\dim V}\chi(g_1g_2v)\kappa(v^{-1})\\ &= \frac{|H|}{|U|}\frac{1}{\dim V}\left(\frac{1}{|U|}\sum_{v\in U}\chi(g_1g_2v)\kappa(v^{-1})\right) = J(g_1g_2)\end{aligned}$$

であり，(1) が示された．

J の値域は $\mathbb{C}$ の部分環と思ってよいので，複素共役を考えることが出来て

$$\overline{J(g)} = \frac{1}{|U|}\sum_{u\in U}\chi(u^{-1}g^{-1})\kappa(u) = J(g^{-1})$$

であることに注意しよう．このことと (1) より

$$\sum_{j=1}^{N}|J(g_j^{-1}gg_i)|^2 = \sum_{j=1}^{N}J(g_i^{-1}g^{-1}g_j)J(g_j^{-1}gg_i)$$

$$
\begin{aligned}
&= J(g_i^{-1}gg^{-1}g_i) \\
&= \frac{1}{|U|}\sum_{u\in U}\chi(u)\kappa(u)^{-1}
\end{aligned}
$$

であるが，最後の式は重複度 $[\mathrm{Res}_U^G(V):\kappa]$ を与えるから，

$$
\sum_{j=1}^{N}|J(g_j^{-1}gg_i)|^2 = 1
$$

である．$u\in U$ ならば

$$
uv_1 = \sum_{j=1}^{N} J(g_j^{-1}u)v_j
$$

であるが，$j=1$ のとき

$$
\begin{aligned}
J(u) &= \frac{1}{|U|}\sum_{u'\in U}\chi(uu')\kappa(u')^{-1} \\
&= \frac{1}{|U|}\sum_{u'\in U}\chi(uu')\kappa(u^{-1}u'^{-1})\kappa(u) \\
&= [\mathrm{Res}_U^G(V):\kappa]\kappa(u) = \kappa(u)
\end{aligned}
$$

であるから，$|J(g_1^{-1}u)| = |J(u)| = |\kappa(u)| = 1$ となり，

$$
\sum_{j=2}^{N}|J(g_j^{-1}u)|^2 = 0
$$

より $j\neq 1$ なら $J(g_j^{-1}u)=0$ となる．故に $uv_1=\kappa(u)v_1$ を得る．R-加群同型

$$
RH\underset{RU}{\otimes}Rv_1 \simeq V_R
$$

を $g_i\otimes v_1\mapsto v_i$ で定め，RH-加群準同型であることを示す．$g\in H$ とすると，各 $1\le i\le N$ に対し，$1\le j\le N$ と $u\in U$ がただひと通りに定まって，$gg_i=g_ju$ と書ける．故に，

$$
gg_i\otimes v_1 = \kappa(u)g_j\otimes v_1
$$

であり，他方

$$J(g_j^{-1}gg_i) = J(u) = \kappa(u)$$

だから，$\sum_{k \neq j} |J(g_k^{-1}gg_i)|^2 = 0$ より

$$gv_i = \sum_{k=1}^{N} J(g_k^{-1}gg_i)v_k = \kappa(u)v_j$$

である．故に (2) が示された．さて，g を単位元にとれば

$$v_i = \sum_{j=1}^{N} J(g_j^{-1}g_i)v_j$$

より，$i \geq 2$ なら $J(g_i) = 0$ であることを注意しておく．

$$e = \frac{1}{|U|} \sum_{u \in U} \kappa(u)^{-1}u$$

とおき，

$$ev_i = \begin{cases} v_1 & (i = 1) \\ 0 & (i \geq 2) \end{cases}$$

を示そう．$uv_1 = \kappa(u)v_1$ より $ev_1 = v_1$ は明らかだから，$2 \leq i \leq N$ とする．$V_R \otimes K$ の κ-等質成分は Kv_1 故，ev_i は v_1 のスカラー倍であり，

$$ev_i = \frac{1}{|U|} \sum_{u \in U} J(g_j^{-1}ug_i)\kappa(u^{-1})v_j$$

の v_1 の係数を見れば

$$\frac{1}{|U|} \sum_{u \in U} J(ug_i)\kappa(u^{-1}) = \frac{1}{|U|^2} \sum_{u,u' \in U} \chi(ug_iu')\kappa(u'^{-1})\kappa(u)^{-1}$$

であるが，$v = u'u$ と置いて右辺を書き換えれば

$$\frac{1}{|U|^2} \sum_{u \in U} \sum_{v \in U} \chi(g_iv)\kappa(v^{-1}) = \frac{1}{|U|} \sum_{u \in U} J(g_i) = 0$$

であるから，$i \geq 2$ なら $ev_i = 0$ である．

準備が出来たので $V_R \otimes F$ が既約 FG-加群であることを示す．

$$0 \neq W \subseteq V_R \otimes F$$

を FG-部分加群とする．

$$0 \neq \sum_{i=1}^{N} c_i v_i \in W$$

をとると，ある $1 \leq i \leq N$ に対して $c_i \neq 0$ であるが，$g_i v_1 = v_i$ なので g_i^{-1} を作用させれば最初から $c_1 \neq 0$ として一般性を失わない．すると

$$e\left(\sum_{i=1}^{N} c_i v_i\right) = c_1 v_1 \in W$$

より $v_1 \in W$ であるから，$v_i = g_i v_1 \in W$ となり，$W = V_R \otimes F$ を得る．次に $V_R \otimes F$ が cuspidal FG-加群であることを示す．$\mu \vDash n, \mu \neq (n)$ に対し，

$$e_\mu = \frac{1}{|U_\mu(q)|} \sum_{u \in U_\mu(q)} u$$

とおく．

$$\sum_{i=1}^{N} c_i v_i \in e_\mu V_R \otimes F$$

とするとき，補題 5.8 の $u_i \in U_\mu(q) \subseteq H$ を作用させれば，

$$\sum_{i=1}^{N} c_i v_i = \sum_{j=1}^{N} c_j u_i v_j$$

であるが，$g_i^{-1} u_i g_i \in U$ より $u_i g_i \in g_i U$ だから，$j \neq i$ に対しては $k \neq i$ が存在して $u_i g_j \in g_k U$ であることに注意すれば，(2) の RH-加群同型より

$$u_i v_i = \kappa(g_i^{-1} u_i g_i) v_i$$

かつ $j \neq i$ に対しては $k \neq i$ が存在して $u_i v_j \in R v_k$ である．よって，

$$c_i = \kappa(g_i^{-1} u_i g_i) c_i$$

を得るが，$\kappa(g_i^{-1}u_ig_i)\neq 1$ より $c_i=0$ である．故に，$e_\mu V_R\otimes F=0$ を得る．以上から $V_R\otimes F$ が既約 cuspidal FG-加群となり，(3) が示された．

同じ議論により $V_R\otimes K$ が既約 cuspidal KG-加群になることがわかるので，(4) を示すには $V_R\otimes K$ の指標が χ であることを示せばよい．そこで補題 5.7 において $G=H$，$g_1=x$，g_2 を単位元とすれば

$$\frac{1}{|G|}\sum_{y\in G}\chi(xy)\chi(y^{-1})=\frac{\chi(x)}{\dim V}$$

となるから，$V_R\otimes K$ の指標を η とすると

$$\langle\eta,\chi\rangle_G=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\eta(g)\chi(g^{-1})$$

は次のように計算できる．

$$\begin{aligned}
\langle\eta,\chi\rangle_G &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\sum_{i=1}^{N}J(g_i^{-1}gg_i)\chi(g^{-1})\\
&= \frac{1}{|U|}\sum_{u\in U}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g_i^{-1}gg_iu)\kappa(u^{-1})\chi(g^{-1})\\
&= \frac{1}{|U|}\sum_{u\in U}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g_iug_i^{-1}g)\chi(g^{-1})\kappa(u^{-1})\\
&= \frac{1}{|U|}\sum_{u\in U}\sum_{i=1}^{N}\frac{\chi(g_iug_i^{-1})}{\dim V}\kappa(u^{-1})\\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{|U|}\sum_{u\in U}\chi(u)\kappa(u^{-1})=[\mathrm{Res}_U^G(V):\kappa]=1
\end{aligned}$$

ところが，η,χ は既約指標なので

$$\langle\eta-\chi,\eta-\chi\rangle_G=\langle\eta,\eta\rangle_G-2\langle\eta,\chi\rangle_G+\langle\chi,\chi\rangle_G=1-2+1=0$$

となるから，$\eta=\chi$ である．故に (4) が示された．　□

命題 5.4 は S. I. Gelfand による．$\mathrm{GL}_n(q)$ のときはこれですべての既約 cuspidal 加群が構成できるが，その他の Lie 型有限群のときはそうはいかず，そのため既約 cuspidal 加群の分類はできていない．

以下，命題 5.4 の仮定をみたす既約 $K\,\mathrm{GL}_n(q)$-加群を具体的に与えよう．

補題 5.9　$\deg(\varphi)=d$ とし，$\varphi=[\xi]$（$\xi\in\mathbb{Q}_{p'}/\mathbb{Z}$）を

$$\xi=\frac{r}{q^d-1}$$

と書く．$e_1(\varphi)$ の定める $\mathrm{GL}_d(q)$ の既約指標の共役類 $C_{\boldsymbol{\mu}}$ における指標値は

- $\boldsymbol{\mu}:\mathcal{F}\to\mathcal{P}$ が $\deg(f)|d$ をみたすある $f\in\mathcal{F}$ のみに台を持つとき，

$$(-1)^{d+\ell(\boldsymbol{\mu}(f))}\sum_{\substack{t\in\mathbb{F}_{q^d}^\times\\ f(t)=0}}\theta(t^r)\prod_{k=1}^{\ell(\boldsymbol{\mu}(f))-1}(q^{k\deg(f)}-1)$$

- その他のとき 0

で与えられる．ただし，$\theta:\mathbb{E}^\times\hookrightarrow\mathbb{C}^\times$ である．

証明　定義より

$$e_1(\varphi)=p_1(\varphi)=(-1)^{d-1}\sum_{a|d}\sum_{\substack{f\in\mathcal{F}\\ \deg(f)=a}}\sum_{\substack{t\in\mathbb{F}_{q^d}^\times\\ f(t)=0}}\theta(t^r)p_{\frac{d}{a}}(f)$$

であるから

$$p_m=\sum_{\mu\vdash m}(-1)^{\ell(\mu)-1}(q-1)\cdots(q^{\ell(\mu)-1}-1)\widetilde{P}_\mu(q)$$

を示せば，上式の各 $p_{\frac{d}{a}}(f)$ を書き換えることが出来て題意を得る．故にこの等式を証明しよう．まず，補題 5.5 より

$$\sum_{m\geq 0}h_m=\sum_{\mu\in\mathcal{P}}\widetilde{P}_\mu(q)$$

であるから，

$$\left(\sum_{\mu\in\mathcal{P}}\widetilde{P}_\mu(q)\right)\left(\sum_{m\geq 0}e_mY^m\right)=\prod_{i\geq 1}\frac{1+X_iY}{1-X_i}$$

である．また，補題 5.5 の証明中で示したように

$$\left(\sum_{\mu\vdash a} u_\mu\right) u_{(1^b)} = \sum_{\lambda\vdash a+b} \begin{bmatrix} \ell(\lambda) \\ b \end{bmatrix}_q u_\lambda$$

から

$$\left(\sum_{\mu\vdash a} \widetilde{P}_\mu(q)\right) e_b = q^{\frac{b(b-1)}{2}} \sum_{\lambda\vdash a+b} \begin{bmatrix} \ell(\lambda) \\ b \end{bmatrix}_q \widetilde{P}_\lambda(q)$$

を得るから，

$$\left(\sum_{\mu\in\mathcal{P}} \widetilde{P}_\mu(q)\right)\left(\sum_{m\geq 0} e_m Y^m\right) = \sum_{a\geq 0}\sum_{m\geq 0} q^{\frac{m(m-1)}{2}} \sum_{\lambda\vdash a+m} \begin{bmatrix} \ell(\lambda) \\ m \end{bmatrix}_q Y^m \widetilde{P}_\lambda(q)$$

でもある．故に，右辺の $\widetilde{P}_\lambda(q)$ の係数が

$$\sum_{m=0}^{|\lambda|} q^{\frac{m(m-1)}{2}} \begin{bmatrix} \ell(\lambda) \\ m \end{bmatrix}_q Y^m = \prod_{i=0}^{\ell(\lambda)-1} (1+q^iY)$$

であることに注意して

$$\prod_{i\geq 0} \frac{1+X_iY}{1-X_i} = \sum_{\lambda\in\mathcal{P}} \prod_{i=0}^{\ell(\lambda)-1} (1+q^iY)\widetilde{P}_\lambda(q)$$

を得る．そこで

$$f(Y) = \prod_{i\geq 0} \frac{1-X_iY}{1-X_i} = 1 + \sum_{\lambda\neq\varnothing} \prod_{i=0}^{\ell(\lambda)-1} (1-q^iY)\widetilde{P}_\lambda(q)$$

とおいて $Y=1$ で微分すれば

$$f'(Y)|_{Y=1} = \lim_{Y\to 1} \frac{f(Y)-1}{Y-1} = -\sum_{\lambda\neq\varnothing} \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)-1} (1-q^i)\widetilde{P}_\lambda(q)$$

である．他方，対数微分法より

$$\frac{f'(Y)}{f(Y)} = \sum_{i\geq 1} \frac{-X_i}{1-X_iY} = -\sum_{m\geq 1} p_m Y^m$$

であるから，$Y=1$ として

$$f'(Y)|_{Y=1} = -\sum_{m\geq 1} p_m$$

となる．故に，両者を比較して

$$\sum_{m\geq 1} p_m = \sum_{\mu\neq\varnothing} (-1)^{\ell(\mu)-1}(q-1)\cdots(q^{\ell(\mu)-1}-1)\widetilde{P}_\mu(q)$$

を得る．あとは m 次部分を比較すればよい． □

有理数体 $\mathbb{Q}$ に 1 の原始 $|G|$ 乗根を添加した体を L とすると，G の指標の値域は L の整数環に含まれるから，ℓ-モジュラー系 (K,R,F) を 5.1 節のように構成すれば G の指標を K に値を取る類関数と思うこともでき，既約指標は既約 KG-加群から得られる．つまり既約指標は既約 KG-加群を定める．

V を補題 5.9 で定めた既約指標をもつ既約 $K\,\mathrm{GL}_d(q)$-加群とする．単位元での指標値をみれば

$$\dim V = (q^{d-1}-1)\cdots(q^2-1)(q-1)$$

である．また，$G=\mathrm{GL}_d(q)\supseteq H\supseteq U$，$(K,R,F)$，$\kappa : U\to R^\times$ および

$$H = \coprod_{i=1}^{N} g_i U$$

を命題 5.4 のとおりとする．

補題 5.10 Kv を指標 κ をもつ 1 次元 KU-加群とすると，

$$\mathrm{Ind}_U^H(Kv) = \bigoplus_{i=1}^{N} Kg_i\otimes v$$

に対し

$$\frac{1}{|U|}\sum_{u\in U}\kappa(u^{-1})ug_i\otimes v = \begin{cases} 1\otimes v & (i=1)\\ 0 & (i\neq 1)\end{cases}$$

が成立し，とくに $\mathrm{Ind}_U^H(Kv)$ は既約 KH-加群である．

証明 h_1 を単位元として H の U に関する両側剰余類分解を

$$H = \coprod_{i=1}^{M} U h_i U$$

とすると，Mackey 公式より

$$\begin{aligned}\langle \kappa, \mathrm{Res}^H_U \circ \mathrm{Ind}^H_U(\kappa)\rangle &= \sum_{i=1}^{M} \langle \mathrm{Res}^U_{U\cap h_i U h_i^{-1}}(\kappa), \mathrm{Res}^U_{U\cap h_i U h_i^{-1}}({}^{h_i}\kappa)\rangle \\ &= 1 + \sum_{i=2}^{M} \langle \mathrm{Res}^U_{U\cap h_i U h_i^{-1}}(\kappa), \mathrm{Res}^U_{U\cap h_i U h_i^{-1}}({}^{h_i}\kappa)\rangle\end{aligned}$$

であるから，$i \geq 2$ のとき

$$\mathrm{Res}^U_{U\cap h_i U h_i^{-1}}(\kappa) \neq \mathrm{Res}^U_{U\cap h_i U h_i^{-1}}({}^{h_i}\kappa)$$

を示そう．まず H の Bruhat 分解より $h_i = tw$，ただし

$$t = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & t_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & t_d \end{pmatrix} \ (t_2, \cdots, t_d \in \mathbb{F}_q^\times), \quad w \in S_1 \times S_{d-1}$$

と書ける．$1 = w^{-1}(1)$ なので

$$w^{-1}(1) > w^{-1}(2) > \cdots > w^{-1}(d)$$

とはなりえないから，ある $1 \leq i \leq d$ が存在して $w^{-1}(i) < w^{-1}(i+1)$ となる．

そこで，$u = 1 + \alpha E_{i,i+1} \in U$ $(\alpha \in \mathbb{F}_q)$ とおくと $\kappa(u) = \varepsilon(\alpha)$ である．他方

$$\begin{aligned} h_i^{-1} u h_i &= w^{-1}(1 + t_i^{-1} t_{i+1} \alpha E_{i,i+1}) w \\ &= 1 + t_i^{-1} t_{i+1} \alpha E_{w^{-1}(i), w^{-1}(i+1)} \end{aligned}$$

だから，$u \in U \cap h_i U h_i^{-1}$ かつ

$${}^{h_i}\kappa(u) = \kappa(h_i^{-1} u h_i) = \begin{cases} \varepsilon(t_i^{-1} t_{i+1} \alpha) & (w^{-1}(i) + 1 = w^{-1}(i+1)) \\ 1 & (\text{その他}) \end{cases}$$

となる．まず $w^{-1}(i)+2 \leq w^{-1}(i+1)$ の場合を考えよう．このときは α を $\varepsilon(\alpha) \neq 1$ となるようにとれば $\kappa(u) \neq {}^{h_i}\kappa(u)$ である．

次に $w^{-1}(i) < w^{-1}(i+1)$ になるのが $w^{-1}(i)+1 = w^{-1}(i+1)$ のときに限る場合を考えよう．$w^{-1}(1) = 1 < w^{-1}(2)$ であるから $w^{-1}(2) = 2$ であり，以下同様に $1 \leq k < d$ に対し

$$w^{-1}(1) = 1, \cdots, w^{-1}(k) = k$$

ならば $w^{-1}(k+1) = k+1$ である．ゆえに w は S_d の単位元であり $h_i = t$ となる．とくに $U \cap h_i U h_i^{-1} = U$ であり，$i \geq 2$ より t は単位元でないので $t_i \neq t_{i+1}$ となる $1 \leq i < d$ がとれる．ゆえに，α を $\varepsilon((t_i^{-1}t_{i+1}-1)\alpha) \neq 1$ となるようにとれば $\kappa(u) \neq {}^{h_i}\kappa(u)$ である．以上から

$$e = \frac{1}{|U|}\sum_{u \in U}\kappa(u^{-1})u$$

に対し $e\,\mathrm{Ind}_U^H(Kv) = Kv$ を得る．

$2 \leq i \leq N$ に対して $e(g_i \otimes v)$ を考えると，$ug_i \in H \setminus U$ より $1 \otimes v$ の係数は 0 に等しいから，$e\,\mathrm{Ind}_U^H(Kv) = Kv$ より $e(g_i \otimes v) = 0$ である．故に

$$e(g_i \otimes v) = \begin{cases} 1 \otimes v & (i = 1) \\ 0 & (i \neq 1) \end{cases}$$

を得る．$\mathrm{Ind}_U^H(Kv)$ が既約 KH-加群であることを示そう．$0 \neq W \subseteq \mathrm{Ind}_U^H(Kv)$ を部分 KH-加群とすると，

$$0 \neq \sum_{i=1}^{N} c_i g_i \otimes v \in W$$

をとれば，ある i について $c_i \neq 0$ であるが，g_i^{-1} をかければ最初から $c_1 \neq 0$ として一般性を失わない．すると

$$e(\sum_{i=1}^{N} c_i g_i \otimes v) = c_1 1 \otimes v \in W$$

なので $1 \otimes v \in W$ となり，$\mathrm{Ind}_U^H(Kv) = W$ を得る． □

$e_1(\varphi)$ の定める既約 $K\,\mathrm{GL}_d(q)$-加群 V が命題 5.4 の仮定をみたすことを示そう．$\dim V = (q^{d-1}-1)\cdots(q-1)$ はすでにわかっているので，示すべきは次の補題である．

補題 5.11　$\mathrm{Res}^G_H(V)$ は既約 KH-加群で，$[\mathrm{Res}^G_U(V):\kappa]=1$ が成り立つ．

証明　V の指標を χ と書く．補題 5.9 より $u\in U$ の Jordan 標準形が μ ならば

$$\chi(u) = (-1)^{d+\ell(\mu)}(q-1)\cdots(q^{\ell(\mu)-1}-1)$$

であるから，$\chi(u)$ は

$$\ell(\mu) = d - \sum_{1\le i\le \ell(\mu)}(\mu_i-1) = d - \mathrm{rank}(u-1)$$

のみで決まる．よって

$$N_d(r) = \left\{ N = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_d(\mathbb{F}_q) \mid \mathrm{rank}\,N = r \right\}$$

とおくと，$[\mathrm{Res}^G_U(V):\kappa]$ は

$$\frac{1}{q^{\frac{d(d-1)}{2}}}\sum_{r=0}^{d-1}(-1)^r(q-1)\cdots(q^{d-r-1}-1)\sum_{N\in N_d(r)}\kappa(1+N)$$

で与えられる．$r\ge 1$ のとき $\displaystyle\sum_{N\in N_d(r)}\kappa(1+N)$ が q の

$$\frac{d(d-1)}{2} - \frac{(d-r-1)(d-r)}{2} - 1 = \frac{r(2d-r-1)}{2} - 1$$

次以下の多項式になることを示そう．$\alpha_1,\cdots,\alpha_{d-1}\in\mathbb{F}_q$ に対し

$$N(\alpha_1,\cdots,\alpha_{d-1},r) = \left\{ N = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & & * \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \alpha_{d-1} \\ & & & 0 \end{pmatrix} \mid \mathrm{rank}\,N = r \right\}$$

とおくと，$\displaystyle\sum_{N\in N_d(r)}\kappa(1+N)$ は

$$\sum_{(\alpha_1,\cdots,\alpha_{d-1})\in\mathbb{F}_q^{d-1}} \varepsilon(\alpha_1+\cdots+\alpha_{d-1})|N(\alpha_1,\cdots,\alpha_{d-1},r)|$$

と書ける．$1\le i_1<\cdots<i_l\le d-1$ に対し

$$\alpha_{i_1}\ne 0,\cdots,\alpha_{i_l}\ne 0$$

で，$j\notin\{i_1,\cdots,i_l\}$ に対し $\alpha_j=0$ となるとき，$N(\alpha_1,\cdots,\alpha_{d-1},r)$ の元は上三角ブロック行列 $u=(u_{jk})_{1\le j,k\le l}$ であって

$$u_{jj}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & * & * \\ & \ddots & \ddots & * \\ & & \ddots & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \quad u_{j,j+1}=\begin{pmatrix} * & & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ * & & \ddots & \\ \alpha_{i_j} & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

の形である．行基本変形をほどこして i_1+1 列から i_l+1 列を単位ベクトル $e_{i_1},\cdots,e_{i_l}$ にしてから，列基本変形をほどこして $(i_1,i_1+1),\cdots,(i_l,i_l+1)$ 成分以外を 0 にする操作で得られた行列を考える．この行列から $i_1,\cdots,i_l,d$ 行めと $1,i_1+1,\cdots,i_l+1$ 列めを除くと $N_{d-l-1}(r-l)$ の元が得られるから，逆に $N_{d-l-1}(r-l)$ の元を与えてこの元に到達する $N(\alpha_1,\cdots,\alpha_{d-1},r)$ の元を考えると，列基本変形では $a<b$ に対し (i_a,i_b+1) 成分が 0 になるように復元するから

$$\begin{aligned}(d-(i_1+1)-(l-1))+(d-(i_2+1)-(l-2))+\cdots+(d-(i_l+1))\\ =dl-(i_1+\cdots+i_l)-\frac{l(l+1)}{2}\end{aligned}$$

だけの自由度があり，次に行基本変形では

$$(i_1-1)+\cdots+(i_l-1)=(i_1+\cdots+i_l)-l$$

だけの自由度があるので，全部で $(d-1)l-\dfrac{l(l+1)}{2}$ だけの自由度がある．故に

$$|N(\alpha_1,\cdots,\alpha_{d-1},r)|=q^{(d-1)l-\frac{l(l+1)}{2}}|N_{d-l-1}(r-l)|$$

である．ε は加法群 $\mathbb{F}_q$ の非自明既約指標だから

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{F}_q^\times}\varepsilon(\alpha)=-1$$

であることに注意すれば，$\displaystyle\sum_{N\in N_d(r)}\kappa(1+N)$ は

$$\begin{aligned}\sum_{l=0}^{r}\sum_{\{i_1,\cdots,i_l\}\subseteq\{1,2,\cdots,d-1\}}&\left(\sum_{\alpha\in\mathbb{F}_q^\times}\varepsilon(\alpha)\right)^l q^{(d-1)l-\frac{l(l+1)}{2}}|N_{d-l-1}(r-l)|\\ &=\sum_{l=0}^{r}\binom{d-1}{l}(-1)^l q^{(d-1)l-\frac{l(l+1)}{2}}|N_{d-l-1}(r-l)|\end{aligned}$$

に等しい．他方，同じ式を加法群 $\mathbb{F}_q$ の単位指標に対して考えると，

$$|N_d(r)|=\sum_{l=0}^{r}\binom{d-1}{l}(q-1)^l q^{(d-1)l-\frac{l(l+1)}{2}}|N_{d-l-1}(r-l)|$$

を得る．この漸化式を用いて，$|N_d(r)|$（$0\leq r\leq d-1$）が

$$\binom{d-1}{r}q^{(d-1)r-\frac{r(r-1)}{2}}+(\text{低次の項})$$

の形の q の多項式であることを示そう．$d=1$ なら $r=0$ しかありえず，このとき $|N_1(0)|=1$ より主張は正しいから，$d>1$ と仮定する．すると，帰納法の仮定より $|N_d(r)|$ は q の多項式で次数は

$$\begin{aligned}l+(d-1)l-\frac{l(l+1)}{2}&+(d-l-2)(r-l)-\frac{(r-l)(r-l-1)}{2}\\ &=(l-r)+((d-1)r-\frac{r(r-1)}{2})\leq(d-1)r-\frac{r(r-1)}{2}\end{aligned}$$

以下であり，等号成立は $l=r$ のときのみである．故に最高次の係数も

$$\binom{d-1}{r}$$

になり帰納法が成立した．すると，上と同様の次数の計算により

$$\sum_{N\in N_d(r)}\kappa(1+N)=\sum_{l=0}^{r}\binom{d-1}{l}(-1)^l q^{(d-1)l-\frac{l(l+1)}{2}}|N_{d-l-1}(r-l)|$$

の次数は

$$(d-1)r - \frac{r(r+1)}{2} = \frac{r(2d-r-1)}{2} - r$$

以下であるから，$\sum_{N \in N_d(r)} \kappa(1+N)$ は $r \geq 1$ のとき

$$\frac{r(2d-r-1)}{2} - 1$$

次以下の多項式である．以上から $\langle \mathrm{Res}_U^G(\chi), \kappa \rangle$ が定数項 1 の q^{-1} の多項式であることがわかるので，ある $q_o > 0$ が存在して，任意の $q > q_0$ に対して

$$\dim_K \mathrm{Hom}_{KU}(Kv, \mathrm{Res}_U^G(V)) > 0$$

となり，$q > q_0$ ならば非零 KH-加群準同型写像

$$\mathrm{Ind}_U^H(Kv) \longrightarrow \mathrm{Res}_H^G(V)$$

が存在する．補題 5.10 より $\mathrm{Ind}_U^H(Kv)$ は既約なのでこの準同型写像は単射であるが，両辺の次元が等しいので全射でもある．故に，$q > q_0$ ならば

$$\langle \mathrm{Res}_U^G(\chi), \kappa \rangle = \langle \mathrm{Res}_H^G(\chi), \mathrm{Ind}_U^H(\kappa) \rangle = 1$$

である．証明の最初に戻ればこの式は

$$q^{\frac{d(d-1)}{2}} = \sum_{r=0}^{d-1} (-1)^r (q-1) \cdots (q^{d-r+1}-1) \sum_{N \in N_d(r)} \kappa(1+N)$$

を意味するが，両辺は q の多項式なので $q \geq q_0$ でなくても成立する．つまり任意の q について

$$\langle \mathrm{Res}_U^G(\chi), \kappa \rangle = 1$$

が成り立つ．さらに，

$$\langle \mathrm{Res}_H^G(\chi), \mathrm{Ind}_U^H(\kappa) \rangle = \langle \mathrm{Res}_U^G(\chi), \kappa \rangle = 1$$

より非零 KH-加群準同型

$$\mathrm{Ind}_U^H(Kv) \longrightarrow \mathrm{Res}_H^G(V)$$

が存在して，補題 5.10 より同型になり，とくに $\mathrm{Res}_H^G(V)$ は既約 KH-加群である． □

以上から，$\deg(\varphi) = d$ ならば $e_1(\varphi)$ の定める既約 $K\,\mathrm{GL}_d(q)$-加群は命題 5.4 の仮定をみたすことがわかったから，φ は cuspidal $\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_d(q)$-加群を与える．

第 6 章

A 型 Hecke 代数

6.1 Harish-Chandra 系列と Hecke 代数

$\theta : \mathbb{E}^\times \hookrightarrow \mathbb{C}^\times$ をひとつ固定し，補題 5.4 により同型 $\mathbb{E}^\times \simeq \mathbb{Q}_{p'}/\mathbb{Z}$ を定める．

$\xi \in \mathbb{Q}_{p'}/\mathbb{Z} \simeq \mathbb{E}^\times$ の Frobenius 軌道 $\varphi = [\xi]$ が $\deg(\varphi) = d$ をみたすとき，$e_1(\varphi)$ の定める既約指標は命題 5.4 の仮定をみたし，既約 cuspidal $\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_d(q)$-加群を与えるのであった．

定義 6.1 $\varphi = [\xi]$ が $\deg(\varphi) = d$ をみたすとする．このとき，命題 5.4 で構成された既約 cuspidal $\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_d(q)$-加群を $S(\varphi)$ と書く．

命題 5.4 より $S(\varphi)$ は $K\,\mathrm{GL}_d(q)$-加群の $\mathrm{mod}\ell$ 還元で得られることもわかるから，$S(\varphi)$ の Brauer 指標は補題 5.9 で与えた通常指標の定義域を ℓ-正則元のなす集合に制限したものである．そこで，既約多項式に対してはある根が ℓ-正則元ならばすべての根が ℓ-正則元であることに注意して次の用語を導入する．

定義 6.2 根が ℓ-正則元である $f \in \mathcal{F}$ を $\mathbb{F}_q$ 上の **ℓ-正則既約多項式**と呼ぶ．

とくに，$\xi \in \mathbb{Q}_{p'}/\mathbb{Z}$ が $\deg(\varphi) = d$ をみたすとき

$$\xi = \frac{r}{q^d - 1} \quad (r \in \mathbb{Z})$$

と書けば，$S(\varphi)$ の Brauer 指標の ℓ-正則共役類 $C_{\boldsymbol{\mu}}$ での値は，

- $\boldsymbol{\mu}$ が ℓ-正則な $f \in \mathcal{F}$ にのみ台を持つとき

$$(-1)^{d+\ell(\boldsymbol{\mu}(f))} \sum_{\alpha \text{ は } f(X)=0 \text{ の根}} \theta(\alpha^r) \prod_{k=1}^{\ell(\boldsymbol{\mu}(f))-1} (q^{k\deg(f)}-1)$$

- それ以外のとき 0

である．さて，$\xi = \xi_\ell + \xi_{\ell'}$ を ℓ-元と ℓ-正則元の和への分解とする．具体的には，$q^d - 1 = \ell^m \ell', x\ell^m + y\ell' = 1$ $(x, y, \ell' \in \mathbb{Z})$ として，

$$\xi_{\ell'} = \frac{x\ell^m r}{q^d-1}, \quad \xi_\ell = \frac{y\ell' r}{q^d-1}$$

である．幾何学的共役類の定義より，ξ を $\mathbb{F}_{q^d}^\times$ の指標と見ると

$$\alpha \mapsto \theta(\alpha^r) \quad (\alpha \in \mathbb{F}_{q^d}^\times)$$

であるが，この表現を $\operatorname{mod} \ell$ 還元すれば $\mathbb{F}_{q^d}^\times$ の $\mathbb{F}$ 上の 1 次元表現 $\mathbb{F}_{q^d}^\times \to \mathbb{F}^\times$ を定め，Brauer 指標は ξ を ℓ-正則な $\mathbb{F}_{q^d}^\times$ の元の集合に制限した写像になる．

補題 6.1 ξ と $\xi_{\ell'}$ の Brauer 指標は一致する．

証明 α を $\mathbb{F}_{q^d}^\times$ の ℓ-正則元とすると $\alpha^{\ell'} = 1$ であるから

$$\xi(\alpha) = \theta(\alpha^r) = \theta(\alpha)^{x\ell^m r}\theta(\alpha^{\ell'})^{yr} = (\xi)_{\ell'}(\alpha)$$

より明らか． □

定理 5.2 より $\mathbb{F}_{q^d}^\times$ の ℓ-正則元の個数 ℓ' は $\mathbb{F}_{q^d}^\times$ の $\mathbb{F}$ 上の既約表現の個数に等しい．そして既約 $\mathbb{F}\mathbb{F}_{q^d}^\times$-加群の完全代表系は

$$\xi = \frac{r}{\ell'} \quad (0 \le r \le \ell' - 1)$$

の定める $\mathbb{F}_{q^d}^\times$ の Brauer 指標で与えられる．他方，定理 5.2 証明中で示したように，有限群 G に対し既約 $\mathbb{F}G$-加群の Brauer 指標は 1 次独立であるから Brauer 指標が等しい 2 つの既約 $\mathbb{F}G$-加群は同型である．この 2 つの事実を用いることにより次の命題を示すことができる．

命題 6.1 Frobenius 軌道 $\varphi = [\xi]$, $\psi = [\eta]$ $(\xi, \eta \in \mathbb{Q}_{p'}/\mathbb{Z})$ が

$$\deg(\varphi) = \deg(\psi) = d$$

をみたすとする．このとき次は同値.

(i) $\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_d(q)$-加群同型 $S(\varphi) \simeq S(\psi)$ が存在する.

(ii) $[\xi_{\ell'}] = [\eta_{\ell'}]$ が成り立つ.

証明 $[\xi_{\ell'}] \neq [\eta_{\ell'}]$ とする．$\mathbb{F}_{q^d}^{\times}$ の $\mathbb{F}$ 上の 2 つの d 次元表現

$$\xi \oplus q\xi \oplus \cdots \oplus q^{d-1}\xi, \quad \eta \oplus q\eta \oplus \cdots \oplus q^{d-1}\eta$$

を考えると，各々の Brauer 指標は

$$\sum_{i=0}^{d-1} q^i \xi_{\ell'}, \quad \sum_{i=0}^{d-1} q^i \eta_{\ell'}$$

であるが，仮定より

$$\{\xi_{\ell'}, \cdots, q^{d-1}\xi_{\ell'}\} \cap \{\eta_{\ell'}, \cdots, q^{d-1}\eta_{\ell'}\} = \varnothing$$

であるから，この 2 つの d 次元表現は共通の組成因子を持たず，とくに Brauer 指標が異なる．ゆえにある ℓ-正則元 $\alpha \in \mathbb{F}_{q^d}^{\times}$ が存在して

$$\sum_{i=0}^{d-1} q^i \xi(\alpha) \neq \sum_{i=0}^{d-1} q^i \eta(\alpha)$$

とできる．α を $f \in \mathcal{F}$ の根とし，$a = \deg(f)$ とおくと

$$\sum_{i=0}^{d-1} q^i \xi(\alpha) = \frac{d}{a} \sum_{\alpha \text{ は } f(X)=0 \text{ の根}} \xi(\alpha)$$

であり，同様に

$$\sum_{i=0}^{d-1} q^i \eta(\alpha) = \frac{d}{a} \sum_{\alpha \text{ は } f(X)=0 \text{ の根}} \eta(\alpha)$$

であるから，

$$\sum_{\alpha \text{ は } f(X)=0 \text{ の根}} \xi(\alpha) \neq \sum_{\alpha \text{ は } f(X)=0 \text{ の根}} \eta(\alpha)$$

を得る．とくに $S(\varphi)$ と $S(\psi)$ の Brauer 指標はこの ℓ-正則既約多項式 $f \in \mathcal{F}$ に台を持つ $\boldsymbol{\mu}$ に対して値が異なるので，$S(\varphi) \not\simeq S(\psi)$ である．

$[\xi_{\ell'}] = [\eta_{\ell'}]$ とする．同型 $S(\varphi) \simeq S(\psi)$ の存在を示すには $S(\varphi)$ と $S(\psi)$ の Brauer 指標が等しいことを示せばよい．

$f \in \mathcal{F}$ を $\mathbb{F}_q$ 上の ℓ-正則既約多項式で $a = \deg(f)$ が d の約数だとすると，$f(X) = 0$ の根は

$$\alpha, \alpha^q, \cdots, \alpha^{q^{a-1}}$$

であるから，補題 6.1 より

$$\sum_{\alpha \text{ は } f(X)=0 \text{ の根}} \xi(\alpha) = \sum_{i=0}^{a-1} \xi_{\ell'}(\alpha^{q^i})$$

である．ところが仮定よりある $s \in \mathbb{Z}$ が存在して $q^s \eta_{\ell'} = \xi_{\ell'}$ であるから

$$\sum_{i=0}^{a-1} \xi_{\ell'}(\alpha^{q^i}) = \sum_{i=0}^{a-1} \eta_{\ell'}(\alpha^{q^{i+s}}) = \sum_{\alpha \text{ は } f(X)=0 \text{ の根}} \eta(\alpha)$$

を得る．ゆえに $S(\varphi)$ と $S(\psi)$ の Brauer 指標は等しい．　□

定義 6.3　(n, ℓ)-index の右下成分を空白にした

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} d_1, & \cdots, & d_N & m_1, & \cdots, & m_N \\ [\alpha_1], & \cdots, & [\alpha_N] & & & \end{array}\right)$$

が (n, ℓ)**-cuspidal index** とは

(i) $\alpha_i \in \mathbb{F}_{q^{d_i}}^{\times}$ は ℓ-正則元で，ℓ-元 $\beta_i \in \mathbb{F}_{q^{d_i}}^{\times}$ が存在して $\#[\alpha_i \beta_i] = d_i$

(ii) $m_i \in \mathbb{N}$ で $\sum_{i=1}^{N} m_i d_i = n$

(iii) $[\alpha_i] = [\alpha_j]$（$i \neq j$）ならば $d_i \neq d_j$

をみたすときを言う．ただし，$1, \cdots, N$ を並べ替えたものは同じ (n, ℓ)-cuspidal index とみなす．

(n,ℓ)-cuspidal index

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} d_1, & \cdots, & d_N & m_1, & \cdots, & m_N \\ [\alpha_1], & \cdots, & [\alpha_N] & & & \end{array}\right)$$

に対し，$\#[\alpha_i\beta_i]=d_i$ となる β_i をとり，$\mathbb{E}^\times \simeq \mathbb{Q}_{p'}/\mathbb{Z}$ の誘導する同型

$$\mathbb{F}_{q^{d_i}}^\times \simeq \frac{1}{q^{d_i}-1}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$$

のもとで $\alpha_i\beta_i \in \mathbb{F}_{q^{d_i}}^\times$ に対応する元を ξ_i とする．$\varphi_i=[\xi_i]$ かつ

$$L=\underbrace{\mathrm{GL}_{d_1}(q)\times\cdots\times\mathrm{GL}_{d_1}(q)}_{m_1\text{ 個}}\times\cdots\times\underbrace{\mathrm{GL}_{d_N}(q)\times\cdots\times\mathrm{GL}_{d_N}(q)}_{m_N\text{ 個}}$$

$$X=\underbrace{S(\varphi_1)\otimes\cdots\otimes S(\varphi_1)}_{m_1\text{ 個}}\otimes\cdots\otimes\underbrace{S(\varphi_N)\otimes\cdots\otimes S(\varphi_N)}_{m_N\text{ 個}}$$

とおくと，$\mu=(d_1^{m_1}d_2^{m_2}\cdots d_N^{m_N})\models n$ として $L=L_\mu(q)$ は $G=\mathrm{GL}_n(q)$ の標準放物型部分群 $P_\mu(q)$ の Levi 部分であり，X は既約 cuspidal $\mathbb{F}L$-加群である．すなわち (L_μ,X) は cuspidal 対である．これを (n,ℓ)-cuspidal index

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} d_1, & \cdots, & d_N & m_1, & \cdots, & m_N \\ [\alpha_1], & \cdots, & [\alpha_N] & & & \end{array}\right)$$

が定める cuspidal 対と呼ぶ．以下では Harish-Chandra 誘導 $R_{L_\mu}^{L_{(n)}}(X)$ を $R_L^G(X)$ と書く．

補題 6.2 $G=\mathrm{GL}_n(q)$ とし，(n,ℓ)-cuspidal index が定める cuspidal 対を

$$(L_{\mu_1},X_1),\quad (L_{\mu_2},X_2)$$

とする．$w\in S_n$ と $u\in N_G(L_{\mu_2}(q))\cap S_n$ が存在して

$$wI_{\mu_1}w^{-1}=I_{\mu_2},\ \ {}^{uw}X_1\simeq X_2$$

ならば，$(L_{\mu_1},X_1),(L_{\mu_2},X_2)$ を定めた (n,ℓ)-cuspidal index は一致する．

証明　$L_{\mu_1}(q)$ と $L_{\mu_2}(q)$ はともに一般線形群 $\mathrm{GL}_d(q)$ の直積であるが，$wI_{\mu_1}w^{-1} = I_{\mu_2}$ より $wL_{\mu_1}(q)w^{-1} = L_{\mu_2}(q)$ であるから，各 $d \in \mathbb{N}$ に対し $\mathrm{GL}_d(q)$ の $L_{\mu_1}(q), L_{\mu_2}(q)$ における重複度は一致する．すなわち，(n,ℓ)-cuspidal index で考えれば $\{i \mid d_i = d\}$ に対する m_i の和が等しい．よって $\mathrm{GL}_d(q)$ の部分だけ取り出して考えれば最初からすべての d_i が d に等しいと仮定しても一般性を失わない．このとき，${}^{uw}X_1 \simeq X_2$ と $u \in N_G(L_{\mu_2}(q)) \cap S_n$ より，

$$X_1 \simeq S(\varphi_1)^{\otimes m_1} \otimes \cdots \otimes S(\varphi_N)^{\otimes m_N} =: V_1 \otimes \cdots \otimes V_M$$

と書けば，ある $\sigma \in S_M$ が存在して $X_2 \simeq V_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes V_{\sigma(M)}$ となる．ここで，命題 6.1 より

$$\begin{pmatrix} d \\ [\alpha_1] \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} d \\ [\alpha_N] \end{pmatrix}$$

が互いに非同型な $S(\varphi_i)$ を与えることに注意すれば，(L_{μ_1}, X_1) を定める (n,ℓ)-cuspidal index に

$$\begin{pmatrix} d \\ [\alpha_1] \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} d \\ [\alpha_N] \end{pmatrix}$$

が重複度 $m_1, \cdots, m_N$ で現れるならば (L_{μ_2}, X_2) を定める (n,ℓ)-cuspidal index にも

$$\begin{pmatrix} d \\ [\alpha_1] \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} d \\ [\alpha_N] \end{pmatrix}$$

が同じ重複度 $m_1, \cdots, m_N$ で現れることがわかる．よってふたつの (n,ℓ)-cuspidal index は一致する．　$\square$

本節の目標は定理 6.1 を示すことであるが，そのため補題をひとつ準備しておく．

補題 6.3　G を有限群，K を G の標数 0 の分解体，V を既約 KG-加群とすると，任意の $v_1, v_2 \in V$ に対し次式が成り立つ．

$$\sum_{g \in G} gv_1 \otimes g^{-1}v_2 = \frac{|G|}{\dim V} v_2 \otimes v_1$$

証明 V に基底 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ をとり G の表現を

$$\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}_n(K)$$

と行列表示すると，補題 5.7 の証明と同様の Schur の補題を用いた標準的な議論により

$$\sum_{g \in G} \rho_{ij}(g)\rho_{kl}(g^{-1}) = \delta_{il}\delta_{jk}\frac{|G|}{\dim V}$$

を得るから

$$\begin{aligned}\sum_{g \in G} ge_j \otimes g^{-1}e_l &= \sum_{g\in G}\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n \rho_{ij}(g)\rho_{kl}(g^{-1})e_i \otimes e_k \\ &= \sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n \left(\sum_{g\in G}\rho_{ij}(g)\rho_{kl}(g^{-1})\right) e_i \otimes e_k \\ &= \sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n \delta_{il}\delta_{jk}\frac{|G|}{\dim V}e_i\otimes e_k = \frac{|G|}{\dim V}e_l \otimes e_j\end{aligned}$$

となり題意の式を得る． □

定理 6.1 $G = \mathrm{GL}_n(q)$ とする．(n, ℓ)-cuspidal index

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} d_1, & \cdots, & d_N & m_1, & \cdots, & m_N \\ [\alpha_1], & \cdots, & [\alpha_N] & & & \end{array}\right)$$

の定める cuspidal 対 (L, X) に対し次の $\mathbb{F}$-代数同型が成り立つ．

$$\mathrm{End}_{\mathbb{F}G}(R_L^G(X)) \simeq \mathcal{H}_{m_1}(q^{d_1}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_{m_N}(q^{d_N})$$

証明 $\mu = (d_1^{m_1} \cdots d_N^{m_N}) \models n$ とすると $L = L_\mu(q)$ である．命題 2.1 より

$$\mathrm{End}_{\mathbb{F}G}(R_L^G(X)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}L_\mu(q)}(X, {}^*R_L^G \circ R_L^G(X))$$

であり，定理 2.1（Mackey 公式）より

$${}^*R_L^G \circ R_L^G(X) \simeq \bigoplus_{w \in \mathcal{D}_{\mu\mu}} R_{L_\mu \cap wL_\mu w^{-1}}^{L_\mu} \circ {}^*R_{L_\mu\cap wL_\mu w^{-1}}^{wL_\mu w^{-1}}({}^wX)$$

であるが，X は cuspidal 加群なので $L_\mu \cap wL_\mu w^{-1} \subsetneq wL_\mu w^{-1}$ ならば

$$ {}^*R^{wL_\mu w^{-1}}_{L_\mu \cap wL_\mu w^{-1}}({}^wX) = 0 $$

となる．ゆえに

$$ {}^*R^G_L \circ R^G_L(X) = \bigoplus_{w \in \mathcal{D}_{\mu\mu} \cap N_G(L_\mu(q))} {}^wX $$

である．$W(L,X) = S_{m_1} \times \cdots \times S_{m_N}$ とし，$w \in S_{m_i}$ が

$$ 1 + \sum_{k=1}^{i-1} m_k d_k, 2 + \sum_{k=1}^{i-1} m_k d_k, \cdots, m_i d_i + \sum_{k=1}^{i-1} m_k d_k $$

を d_i 個ずつまとめて置換すると考えることにより $W(L,X) \subseteq \mathcal{D}_{\mu\mu} \cap N_G(L_\mu(q))$ とみなす．このとき，

$$ \dim \mathrm{End}_{\mathbb{F}G}(R^G_L(X)) = \# W(L,X) $$

である．実際，$w \in \mathcal{D}_{\mu\mu} \cap N_G(L_\mu(q))$ ならば

$$ wS_\mu w^{-1} = w(S_n \cap L_\mu(q))w^{-1} = S_n \cap L_\mu(q) = S_\mu $$

であるから，定理 1.1 より

$$ S_\mu = wS_\mu w^{-1} \cap S_\mu = S_{wI_\mu w^{-1} \cap I_\mu} $$

つまり $I_\mu = wI_\mu w^{-1}$ を得るので，w は

$$ \{1,2,\cdots,n\} = \underbrace{\{1,\cdots,d_1\}}_{d_1\text{ 個}} \bigsqcup \underbrace{\{d_1+1,\cdots,2d_1\}}_{d_1\text{ 個}} \bigsqcup \cdots \bigsqcup \underbrace{\{n-d_N+1,\cdots,n\}}_{d_N\text{ 個}} $$

という，d_i 個ずつまとめて考えたブロックの並び替えでなければならない．

ここでさらに ${}^wX \cong X$ という条件を課すと，補題 6.2 の証明と同様に w は d_i 個ずつまとめて考えたブロック m_i 個を並び替えることしかできないので $w \in W(L,X)$ を得る．以上から $w \in \mathcal{D}_{\mu\mu} \cap N_G(L_\mu(q))$ かつ ${}^wX \simeq X$ であるための必要十分条件が $w \in W(L,X)$ であることがわかるので，

$$ \dim \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}L_\mu(q)}(X, {}^*R^G_L \circ R^G_L(X)) = \# W(L,X) $$

となり，$\dim \mathrm{End}_{\mathbb{F}G}(R_L^G(X)) = \#W(L,X)$ を得る．

$W(L,X)$ の $X = S(\varphi_1)^{\otimes m_1} \otimes \cdots \otimes S(\varphi_N)^{\otimes m_N}$ への作用を $w \in S_{m_i}$ が $x_1 \otimes \cdots \otimes x_{m_i} \in S(\varphi_i)^{\otimes m_i}$ に

$$x_1 \otimes \cdots \otimes x_{m_i} \mapsto x_{w^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes x_{w^{-1}(m_i)}$$

で作用するとして定めよう．この作用を t_w で表わす．

$$L_\mu(q) = \mathrm{GL}_{d_1}(q)^{\times m_1} \times \cdots \times \mathrm{GL}_{d_N}(q)^{\times m_N}$$

の i 番目の成分 $l = (l_1, \cdots, l_{m_i}) \in \mathrm{GL}_{d_i}(q)^{\times m_i}$ に対し

$$wlw^{-1} = (l_{w^{-1}(1)}, \cdots, l_{w^{-1}(m_i)})$$

であるから，$x \in X$ に対し $wlw^{-1}t_w(x) = t_w(lx)$ が成り立つ．

さて Mackey 公式の証明を思い出せば，ベキ等元 $e_\mu \in \mathbb{F}G$ を

$$e_\mu = \frac{1}{|U_\mu(q)|} \sum_{u \in U_\mu(q)} u$$

として，${}^wX$ が $\mathbb{F}L_\mu(q)$-部分加群

$$\mathbb{F}L_\mu(q)e_\mu w \otimes \mathrm{Infl}(X) \subseteq {}^*R_L^G \circ R_L^G(X) = e_\mu \mathbb{F}G \underset{\mathbb{F}P_\mu(q)}{\otimes} \mathrm{Infl}(X)$$

として実現されていることがわかる．そこで $w \in W(L,X)$ に対し，線形写像 $A_w : X \to {}^*R_L^G \circ R_L^G(X)$ を

$$A_w(x) = e_\mu w e_\mu \otimes t_{w^{-1}}(x) \in e_\mu \mathbb{F}G \underset{\mathbb{F}P_\mu(q)}{\otimes} \mathrm{Infl}(X)$$

で定義すると，$l \in L_\mu(q)$ に対し $w^{-1}lw \in L_\mu(q)$ だから

$$\begin{aligned} lA_w(x) &= le_\mu w e_\mu \otimes t_{w^{-1}}(x) = e_\mu w(w^{-1}lw)e_\mu \otimes t_{w^{-1}}(x) \\ &= e_\mu w e_\mu \otimes w^{-1}lwt_{w^{-1}}(x) = e_\mu w e_\mu \otimes t_{w^{-1}}(lx) = A_w(lx) \end{aligned}$$

より $A_w \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}L_\mu(q)}(X, {}^*R_L^G \circ R_L^G(X))$ であり，さらに

$$\mathrm{Im}\, A_w = \mathbb{F}L_\mu(q)e_\mu w \otimes \mathrm{Infl}(X)$$

となるから $\{A_w\}_{w\in W(L,X)}$ は１次独立でもある．そこで同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}L_\mu(q)}(X, {}^*R_L^G \circ R_L^G(X)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}G}(R_L^G(X), R_L^G(X))$$

により A_w に対応する元を $B_w \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}G}(R_L^G(X))$ とする．$\{A_w\}_{w\in W(L,X)}$ が１次独立かつ $\dim \mathrm{End}_{\mathbb{F}G}(R_L^G(X)) = \#W(L,X)$ だから，$\{B_w\}_{w\in W(L,X)}$ は $\mathrm{End}_{\mathbb{F}G}(R_L^G(X))$ の基底である．さらに，

$${}^*R_L^G \circ R_L^G(X) = e_\mu \mathbb{F}G \underset{\mathbb{F}P_\mu(q)}{\otimes} \mathrm{Infl}(X) \subseteq \mathbb{F}G \underset{\mathbb{F}P_\mu(q)}{\otimes} \mathrm{Infl}(X) = R_L^G(X)$$

と思うと，$g \in G$ に対し $B_w(g \otimes x) = gA_w(x)$ が成り立つ．基底 $\{B_w\}_{w\in W(L,X)}$ に関する構造定数を計算するため，

$$s = (j, j+1) \in S_{m_i} \subseteq W(L,X)$$

として $w \in W(L,X)$ に対し $B_sB_{w^{-1}}$ を計算すると

$$\begin{aligned} B_sB_{w^{-1}}(1\otimes x) &= B_s(e_\mu w^{-1}e_\mu \otimes t_w(x)) \\ &= e_\mu w^{-1} e_\mu A_s(1 \otimes t_w(x)) \\ &= e_\mu w^{-1} e_\mu (e_\mu s e_\mu \otimes t_s t_w(x)) = e_\mu w^{-1} e_\mu s e_\mu \otimes t_{sw}(x) \end{aligned}$$

であるが，ここで広義の分割 $n = \sum_{i=1}^{N} m_i d_i$ に合わせて $U_\mu(q)$ の元をブロック行列で表示し，m_id_i の分割の部分の $(j, j+1)$ ブロック成分にのみ

$$\begin{pmatrix} 1_{d_i} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1_{d_i} & \mathrm{Mat}_{d_i}(\mathbb{F}_q) & \\ & & & 1_{d_i} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1_{d_i} \end{pmatrix}$$

と任意の $\mathbb{F}_q$ の元が書き込まれた行列のなす部分群を U_s^- とし，そうではなく逆に $(j, j+1)$ ブロック成分のみ零行列という制約で定めた正規部分群を U_s^+ とすると，$U_\mu(q) = U_s^- U_s^+$ と半直積になるので

$$e_\mu w^{-1} e_\mu s e_\mu = \frac{1}{|U_\mu(q)|} \sum_{u' \in U_s^-} \sum_{u'' \in U_s^+} e_\mu w^{-1} u' u'' s e_\mu$$

と書ける．$w^{-1}u'w$ を計算するには，u' の行と列をともに

$$w^{-1}(1), \cdots, w^{-1}(n)$$

と番号付けし直せばいいだけである．$w^{-1}u'w$ は $m_i d_i$ の分割の部分の $(w^{-1}(j), w^{-1}(j+1))$ ブロック成分にのみ任意の $\mathbb{F}_q$ の元が書き込まれた行列であり，もし $\ell(sw) > \ell(w)$ ならば $w^{-1}(j) < w^{-1}(j+1)$ になるので $w^{-1}u'w \in U_\mu(q)$ を得る．同様に考えれば $u'' \in U_s^+$ に対して $s^{-1}u''s \in U_s^+$ であるから $(s^{-1}u''s)e_\mu = e_\mu$ となる．よって，$\ell(sw) > \ell(w)$ のとき

$$\begin{aligned} e_\mu w^{-1} e_\mu s e_\mu &= \frac{1}{|U_\mu(q)|} \sum_{u' \in U_s^-} \sum_{u'' \in U_s^+} e_\mu w^{-1} u' s (s^{-1} u'' s) e_\mu \\ &= \frac{1}{|U_s^-|} \sum_{u' \in U_s^-} e_\mu (w^{-1} u' w) w^{-1} s e_\mu = e_\mu w^{-1} s e_\mu \end{aligned}$$

となり

$$B_s B_{w^{-1}}(1 \otimes x) = e_\mu w^{-1} s e_\mu \otimes t_{sw}(x) = B_{w^{-1}s}(1 \otimes x)$$

より $B_s B_{w^{-1}} = B_{w^{-1}s}$ を得る．

同様に計算すると，$B_s^2(1 \otimes x) = e_\mu s e_\mu s e_\mu \otimes x$ である．

$$B_s^2 = \sum_{w \in W(L,X)} c_w B_w \quad (c_w \in \mathbb{F})$$

と書くと

$$B_w(1 \otimes x) = e_\mu w e_\mu \otimes t_{w^{-1}}(x) \in e_\mu \mathbb{F}G \underset{\mathbb{F}P_\mu(q)}{\otimes} \mathrm{Infl}(X)$$

であるから，$c_w \neq 0$ になるのは $e_\mu s e_\mu s e_\mu$ に $e_\mu w e_\mu L_\mu(q)$ の元が現れるときに限る．ここで $B_s^2 = \alpha B_1 + \beta B_s$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{F})$ の形であることを示す．実際，

$$\begin{cases} S_\mu = S_{d_1}^{\times m_1} \times \cdots \times S_{d_i}^{\times (j-1)} \times S_{d_i} \times S_{d_i} \times S_{d_i}^{\times (m_i - j - 1)} \times \cdots \times S_{d_N}^{\times m_N} \\ S'_\mu = S_{d_1}^{\times m_1} \times \cdots \times S_{d_i}^{\times (j-1)} \times S_{2d_i} \times S_{d_i}^{\times (m_i - j - 1)} \times \cdots \times S_{d_N}^{\times m_N} \end{cases}$$

とすれば，補題 1.17 より $P' = B_n(q)S'_\mu B_n(q)$ は G の部分群で

$$\langle U_\mu(q), s\rangle \subseteq P'$$

だから，$e_\mu s e_\mu s e_\mu \in \mathbb{F}P'$ である．他方，$e_\mu w e_\mu L_\mu(q)$ には $B_n(q)wS_\mu B_n(q)$ の元の 1 次結合しか現れないから，$c_w \neq 0$ ならば $e_\mu s e_\mu s e_\mu$ に $B_n(q)wS_\mu B_n(q)$ の元が現れ，しかもこの元は P' の元でもある．以上から

$$w \in S'_\mu \cap W(L, X) = \{1, s\}$$

を得る．そこで $B_s^2 = \alpha B_1 + \beta B_s$ と書いて，α, β の値を具体的に決めよう．

$$e_\mu s e_\mu s e_\mu \otimes x = \alpha e_\mu \otimes x + \beta e_\mu s e_\mu \otimes t_s(x)$$

であるから，

$$\begin{aligned}
e_\mu s e_\mu s e_\mu &= \frac{1}{|U_\mu(q)|}\sum_{u'\in U_s^-}\sum_{u''\in U_s^+} e_\mu s u' u'' s e_\mu \\
&= \frac{1}{|U_\mu(q)|}\sum_{u'\in U_s^-}\sum_{u''\in U_s^+} e_\mu s u' s \underbrace{(s^{-1}u''s)}_{U_s^+ \text{ の元}} e_\mu \\
&= \frac{1}{|U_s^-|}\sum_{u'\in U_s^-} e_\mu s u' s e_\mu \\
&= \frac{1}{|U_s^-|}\sum_{w\in\mathcal{D}_{\mu\mu}} \sum_{\substack{u'\in U_s^- \\ su's\in P_\mu(q)wP_\mu(q)}} e_\mu s u' s e_\mu
\end{aligned}$$

において，$w \neq 1, s$ の項は無視してよく

$$\begin{aligned}
e_\mu s e_\mu s e_\mu \otimes x =& \frac{1}{|U_s^-|}\sum_{\substack{u'\in U_s^- \\ su's\in P_\mu(q)}} e_\mu s u' s e_\mu \otimes x \\
&+ \frac{1}{|U_s^-|}\sum_{\substack{u'\in U_s^- \\ su's\in P_\mu(q)sP_\mu(q)}} e_\mu s u' s e_\mu \otimes x
\end{aligned}$$

と書ける．

$$u' = \begin{pmatrix} 1_{d_i} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1_{d_i} & A & & \\ & & & 1_{d_i} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1_{d_i} \end{pmatrix} \quad (A \in \mathrm{Mat}_{d_i}(\mathbb{F}_q))$$

に対し

$$su's = \begin{pmatrix} 1_{d_i} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1_{d_i} & 0_{d_i} & & \\ & & A & 1_{d_i} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1_{d_i} \end{pmatrix}$$

であり，$P_\mu(q)$ はブロック上三角行列だから $su's \in P_\mu(q)$ となるのは $A = 0$ のときに限る．$|U_s^-| = q^{d_i^2}$ だから結局第 1 項は

$$\frac{1}{|U_s^-|} \sum_{\substack{u' \in U_s^- \\ su's \in P_\mu(q)}} e_\mu su'se_\mu \otimes x = q^{-d_i^2} e_\mu \otimes x$$

となる．次に $su's \in P_\mu(q)sP_\mu(q)$ となる場合を考える．

$$P_\mu(q)sP_\mu(q) = U_\mu(q)sU_\mu(q)L_\mu(q)$$

の右辺をブロック行列の積で書くと，$A' = (u_{j,j+1}v_{j,j+1} + 1)l_{j+1}$ として

$$\begin{pmatrix} 1 & u_{12} & \cdots \\ & 1 & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 0 & 1 & & \\ & & & 1 & 0 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & v_{12} & \cdots \\ & 1 & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & & \\ & l_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} l_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & l_{j-1} & & & * \\ & & & u_{j,j+1}l_j & A' & \\ & & & l_j & v_{j,j+1}l_{j+1} & \\ & & & & & l_{j+2} \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix} = su's$$

であるから，$u_{j,j+1}l_j = 1$，$l_j = A$ より A が可逆であることが必要で，逆に A が可逆ならば $su's \in P_\mu(q)sP_\mu(q)$ である．また，A が可逆ならば

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ A & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & A^{-1} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \begin{pmatrix} -A^{-1} & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 1 & A^{-1} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$$

より $u \in U_\mu(q), l \in L_\mu(q)$ が存在して $su's = ulsu$ と書けるから，

$$e_\mu su'se_\mu = e_\mu lse_\mu = e_\mu s(s^{-1}ls)e_\mu = e_\mu se_\mu s^{-1}ls$$

となる．そこで，$g \in \mathrm{GL}_{d_i}(q)$ に対し

$$s_g = \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & -g^{-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_{d_i}(q) \times \mathrm{GL}_{d_i}(q)$$

とおくと，

$$\frac{1}{|U_s^-|} \sum_{\substack{u' \in U_s^- \\ su's \in P_\mu(q)sP_\mu(q)}} e_\mu su'se_\mu \otimes x = q^{-d_i^2} \sum_{g \in \mathrm{GL}_{d_i}(q)} e_\mu se_\mu \otimes s_g x$$

である．ここで $S(\varphi_i)$ への $-1 \in \mathrm{GL}_{d_i}(q)$ の作用はスカラー倍であり，その指標値は補題 5.9 より

$$\xi_i = \frac{r_i}{q^{d_i} - 1}, \quad \varphi_i = [\xi_i]$$

として

$$(q-1)\cdots(q^{d_i-1}-1)\theta(-1)^{r_i} = \theta(-1)^{r_i} \dim S(\varphi_i)$$

になるから，$-1 \in \mathrm{GL}_{d_i}(q)$ は $S(\varphi_i)$ へ $\varepsilon_i := \theta(-1)^{r_i} = \pm 1$ で作用する．

$$\frac{|\,\mathrm{GL}_{d_i}(q)|}{\dim S(\varphi_i)} = \frac{(q^{d_i}-1)(q^{d_i}-q)\cdots(q^{d_i}-q^{d_i-1})}{(q-1)\cdots(q^{d_i-1}-1)} = q^{\frac{d_i(d_i-1)}{2}}(q^{d_i}-1)$$

なので，補題 6.3 を適用してから $\bmod \ell$ 還元することが出来て，$S(\varphi_i)$ では

$$\begin{aligned} \sum_{g \in \mathrm{GL}_{d_i}(q)} e_\mu se_\mu \otimes s_g x &= \varepsilon_i \sum_{g \in \mathrm{GL}_{d_i}(q)} e_\mu se_\mu \otimes (\cdots, \underbrace{g}_{j}, \underbrace{g^{-1}}_{j+1}, \cdots)x \\ &= \varepsilon_i \frac{|\,\mathrm{GL}_{d_i}(q)|}{\dim S(\varphi_i)} e_\mu se_\mu \otimes t_s(x) \end{aligned}$$

が成り立つ．以上から第 2 項も求まったので，まとめて書けば

$$B_s^2(1\otimes x) = q^{-d_i^2}e_\mu\otimes x + \varepsilon_i q^{\frac{d_i(d_i-1)}{2}-d_i^2}(q^{d_i}-1)e_\mu s e_\mu\otimes t_s(x)$$

となる．すなわち

$$\alpha = q^{-d_i^2}, \beta = \varepsilon_i q^{-\frac{d_i(d_i+1)}{2}}(q^{d_i}-1)$$

である．そこで $\lambda_i = \varepsilon_i q^{\frac{d_i(d_i+1)}{2}}$ とおき，$T_s = \lambda_i B_s$ と定義すれば

$$\begin{aligned} T_s^2 - (q^{d_i}-1)T_s - q^{d_i} &= q^{d_i(d_i+1)}B_s^2 - \varepsilon_i q^{\frac{d_i(d_i+1)}{2}}(q^{d_i}-1)B_s - q^{d_i} \\ &= q^{d_i(d_i+1)}(B_s^2 - \beta B_s - \alpha B_1) = 0 \end{aligned}$$

なので $(T_s - q^{d_i})(T_s+1) = 0$ である．$w\in S_{m_i}$ に対し $T_w = \lambda_i^{\ell(w)}B_{w^{-1}}$ とおくと，$\ell(sw) > \ell(w)$ ならば

$$T_sT_w = \lambda_i^{\ell(sw)}B_sB_{w^{-1}} = \lambda_i^{\ell(sw)}B_{w^{-1}s} = T_{sw}$$

である．ゆえに，$s,t\in S_{m_i}$ が $s=(j,j+1), t=(k,k+1)$ の形ならば

- $sts = tst$ ならば $T_sT_tT_s = T_{sts} = T_{tst} = T_tT_sT_t$
- $st = ts$ ならば $T_sT_t = T_{st} = T_{ts} = T_tT_s$

が成り立つから全射 $\mathbb{F}$-代数準同型

$$\mathcal{H}_{m_i}(q^{d_i}) \longrightarrow \bigoplus_{w\in S_{m_i}} \mathbb{F}T_w$$

が定義出来るが，両辺の次元は $m_i!$ なのでこの準同型は同型である．

さらに，$s\in S_{m_i}, t\in S_{m_j}$ $(i\neq j)$ ならば $\ell(s)+\ell(t) = \ell(st)$ なので，$\mathrm{End}_{\mathbb{F}G}(R_L^G(X))$ において $T_sT_t = T_tT_s$ となることに注意すれば

$$\mathrm{End}_{\mathbb{F}G}(R_L^G(X)) \simeq \mathcal{H}_{m_1}(q^{d_1})\otimes\cdots\otimes\mathcal{H}_{m_N}(q^{d_N})$$

が得られる． □

6.2 Dipper の Howlett-Lehrer 理論

(L, X) を cuspidal 対とするとき，$R_L^G(X)$ の自己準同型代数の構造を調べ，(L, X)-系列に属する既約加群との対応を与える理論を Howlett-Lehrer 理論と呼ぶ．Howlett と Lehrer は $\mathbb{C}$ 上の表現を調べたが，ここでは $\mathbb{F}$ 上の表現を考察するのでもう少し議論が必要である．

(L, X) を cuspidal 対，Q を X の射影被覆とする．R_L^G は完全関手だから $\beta : R_L^G(Q) \to R_L^G(X)$ は全射であり，補題 2.4 より $R_L^G(Q)$ も射影加群である．

補題 6.4 $P = R_L^G(Q)$，$M = R_L^G(X)$，$\beta : P \to M$ を上の通りとし，

$$\mathcal{E} = \mathrm{End}_{\mathbb{F}G}(P), \quad \mathcal{H} = \mathrm{End}_{\mathbb{F}G}(M)$$

とおくと次が成立．

(1) $\varphi \in \mathcal{H}$ に $\varphi \circ \beta \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}G}(P, M)$ を対応させることにより次の 2 つのベクトル空間は同型．

$$\mathcal{H} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}G}(M, M) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}G}(P, M)$$

(2) 任意の $\varphi \in \mathcal{E}$ は $\mathrm{Ker}(\beta)$ を保つ．とくに

$$J = \{\varphi \in \mathcal{E} \mid \mathrm{Im}(\varphi) \subseteq \mathrm{Ker}(\beta)\}$$

は $\mathcal{E}$ の両側イデアルで，$\mathbb{F}$-代数として $\mathcal{E}/J \simeq \mathcal{H}$.

証明 $f : \varphi \mapsto \varphi \circ \beta$ とする．β は全射なので，$\varphi \circ \beta = 0$ ならば $\varphi = 0$ であるから f は単射である．ゆえに，(1) を示すには両辺の次元が等しいことをいえば十分である．X が cuspidal 加群であることに注意すれば

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}G}(P, M) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}L}(Q, {}^*R_L^G \circ R_L^G(X)) \\ &\simeq \bigoplus_{w \in \mathcal{D}_{\mu\mu} \cap N_G(L)} \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}L}(Q, {}^wX)\end{aligned}$$

が成り立つから

$$\dim \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}G}(P, M) = \#\{w \in \mathcal{D}_{\mu\mu} \cap N_G(L) \mid {}^wX \simeq X\}$$

であり，同様に

$$\dim \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}G}(M, M) = \#\{w \in \mathcal{D}_{\mu\mu} \cap N_G(L) \mid {}^{w}X \simeq X\}$$

であるから両辺の次元は等しい．ゆえに $f : \mathcal{H} \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}G}(P, M)$ である．

$\varphi \in \mathcal{E}$ に対し $\beta \circ \varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}G}(P, M)$ であるから，(1) よりある $\psi \in \mathcal{H}$ が存在して $\beta \circ \varphi = \psi \circ \beta$ と書ける．このことより

$$\beta \circ \varphi(\mathrm{Ker}(\beta)) = \psi \circ \beta(\mathrm{Ker}(\beta)) = 0$$

つまり $\varphi(\mathrm{Ker}(\beta)) \subseteq \mathrm{Ker}(\beta)$ を得るから，任意の $\varphi \in \mathcal{E}$ は $\mathrm{Ker}(\beta)$ を保つ．

$P/\mathrm{Ker}(\beta) \simeq M$ と $\varphi(\mathrm{Ker}(\beta)) \subseteq \mathrm{Ker}(\beta)$ より，$\varphi \in \mathcal{E}$ は $\mathrm{End}_{\mathbb{F}G}(M) \simeq \mathcal{H}$ の元を定めるから，$\mathbb{F}$-代数準同型 $\mathcal{E} \to \mathcal{H}$ が定義される．ここで P は射影的であることに注意すると，任意の $\psi \in \mathcal{H}$ に対し，

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \\
 & P \arrow[ul, dashed, "\exists\varphi"] \arrow[u, "\psi\circ\beta"'] &
\end{tikzcd}$$

なので準同型 $\mathcal{E} \to \mathcal{H}$ のもとで $\varphi \mapsto \psi$ となり，$\mathcal{E} \to \mathcal{H}$ は全射である．

$$J = \{\varphi \in \mathcal{E} \mid \mathrm{Im}(\varphi) \subseteq \mathrm{Ker}(\beta)\}$$

とおけば，$\mathcal{E}/J \simeq \mathcal{H}$ かつ J は $\mathcal{E}$ の両側イデアルである．　□

以下 A を有限次元 $\mathbb{F}$-代数とし，射影 A-加群 P からの全射準同型

$$\beta : P \longrightarrow M$$

が与えられていて，

(Dipper の仮定)：任意の $\varphi \in \mathrm{End}_A(P)$ は $\mathrm{Ker}(\beta)$ を保つ．

をみたすと仮定する．たとえば，$G = \mathrm{GL}_n(q), A = \mathbb{F}G$ として cuspidal 対 (L, X) を考えると，射影被覆 $Q \to X$ の Harish-Chandra 誘導

$$R_L^G(Q) \to R_L^G(X)$$

は補題 6.4(2) より Dipper の仮定をみたす．このとき，

$$\mathcal{E} = \mathrm{End}_A(P), \quad \mathcal{H} = \mathrm{End}_A(M)$$

$$J = \{\varphi \in \mathcal{E} \mid \mathrm{Im}(\varphi) \subseteq \mathrm{Ker}(\beta)\}$$

とすると $\mathbb{F}$-代数同型 $\mathcal{E}/J \simeq \mathcal{H}$ が成り立つ.

定義 6.4　$\mathcal{H}$ の積を写像の合成の順序を逆にして

$$\varphi_1\varphi_2 := \varphi_2 \circ \varphi_1 : M \xrightarrow{\varphi_1} M \xrightarrow{\varphi_2} M$$

と定めたものを $\mathcal{H}^{\mathrm{op}}$ と書き，$\mathcal{H}$ の逆転代数と呼ぶ.

この定義のもとで M は $(A, \mathcal{H}^{\mathrm{op}})$-両側加群になる．また，逆転代数 $\mathcal{E}^{\mathrm{op}}$ も $\mathcal{H}^{\mathrm{op}}$ と同様に定義する．$\mathcal{H}$ が A 型 Hecke 代数 $\mathcal{H}_n(q)$ の場合は生成元 T_i のみたす基本関係が左右対称であるから，生成元を固定する反自己同型をもち,

$$\mathcal{H}_n(q)^{\mathrm{op}} \simeq \mathcal{H}_n(q)$$

である．本節の目標は定理 6.2 を示すことであるが，そのためまず補題を準備しよう.

補題 6.5　P を射影 A-加群，V を A-加群とする．このとき,

$$\{W : V \text{ の部分加群} \mid \mathrm{Hom}_A(P, W) = 0\}$$

には包含関係に関する最大元が存在する．この最大部分加群を $t_P(V)$ と書く.

証明　V の部分加群 W_1, W_2 に対し

$$\mathrm{Hom}_A(P, W_1) = 0, \quad \mathrm{Hom}_A(P, W_2) = 0$$

が成り立つとき，$\mathrm{Hom}_A(P, W_1 + W_2) = 0$ を示せばよい．完全系列

$$0 \to W_1 \to W_1 + W_2 \to W_1 + W_2/W_1 \to 0$$

に $\mathrm{Hom}_A(P, -)$ を施すと，P が射影 A-加群であることより

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(P, W_1) \to \mathrm{Hom}_A(P, W_1 + W_2) \to \mathrm{Hom}_A(P, W_1 + W_2/W_1) \to 0$$

も完全系列であるが，$\mathrm{Hom}_A(P, W_1) = 0$ だから

$$\mathrm{Hom}_A(P, W_1+W_2) \simeq \mathrm{Hom}_A(P, W_1+W_2/W_1)$$

を得る．他方，完全系列

$$W_2 \to W_2/W_1 \cap W_2 \to 0$$

に $\mathrm{Hom}_A(P, -)$ を施すと

$$\mathrm{Hom}_A(P, W_2) \to \mathrm{Hom}_A(P, W_2/W_1 \cap W_2) \to 0$$

であるから，$\mathrm{Hom}_A(P, W_2) = 0$ より $\mathrm{Hom}_A(P, W_2/W_1 \cap W_2) = 0$ を得る．

$$W_1 + W_2/W_1 \simeq W_2/W_1 \cap W_2$$

に注意すれば，以上から $\mathrm{Hom}_A(P, W_1+W_2) = 0$ となる．　□

定義 6.5　A-加群 V に対し，$t_P(V)$ を V の P**-torsion 部分加群**と呼ぶ．

補題 6.6　A-加群の全射準同型 $\beta : P \to M$ に対し上記の設定を仮定する．このとき，L を既約 $\mathcal{H}^{\mathrm{op}}$-加群とし

$$V = M \underset{\mathcal{H}^{\mathrm{op}}}{\otimes} L / t_P(M \underset{\mathcal{H}^{\mathrm{op}}}{\otimes} L)$$

とおくと，V は $\mathrm{Hom}_A(P, V) \simeq L$ をみたす既約 A-加群である．さらに，$\mathrm{Hom}_A(P, V)$ の $\mathcal{E}^{\mathrm{op}}$-加群構造を

$$\varphi f(p) = f(\varphi p) \quad (\varphi \in \mathcal{E},\ f \in \mathrm{Hom}_A(P, V),\ p \in P)$$

により定めると $\mathrm{Hom}_A(P, V) \simeq L$ は $\mathcal{H}^{\mathrm{op}}$-加群同型である．

証明　完全系列

$$0 \to t_P(M \underset{\mathcal{H}^{\mathrm{op}}}{\otimes} L) \to M \underset{\mathcal{H}^{\mathrm{op}}}{\otimes} L \to V \to 0$$

に $\mathrm{Hom}_A(P, -)$ を施すと

$$\mathrm{Hom}_A(P, t_P(M \underset{\mathcal{H}^{\mathrm{op}}}{\otimes} L)) = 0$$

だから，$\mathcal{E}^{\mathrm{op}}$-加群同型

$$\mathrm{Hom}_A(P,V) \simeq \mathrm{Hom}_A(P, M \underset{\mathcal{H}^{\mathrm{op}}}{\otimes} L)$$

を得る．ここで，全射準同型 $\mathcal{E} \twoheadrightarrow \mathcal{H}$ により L を既約 $\mathcal{E}^{\mathrm{op}}$-加群とみなせば

$$M \underset{\mathcal{H}^{\mathrm{op}}}{\otimes} L = M \underset{\mathcal{E}^{\mathrm{op}}}{\otimes} L$$

であるから，$\mathrm{Hom}_A(P,V) \simeq \mathrm{Hom}_A(P, M \underset{\mathcal{E}^{\mathrm{op}}}{\otimes} L)$ と思うこととする．

P は射影 A-加群なので $P \oplus P' \simeq A^n$ となる A-加群 P' と自然数 n をとることができて，同型

$$\mathrm{Hom}_A(A^{\oplus n}, M) \underset{\mathcal{E}^{\mathrm{op}}}{\otimes} L \simeq \mathrm{Hom}_A(A^{\oplus n}, M \underset{\mathcal{E}^{\mathrm{op}}}{\otimes} L)$$

が成り立つことと，この同型のもとで

$$\mathrm{Hom}_A(P, M) \underset{\mathcal{E}^{\mathrm{op}}}{\otimes} L \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P, M \underset{\mathcal{E}^{\mathrm{op}}}{\otimes} L)$$
$$\mathrm{Hom}_A(P', M) \underset{\mathcal{E}^{\mathrm{op}}}{\otimes} L \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P', M \underset{\mathcal{E}^{\mathrm{op}}}{\otimes} L)$$

であることに注意すれば，$\mathcal{E}^{\mathrm{op}}$-加群同型

$$\mathrm{Hom}_A(P, M) \underset{\mathcal{E}^{\mathrm{op}}}{\otimes} L \simeq \mathrm{Hom}_A(P, M \underset{\mathcal{E}^{\mathrm{op}}}{\otimes} L)$$

を得る．ゆえに，$\mathcal{E}^{\mathrm{op}}$-加群として

$$\mathrm{Hom}_A(P,V) \simeq \mathrm{Hom}_A(P, M) \underset{\mathcal{E}^{\mathrm{op}}}{\otimes} L$$

である．ところが，$(A, \mathcal{E}^{\mathrm{op}})$-両側加群の完全系列

$$0 \to \mathrm{Ker}(\beta) \to P \to M \to 0$$

に $\mathrm{Hom}_A(P, -)$ を施せば

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(P, \mathrm{Ker}(\beta)) \to \mathrm{Hom}_A(P,P) \to \mathrm{Hom}_A(P,M) \to 0$$

つまり $(\mathcal{E}^{\mathrm{op}}, \mathcal{E}^{\mathrm{op}})$-両側加群の完全系列

$$0 \to J \to \mathcal{E} \to \mathrm{Hom}_A(P,M) \to 0$$

を得るから，$\mathcal{H} \simeq \mathcal{E}/J$ より $(\mathcal{E}^{\mathrm{op}}, \mathcal{E}^{\mathrm{op}})$-両側加群同型

$$\mathrm{Hom}_A(P, M) \simeq \mathcal{H}$$

が成り立つ．ゆえに，$\mathcal{E}^{\mathrm{op}}$-加群として

$$\mathrm{Hom}_A(P, V) \simeq \mathrm{Hom}_A(P, M) \underset{\mathcal{E}^{\mathrm{op}}}{\otimes} L \simeq \mathcal{H} \underset{\mathcal{E}^{\mathrm{op}}}{\otimes} L \simeq L$$

である．次に V が既約 A-加群になることを示そう．まず上のことより $V \neq 0$ である．$U \subseteq M \underset{\mathcal{H}^{\mathrm{op}}}{\otimes} L$ を部分 A-加群とする．完全系列

$$0 \longrightarrow U \longrightarrow M \underset{\mathcal{H}^{\mathrm{op}}}{\otimes} L$$

に $\mathrm{Hom}_A(P, -)$ を施せば，$\mathcal{E}^{\mathrm{op}}$-加群の完全系列

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(P, U) \to \mathrm{Hom}_A(P, M \underset{\mathcal{H}^{\mathrm{op}}}{\otimes} L) \simeq \mathrm{Hom}_A(P, V) \simeq L$$

を得るが，L は既約 $\mathcal{E}^{\mathrm{op}}$-加群なので次のどちらかの場合しか起こらない．

(1) $\mathrm{Hom}_A(P, U) = 0$ ならば $U \subseteq t_P(M \underset{\mathcal{H}^{\mathrm{op}}}{\otimes} L)$ である．

(2) $\mathrm{Hom}_A(P, U) \neq 0$ ならば，任意の $l \in L$ に対し

$$\beta \otimes l \in \mathrm{Hom}_A(P, M) \underset{\mathcal{H}^{\mathrm{op}}}{\otimes} L \simeq \mathrm{Hom}_A(P, M \underset{\mathcal{H}^{\mathrm{op}}}{\otimes} L) = \mathrm{Hom}_A(P, U)$$

であることに注意すれば

$$M \underset{\mathcal{H}^{\mathrm{op}}}{\otimes} L = \mathrm{Im}(\beta) \underset{\mathcal{H}^{\mathrm{op}}}{\otimes} L \subseteq U$$

すなわち $U = M \underset{\mathcal{H}^{\mathrm{op}}}{\otimes} L$ である．

ゆえに，$V = M \underset{\mathcal{H}^{\mathrm{op}}}{\otimes} L / t_P(M \underset{\mathcal{H}^{\mathrm{op}}}{\otimes} L)$ は既約 A-加群である． □

定理 6.2 A-加群の全射準同型 $\beta : P \to M$ に対し上記の設定を仮定する．$\mathcal{H}$ の原始巾等元分解を

$$1 = e_1 + \cdots + e_r, \quad e_i e_j = \delta_{ij} e_i$$

とし，直既約射影 $\mathcal{H}^{\mathrm{op}}$-加群と既約 $\mathcal{H}^{\mathrm{op}}$-加群を

$$P_i = e_i\mathcal{H}, \quad S_i = \mathrm{Top}(P_i)$$

と定める．このとき A-加群 M の直既約分解

$$M = \bigoplus_{i=1}^{r} Me_i$$

に対し次が成立.

(1) $\mathrm{Top}(Me_i)$ は既約 A-加群である．

(2) $\mathrm{Top}(Me_i) \simeq \mathrm{Top}(Me_j)$ であるための必要十分条件は $S_i \simeq S_j$.

(3) 既約 $\mathcal{H}^{\mathrm{op}}$-加群 S_i に既約 A-加群

$$V_i := M \underset{\mathcal{H}^{\mathrm{op}}}{\otimes} S_i / t_P(M \underset{\mathcal{H}^{\mathrm{op}}}{\otimes} S_i)$$

を対応させる写像は次の 2 つの集合の間の全単射を与える．

- 既約 $\mathcal{H}^{\mathrm{op}}$-加群の同型類
- $\mathrm{Top}(M)$ に現れる既約 A-加群の同型類

証明　$\beta_0 : P_0 = P(M) \to M$ を M の射影被覆とすると $P \simeq P_0 \oplus P_1$ と射影 A-加群の直和に書けて，$\mathcal{E}$ はブロック行列代数

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}_0 & \mathrm{Hom}_A(P_0, P_1) \\ \mathrm{Hom}_A(P_1, P_0) & \mathcal{E}_1 \end{pmatrix} \quad (\mathcal{E}_i = \mathrm{End}_A(P_i),\ i = 0, 1)$$

と同一視される．また $\mathrm{Ker}(\beta_0) = \mathrm{Ker}(\beta) \cap P_0$ である．$\varphi \in \mathcal{E}_0$ を任意の元とする．このとき，$\varphi \in \mathcal{E}$ だから Dipper の仮定より φ は $\mathrm{Ker}(\beta)$ を保ち，他方 φ は P_0 も保つから

$$\varphi(\mathrm{Ker}(\beta_0)) \subseteq \mathrm{Ker}(\beta_0)$$

が成り立つ．すなわち，Dipper の仮定は $\beta_0 : P_0 \to M$ に対しても成り立つ．示すべき主張は P の取り方とは無関係なので，以下 $P = P_0$ と取り直そう．すると射影被覆の定義より部分 A-加群 $U \subseteq P$ が $U + \mathrm{Ker}(\beta) = P$ をみたすならば $U = P$ でなければならない．このことを用いて

$$J = \{\varphi \in \mathcal{E} \mid \mathrm{Im}(\varphi) \subseteq \mathrm{Ker}(\beta)\} \subseteq \mathrm{Rad}\,\mathcal{E}$$

を示そう．そのため任意の $\varphi \in J$ が $\mathcal{E}$ の巾零元であることをまず示す．実際，P の A-部分加群の減少列

$$\mathrm{Im}(\varphi) \supseteq \mathrm{Im}(\varphi^2) \supseteq \cdots$$

は途中で止まるので，ある自然数 n が存在して $\mathrm{Im}(\varphi^n) = \mathrm{Im}(\varphi^{2n})$ と書ける．すると，任意の $x \in P$ に対してある $y \in P$ があって

$$\varphi^n(x) = \varphi^{2n}(y)$$

と書けるので

$$x = (x - \varphi^n(y)) + \varphi^n(y) \in \mathrm{Ker}(\varphi^n) + \mathrm{Ker}(\beta)$$

である．つまり

$$\mathrm{Ker}(\varphi^n) + \mathrm{Ker}(\beta) = P$$

が成り立ち，$\mathrm{Ker}(\varphi^n) = P$ を得る．すなわち $\varphi^n = 0$ となり，φ が巾零元であることが示された．

次に J がすべての既約 $\mathcal{E}$-加群に 0 で作用することを示す．実際，ある極大左イデアル $I \subsetneq \mathcal{E}$ が存在して $\varphi \in J \setminus I$ とすると，$\mathcal{E} = \mathcal{E}\varphi + I$ だから $x \in \mathcal{E}$ と $y \in I$ が存在して

$$1 = x\varphi + y$$

と書けるが，$\varphi \in J$ より $x\varphi \in J$ であるから $x\varphi$ は巾零元である．ゆえに，

$$1 = (1 - x\varphi)^{-1} y \in I$$

となり矛盾する．ゆえに $J \subseteq \mathrm{Rad}\,\mathcal{E}$ が示された．

すると，$\mathcal{H} \simeq \mathcal{E}/J$ かつ $J \subseteq \mathrm{Rad}\,\mathcal{E}$ より $\mathcal{E}$ の原始巾等元分解

$$1 = f_1 + \cdots + f_r, \quad f_i f_j = \delta_{ij} f_i$$

が存在して，$f_i + J = e_i$ となるから，直既約分解

$$P = \bigoplus_{i=1}^{r} P f_i$$

が得られ，$\beta(Pf_i) = \beta(P)e_i = Me_i$ より

$$\mathrm{Top}(Me_i) \simeq \mathrm{Top}(Pf_i)$$

は既約 A-加群である．ゆえに (1) が示された．

次に (2) を示す．$S_i \simeq S_j$ とすると $P_i \simeq P_j$ なので，

$$Me_i = M \underset{\mathcal{H}^{\mathrm{op}}}{\otimes} P_i \simeq M \underset{\mathcal{H}^{\mathrm{op}}}{\otimes} P_j = Me_j$$

となり，$\mathrm{Top}(Me_i) \simeq \mathrm{Top}(Me_j)$ を得る．他方，A-加群全射準同型

$$Me_i = M \underset{\mathcal{H}^{\mathrm{op}}}{\otimes} P_i \to M \underset{\mathcal{H}^{\mathrm{op}}}{\otimes} S_i \to M \underset{\mathcal{H}^{\mathrm{op}}}{\otimes} S_i / t_P(M \underset{\mathcal{H}^{\mathrm{op}}}{\otimes} S_i) = V_i$$

が存在して，補題 6.6 より V_i は既約 A-加群であるから，(1) より

$$\mathrm{Top}(Me_i) \simeq V_i$$

である．ゆえに，$\mathrm{Top}(Me_i) \simeq \mathrm{Top}(Me_j)$ ならば補題 6.6 より

$$S_i \simeq \mathrm{Hom}_A(P, V_i) \simeq \mathrm{Hom}_A(P, V_j) \simeq S_j$$

を得る．以上から (2) の同値が示された．

上記で $\mathrm{Top}(M)$ に現れる既約 A-加群が V_i に限ることも示されているので，

$$L \mapsto M \underset{\mathcal{H}^{\mathrm{op}}}{\otimes} L / t_P(M \underset{\mathcal{H}^{\mathrm{op}}}{\otimes} L)$$

は既約 $\mathcal{H}^{\mathrm{op}}$-加群の同型類のなす集合から $\mathrm{Top}\, M$ に現れる既約 A-加群の同型類のなす集合への写像を定め，$S_i \mapsto V_i$ より全射である．他方 (2) より単射でもあるから (3) が示された．　□

系 6.1　$G = \mathrm{GL}_n(q)$ とする．(L, X) を cuspidal 対とすると，

- (L, X)-系列に属する既約 $\mathbb{F}G$-加群の同型類
- $\mathcal{H}^{\mathrm{op}} = \mathrm{End}_{\mathbb{F}G}(R_L^G(X))^{\mathrm{op}}$ の既約加群の同型類

の間に全単射が存在する．

証明　補題 6.4 より Dipper の仮定が成り立つので定理 6.2 より明らか．　□

6.3 Hecke 代数の Specht 加群

本節以降では q を任意の $\mathbb{F}^\times$ の元とし，$\mathcal{H} = \mathcal{H}_n(q)$ を $\mathbb{F}$ 上定義された Hecke 代数とする．$\lambda \vdash n$ に対して

$$x_\lambda = \sum_{w \in S_\lambda} T_w, \quad y_\lambda = \sum_{w \in S_\lambda} (-q^{-1})^{\ell(w)} T_w$$

とおく．ただし $\{T_w\}_{w \in S_n}$ は命題 4.1 で定義した Schur 基底である．

定義 6.6　$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots)$, $\mu = (\mu_1, \mu_2, \cdots) \vdash n$ に対し，$\lambda \trianglerighteq \mu$ を

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \geq \sum_{i=1}^{k} \mu_i \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

で定め**支配順序**と呼ぶ．以後 $\Lambda = \{\lambda \in \mathcal{P} \mid \lambda \vdash n\}$ を支配順序により半順序集合とみなす．

補題 6.7　$\lambda, \mu \vdash n$ とする．

(1) S, T を各々λ, μ に $1, \cdots, n$ を 1 回ずつ書きこんだものとし，次の性質が成り立っているとする．

　　$1 \leq a \neq b \leq n$ が S の同じ行に属するならば a, b は T の異なる列に属する．

　このとき，$\lambda \trianglelefteq \mu$ である．

(2) $y_\mu \mathcal{H} x_\lambda \neq 0$ ならば ${}^t\mu \trianglerighteq \lambda$ である．

(3) $\#\{w \in \mathcal{D}_{{}^t\lambda\lambda} \mid y_{{}^t\lambda} T_w x_\lambda \neq 0\} = 1$，とくに $\dim y_{{}^t\lambda} \mathcal{H} x_\lambda = 1$ である．

証明　S の 1 行めに現れる数字を T において各列で一番上まで移動させるとすべて μ の 1 行めに含まれるから，$\lambda_1 \leq \mu_1$ である．S の 1 行めと 2 行めに現れる数字を T において各列で一番上まで移動させるとすべて μ の 1 行めと 2 行めに含まれるから，$\lambda_1 + \lambda_2 \leq \mu_1 + \mu_2$ である．以下同様に考えれば

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \leq \sum_{i=1}^{k} \mu_i \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

つまり $\lambda \trianglelefteq \mu$ を得る．よって (1) が示された．

$y_\mu \mathcal{H} x_\lambda \neq 0$ ならば，ある $w \in S_n$ が存在して

$$y_\mu T_w x_\lambda \neq 0$$

である．ここで，$u \in S_\mu$ なら $y_\mu u = (-1)^{\ell(u)} y_\mu$，$u \in S_\lambda$ なら $u x_\lambda = q^{\ell(u)} x_\lambda$ であるから $w \in \mathcal{D}_{\mu\lambda}$ としてよい．$S_\lambda \cap w^{-1} S_\mu w = 1$ を示そう．定理 1.1 より

$$S_\lambda \cap w^{-1} S_\mu w = S_{I_\lambda \cap w^{-1} I_\mu w}$$

だから，$S_\lambda \cap w^{-1} S_\mu w \neq 1$ ならば $I_\lambda \cap w^{-1} I_\mu w \neq \varnothing$ である．$s \in I_\lambda \cap w^{-1} I_\mu w$ をとり，$S'_\lambda = \{w' \in S_\lambda \mid \ell(sw') > \ell(w')\}$ とおくと，$S_\lambda = S'_\lambda \sqcup s S'_\lambda$ となるから，$s \in I_\lambda$ と $wsw^{-1} \in I_\mu$ に注意して

$$\begin{aligned} y_\mu T_w x_\lambda &= y_\mu T_w (1 + T_s) \left(\sum_{w' \in S'_\lambda} T_{w'} \right) \\ &= y_\mu (T_w + T_{ws}) \left(\sum_{w' \in S'_\lambda} T_{w'} \right) \\ &= y_\mu (1 + T_{wsw^{-1}}) T_w \left(\sum_{w' \in S'_\lambda} T_{w'} \right) = 0 \end{aligned}$$

を得るが，これは $y_\mu T_w x_\lambda \neq 0$ に反する．

λ の 1 行めに $1, \cdots, \lambda_1$ を書き，2 行めに $\lambda_1 + 1, \cdots, \lambda_1 + \lambda_2$ を書き，... として得られる標準盤を $S \in \mathrm{Std}(\lambda)$ とし，${}^t\mu$ の 1 列めに $w^{-1}(1), \cdots, w^{-1}(\mu_1)$ を書き，2 列めに $w^{-1}(\mu_1 + 1), \cdots, w^{-1}(\mu_1 + \mu_2)$ を書き，.. と $1, \cdots, n$ を ${}^t\mu$ に書きこんだものを T とする．S の同じ行に $a \neq b$ があるならば，a, b は T の同じ列には現れない．実際，$a = w^{-1}(c), b = w^{-1}(d)$ が同じ列に現れれば

$$w^{-1}(c, d) w = (a, b) \in S_\lambda \cap w^{-1} S_\mu w$$

であるから，$S_\lambda \cap w^{-1} S_\mu w = 1$ に矛盾する．ゆえに (1) より ${}^t\mu \trianglerighteq \lambda$ となり，(2) が示された．

ここでさらに $\mu = {}^t\lambda$ と仮定すると，$1, \cdots, \lambda_1$ は T の異なる列に現われ，各々各列で 1 番小さい数であるから，T の 1 行めは $1, \cdots, \lambda_1$ である．つまり

$$w^{-1}(1) = 1,\ w^{-1}({}^t\lambda_1 + 1) = 2, \cdots$$

である．$\lambda_1 + 1, \cdots, \lambda_1 + \lambda_2$ は T の異なる列に現われ，各々各列で 2 番めに小さい数であるから，T の 2 行めは $\lambda_1 + 1, \cdots, \lambda_1 + \lambda_2$ である．つまり

$$w^{-1}(2) = \lambda_1 + 1,\ w^{-1}({}^t\lambda_1 + 2) = \lambda_1 + 2, \cdots$$

である．以下同様に議論すれば $S = T$ が得られるから，$y_{{}^t\lambda} T_w x_\lambda \neq 0$ となる $w \in \mathcal{D}_{{}^t\lambda\lambda}$ の可能性はただ 1 通りに決まる．逆に w がこの形をしていれば

$$y_{{}^t\lambda} T_w x_\lambda = \sum_{u \in S_{{}^t\lambda}} \sum_{v \in S_\lambda} (-q)^{-\ell(w)} T_{uwv} \neq 0$$

である．実際，$uwv = u'wv'$（$u, u' \in S_{{}^t\lambda}, v, v' \in S_\lambda$）とすると，

$$v'v^{-1} = w^{-1}({u'}^{-1}u)w \in S_\lambda \cap w^{-1} S_{{}^t\lambda} w$$

であるが，もし $s = (k, k+1) \in I_\lambda \cap w^{-1} I_{{}^t\lambda} w$ が存在すると，$k, k+1$ が S の同じ行に属し，他方

$$wsw^{-1} = (w(k), w(k+1)) \in I_{{}^t\lambda}$$

より $k = w^{-1}(w(k)), k+1 = w^{-1}(w(k+1))$ が T の同じ列に属することになり，$S = T$ に矛盾するから，$S_\lambda \cap w^{-1} S_{{}^t\lambda} w = 1$ であり，$u = u', v = v'$ を得る．これは $y_{{}^t\lambda} T_w x_\lambda \neq 0$ を意味するから (3) が示された． □

定義 6.7 $y_{{}^t\lambda} T_w x_\lambda \neq 0$ をみたす $\mathcal{D}_{{}^t\lambda\lambda}$ の唯一の元を w_λ と書き，

$$z_\lambda = y_{{}^t\lambda} T_{w_\lambda} x_\lambda$$

と定義する．

定義 6.8 $\lambda \vdash n$ に対し，3 種の $\mathcal{H}$-加群を

$$M^\lambda = \mathcal{H} x_\lambda,\ N^\lambda = \mathcal{H} y_\lambda,\ S^\lambda = \mathcal{H} z_\lambda \subseteq M^\lambda$$

で定める．とくに S^λ を **Specht 加群**と呼ぶ．

Specht 加群理論は cellular 代数の理論の母体となった理論である．現在は cellular 代数の理論にしたがって得られる cell 加群を Specht 加群と呼ぶこと

が多いが，本書では母体となった本来の Specht 加群理論の方を紹介する．

Specht 加群には対称双 1 次形式が定義される．このことを示すため補題 4.6 より Hecke 代数 $\mathcal{H}$ は

$$\langle T_y, T_w \rangle = \mathrm{Tr}(T_y T_w) = \delta_{y,w^{-1}} q^{\ell(y)}$$

により対称代数であったことを思い出そう．また，Hecke 代数の生成元 $T_1, \cdots, T_{n-1}$ のみたす基本関係式がすべて左右対称な形をしていることから $\mathcal{H}$ が生成元を固定する反自己同型を持つこともわかる．そこでこの 2 つの事実を併せて用いることによりまず M^λ 上の対称双 1 次形式を定義する．

定義 6.9　$\mathcal{H} = \mathcal{H}_n(q)$ の反自己同型 $h \mapsto h^*$ を

$$T_i^* = T_i \quad (1 \le i \le n-1)$$

すなわち，$T_w^* = T_{w^{-1}}$ $(w \in S_n)$ により定める．

補題 6.8　$\mathcal{H}$-加群 M^λ には

$$\langle T_u x_\lambda, T_v x_\lambda \rangle = \delta_{uv} q^{\ell(u)} \quad (u, v \in \mathcal{D}_{(1^n),\lambda})$$

により非退化対称双 1 次形式が定義され，$\langle ha, b \rangle = \langle a, h^* b \rangle$ をみたす．

証明　非退化対称双 1 次形式を定めることは明らかである．$\langle ha, b \rangle = \langle a, h^* b \rangle$ を示す．t を不定元とし，定義 4.2 で定めた $\mathbb{Z}[t]$-代数 $\mathcal{H}_n(t)$ を考える．

$$\sum_{w \in S_n} c_w(t) T_w \mapsto c_1(t) \quad (c_w(t) \in \mathbb{Z}[t])$$

により $\mathrm{Tr} : \mathcal{H}_n(t) \to \mathbb{Z}[t]$ も定義される．また，多項式 $P_\lambda(t)$ を

$$P_\lambda(t) = \sum_{w \in S_\lambda} t^{\ell(w)} \in \mathbb{Z}[t]$$

で定める．このとき，

$$x_\lambda = \sum_{w \in S_\lambda} T_w \in \mathcal{H}_n(t)$$

に対し $x_\lambda^2 = P_\lambda(t) x_\lambda$ が成り立つから

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}((T_u x_\lambda)^*(T_v x_\lambda)) &= \mathrm{Tr}(x_\lambda T_{u^{-1}} T_v x_\lambda) = \mathrm{Tr}(T_{u^{-1}} T_v x_\lambda^2) \\ &= P_\lambda(t)\,\mathrm{Tr}(T_{u^{-1}} T_v x_\lambda) \\ &= P_\lambda(t) \sum_{w \in S_\lambda} \mathrm{Tr}(T_{u^{-1}} T_{vw}) = P_\lambda(t) \sum_{w \in S_\lambda} \delta_{u,vw} t^{\ell(u)}\end{aligned}$$

であり，$u, v \in \mathcal{D}_{(1^n),\lambda}$ に注意すれば

$$\mathrm{Tr}((T_u x_\lambda)^*(T_v x_\lambda)) = P_\lambda(t) \delta_{uv} t^{\ell(u)}$$

を得る．つまり，$\mathrm{Tr}((T_u x_\lambda)^*(T_v x_\lambda))$ はつねに $P_\lambda(t)$ で割り切れ，

$$\langle T_u x_\lambda, T_v x_\lambda \rangle = \delta_{uv} q^{\ell(u)} = \frac{\mathrm{Tr}((T_u x_\lambda)^*(T_v x_\lambda))}{P_\lambda(t)}\Big|_{t=q}$$

である．ゆえに

$$\frac{\mathrm{Tr}((T_w T_u x_\lambda)^*(T_v x_\lambda))}{P_\lambda(t)} = \frac{\mathrm{Tr}((T_u x_\lambda)^*(T_{w^{-1}} T_v x_\lambda))}{P_\lambda(t)}$$

を $t = q$ と特殊化すると

$$\langle T_w T_u x_\lambda, T_v x_\lambda \rangle = \langle T_u x_\lambda, T_w^* T_v x_\lambda \rangle$$

が得られる． □

次の補題も補題 6.8 と同様に証明される．

補題 6.9 $\mathcal{H}$-加群 N^μ には

$$\langle T_u y_\mu, T_v y_\mu \rangle = \delta_{uv} q^{\ell(u)} \quad (u, v \in \mathcal{D}_{(1^n),\mu})$$

により非退化対称双 1 次形式が定義され，$\langle ha, b \rangle = \langle a, h^* b \rangle$ をみたす．

補題 6.10 補題 6.8 と補題 6.9 で与えた M^λ と $N^{{}^t\lambda}$ 上の対称双 1 次形式に対し次が成立．

$$\langle h z_\lambda, h' z_\lambda \rangle = \langle h z_\lambda T_{w_\lambda}^* y_{{}^t\lambda}, h' y_{{}^t\lambda} \rangle \quad (h, h' \in \mathcal{H})$$

証明 まず $\mathcal{H}_n(t)$ で考える．$n(\lambda) = \sum_{i \geq 1} (i-1)\lambda_i$ として

$$\langle T_u y_{t_\lambda}, T_v y_{t_\lambda}\rangle = t^{n(\lambda)}\frac{\mathrm{Tr}((T_u y_{t_\lambda})^*(T_v y_{t_\lambda}))}{P_{t_\lambda}(t)} = \mathrm{Tr}(T_u^* T_v y_{t_\lambda})$$

であるから,

$$\begin{aligned}\langle hz_\lambda T_{w_\lambda}^* y_{t_\lambda}, h'y_{t_\lambda}\rangle &= \langle hy_{t_\lambda}T_{w_\lambda}x_\lambda T_{w_\lambda}^* y_{t_\lambda}, h'y_{t_\lambda}\rangle\\ &= \mathrm{Tr}(T_{w_\lambda}x_\lambda T_{w_\lambda}^* y_{t_\lambda}h^*h'y_{t_\lambda})\\ &= \mathrm{Tr}(x_\lambda T_{w_\lambda}^* y_{t_\lambda}h^*h'y_{t_\lambda}T_{w_\lambda})\\ &= \frac{\mathrm{Tr}(x_\lambda^2 T_{w_\lambda}^* y_{t_\lambda}h^*h'y_{t_\lambda}T_{w_\lambda})}{P_\lambda(t)}\\ &= \frac{\mathrm{Tr}(x_\lambda T_{w_\lambda}^* y_{t_\lambda}h^*h'y_{t_\lambda}T_{w_\lambda}x_\lambda)}{P_\lambda(t)} = \frac{\mathrm{Tr}((hz_\lambda)^*(h'z_\lambda))}{P_\lambda(t)}\end{aligned}$$

を $t=q$ と特殊化して求める式を得る.　□

補題 4.5 で構成した Hoefsmit の既約加群 V^λ を考えると次が成り立つ.

補題 6.11　$\mathcal{H}$ が半単純代数のとき, $S^\lambda \simeq V^\lambda$ であり, $\{S^\lambda \mid \lambda \vdash n\}$ は既約 $\mathcal{H}$-加群の同型類の完全代表系である.

証明　$\mathcal{H}$ の部分代数 $\mathcal{H}_\lambda$ を

$$\mathcal{H}_\lambda = \bigoplus_{w\in S_\lambda}\mathbb{F}T_w$$

とすると, $\mathbb{F}x_\lambda, \mathbb{F}y_{t_\lambda}$ は各々1 次元 $\mathcal{H}_\lambda$-加群と 1 次元 $\mathcal{H}_{t_\lambda}$-加群を定め,

$$M^\lambda \simeq \mathcal{H}\underset{\mathcal{H}_\lambda}{\otimes}\mathbb{F}x_\lambda,\quad N^{t_\lambda} \simeq \mathcal{H}\underset{\mathcal{H}_{t_\lambda}}{\otimes}\mathbb{F}y_{t_\lambda}$$

である. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_{t_\lambda}}(\mathbb{F}y_{t_\lambda}, M^\lambda)$ を計算しよう. そのためには

$$\left\{ m = \sum_{u\in S_{t_\lambda}}\sum_{w\in\mathcal{D}_{t_\lambda\lambda}} c_{uw}T_uT_wx_\lambda \mid T_im = -m\ \ (s_i\in I_{t_\lambda})\right\}$$

を求めればよいが, m は $y_{t_\lambda}T_wx_\lambda$ $(w\in\mathcal{D}_{t_\lambda\lambda})$ の線形結合になるから補題 6.7 より $m\in\mathbb{F}z_\lambda$ となる. ゆえに

$$\dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(N^{t\lambda}, M^\lambda) = \dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_{t_\lambda}}(\mathbb{F}y_{t\lambda}, M^\lambda) = 1$$

を得る．また，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(N^{t\lambda}, M^\lambda) = \mathbb{F}\varphi$ と書くと $S^\lambda = \mathrm{Im}(\varphi)$ である．

さて，$\mathcal{H}$ が半単純代数と仮定する．すると $M^\lambda, N^{t\lambda}$ は既約 $\mathcal{H}$-加群の直和に同型であるから，上記より M^λ と $N^{t\lambda}$ の両方に現れる既約 $\mathcal{H}$-加群が同型を除いて一意的に決まり，M^λ と $N^{t\lambda}$ に重複度 1 で現れる．さらに $S^\lambda = \mathrm{Im}(\varphi)$ よりこの既約加群は S^λ と同型である．

$T \in \mathrm{Std}(\lambda)$ を $1, 2, \cdots, \lambda_1$ を 1 行めに書き，$\lambda_1 + 1, \cdots, \lambda_1 + \lambda_2$ を 2 行めに書き，... として得られる標順盤とすると，$\mathcal{H}_\lambda$-加群として $\mathbb{F}T \subseteq V^\lambda$ は $\mathbb{F}x_\lambda$ と同型であるから

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(M^\lambda, V^\lambda) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_\lambda}(\mathbb{F}x_\lambda, V^\lambda) \neq 0$$

である．他方，$1, 2, \cdots, {}^t\lambda_1$ を 1 列めに書き，${}^t\lambda_1 + 1, \cdots, {}^t\lambda_1 + {}^t\lambda_2$ を 2 列めに書き，... として得られる標順盤を $T \in \mathrm{Std}(\lambda)$ とすると，$\mathcal{H}_{t\lambda}$-加群として $\mathbb{F}T \subseteq V^\lambda$ は $\mathbb{F}y_{t\lambda}$ と同型であるから

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(N^{t\lambda}, V^\lambda) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_{t_\lambda}}(\mathbb{F}y_{t\lambda}, V^\lambda) \neq 0$$

である．よって，V^λ は M^λ と $N^{t\lambda}$ の両方に現れるから $S^\lambda \simeq V^\lambda$ である．

命題 4.4 と同様に議論すれば $\{V^\lambda \mid \lambda \vdash n\}$ が既約 $\mathcal{H}$-加群の同型類の完全代表系になることも明らかである． □

補題 6.12 M^λ の $\mathcal{H}$-部分加群 U に対し

$$U^\perp = \{m \in M^\lambda \mid \langle m, U \rangle = 0\}$$

とおく．このとき，

(1) $U^\perp$ は M^λ の $\mathcal{H}$-部分加群である．

(2) M^λ の $\mathcal{H}$-部分加群 U に対し，M^λ 上の対称形式 $\langle , \rangle$ を U に制限して得られる U 上の対称形式の根基は $U \cap U^\perp$ である．

(3) $y_{t\lambda} M^\lambda = \mathbb{F}z_\lambda$ である．とくに，M^λ の $\mathcal{H}$-部分加群 U に対し $S^\lambda \subseteq U$ または $U \subseteq {S^\lambda}^\perp$ のどちらかが成立．

証明　$h \in \mathcal{H}$ に対し $h^*U \subseteq U$ であるから

$$\langle hU^\perp, U\rangle = \langle U^\perp, h^*U\rangle = 0$$

となり，$hU^\perp \subseteq U^\perp$ が成り立つので (1) は明らか．

(2) は対称形式の根基の定義より明らかであるから，(3) を示す．補題 6.7(3) より $y_{\mathfrak{t}_\lambda}M^\lambda = \mathbb{F}z_\lambda$ である．また，M^λ の $\mathcal{H}$-部分加群 U に対し次のどちらかが成り立つ．

(a) $y_{\mathfrak{t}_\lambda}U \neq 0$ とする．このとき

$$0 \neq y_{\mathfrak{t}_\lambda}U \subseteq y_{\mathfrak{t}_\lambda}M^\lambda = \mathbb{F}z_\lambda$$

より $\mathbb{F}z_\lambda = y_{\mathfrak{t}_\lambda}U \subseteq U$ となるので $S^\lambda = \mathcal{H}z_\lambda \subseteq U$ を得る．

(b) $y_{\mathfrak{t}_\lambda}U = 0$ とする．このとき

$$0 = \langle y_{\mathfrak{t}_\lambda}U, M^\lambda\rangle = \langle U, \mathcal{H}y_{\mathfrak{t}_\lambda}M^\lambda\rangle = \langle U, \mathcal{H}z_\lambda\rangle = \langle U, S^\lambda\rangle$$

であるから，$U \subseteq {S^\lambda}^\perp$ を得る．

ゆえに (3) が示された．　□

定義 6.10　M を $\mathcal{H}$-加群とする．$h \in \mathcal{H}, f \in M^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(M, \mathbb{F})$ に対し $hf \in M^*$ を

$$hf : m \mapsto f(h^*m) \quad (m \in M)$$

により定義すると M^* も $\mathcal{H}$-加群になる．M^* を M の**双対加群**と呼ぶ．また，$M \simeq M^*$ のとき，M を**自己双対加群**と呼ぶ．

定義 6.11　$\lambda \vdash n$ に対し，$D^\lambda = S^\lambda / S^\lambda \cap {S^\lambda}^\perp$ と定める．

補題 6.13　$\lambda \vdash n$ に対し $D^\lambda \neq 0$ とする．このとき次が成立．

(1) D^λ は自己双対既約 $\mathcal{H}$-加群である．

(2) $\mathrm{Top}(S^\lambda) = D^\lambda$ である．

証明　S^λ の極大真部分加群 U に対し，補題 6.12(3) より $U \subseteq S^\lambda \cap {S^\lambda}^\perp$ であるが，$D^\lambda \neq 0$ より $S^\lambda \cap {S^\lambda}^\perp$ が S^λ の最大真部分加群になる．とくに，

$\mathrm{Top}(S^\lambda) = D^\lambda$ であり D^λ は既約 $\mathcal{H}$-加群である．また，D^λ 上に誘導される対称形式 $\langle , \rangle : D^\lambda \otimes D^\lambda \to \mathbb{F}$ は非退化だから $\mathbb{F}$-加群同型 $\Psi : D^\lambda \simeq {D^\lambda}^*$ が $\Psi(x) = \langle x, \ \rangle$ により得られるが，$h \in \mathcal{H}$ に対し

$$h\Psi(x) : y \mapsto \langle x, h^* y\rangle = \langle hx, y\rangle$$

より $h\Psi(x) = \Psi(hx)$ なので Ψ は $\mathcal{H}$-加群同型であり，とくに D^λ は自己双対加群である． □

補題 6.14 $\lambda \vdash n$ に対し $D^\lambda \neq 0$ とする．$[M^\mu : D^\lambda] \neq 0$ ならば $\lambda \trianglerighteq \mu$ であり，$[M^\lambda/S^\lambda : D^\lambda] = 0$ が成り立つ．

証明 まず $y_{t_\lambda}\mathcal{H}z_\lambda \neq 0$ である．実際，$y_{t_\lambda}\mathcal{H}z_\lambda = 0$ ならば

$$\langle S^\lambda, S^\lambda\rangle = \langle \mathcal{H}z_\lambda, z_\lambda\rangle = \langle \mathcal{H}z_\lambda, y_{t_\lambda}T_{w_\lambda}x_\lambda\rangle = \langle y_{t_\lambda}\mathcal{H}z_\lambda, T_{w_\lambda}x_\lambda\rangle = 0$$

となり $D^\lambda \neq 0$ に反する．ゆえに $w \in S_n, r \in \mathbb{F}^\times$ が存在して

$$y_{t_\lambda}T_w z_\lambda = r z_\lambda$$

と書ける．$[M^\mu : D^\lambda] \neq 0$ ならば，$\mathcal{H}$-部分加群 $U \subseteq M^\mu$ が存在して

$$\theta : S^\lambda \twoheadrightarrow D^\lambda \hookrightarrow M^\mu/U$$

とできる．そこで $\theta(z_\lambda) = hx_\mu + U$ と書くと，$hx_\mu \notin U$ より

$$y_{t_\lambda}T_w hx_\mu + U = \theta(y_{t_\lambda}T_w z_\lambda) = r\theta(z_\lambda) = rhx_\mu + U \neq U$$

だから $y_{t_\lambda}T_w hx_\mu \neq 0$ である．つまり $y_{t_\lambda}\mathcal{H}x_\mu \neq 0$ であるから，補題 6.7(2) より $\lambda \trianglerighteq \mu$ を得る．

$[M^\lambda/S^\lambda : D^\lambda] \neq 0$ とすると，$\mathcal{H}$-部分加群 $S^\lambda \subseteq U \subseteq M^\mu$ が存在して

$$\theta : S^\lambda \twoheadrightarrow D^\lambda \hookrightarrow M^\lambda/U$$

とできて，$\theta(z_\lambda) \neq 0$ である．$\theta(z_\lambda) = hx_\lambda + U$ と書くと，

$$0 \neq r\theta(z_\lambda) = \theta(y_{t_\lambda}T_w z_\lambda) = y_{t_\lambda}T_w\theta(z_\lambda) = y_{t_\lambda}T_w hx_\lambda + U$$

より $y_{t_\lambda}\mathcal{H}x_\lambda + U \neq U$ を得るが，$z_\lambda \in S^\lambda \subseteq U$ より

$$y_{t_\lambda}\mathcal{H}x_\lambda + U = \mathbb{F}z_\lambda + U = U$$

なので矛盾．ゆえに $[M^\lambda/S^\lambda : D^\lambda] = 0$ が示された． □

変数 $t-q$ に関する $\mathbb{F}[t]$ の完備化を $R = \mathbb{F}[[t-q]]$ とし，K を R の商体とする．R の剰余体は $\mathbb{F}$ である．$\mathcal{H} = \mathcal{H}_n(t) \underset{\mathbb{Z}[t]}{\otimes} \mathbb{F}$ であるが，

$$\mathcal{H}_K = \mathcal{H}_n(t) \underset{\mathbb{Z}[t]}{\otimes} K, \quad \mathcal{H}_R = \mathcal{H}_n(t) \underset{\mathbb{Z}[t]}{\otimes} R$$

と書き，$\mathcal{H}_K$-mod と $\mathcal{H}$-mod の Grothendieck 群をそれぞれ

$$K_0(\mathcal{H}_K\text{-mod}), \quad K_0(\mathcal{H}\text{-mod})$$

とする．$\mathcal{H}_K$-加群 V に対し，$\mathcal{H}_R$-部分加群 V_R を $V_R \underset{R}{\otimes} K = V$ となるようにとると $V_R \underset{R}{\otimes} \mathbb{F}$ の組成因子は V_R の取り方によらず決まり，

$$[V] \mapsto [V_R \underset{R}{\otimes} \mathbb{F}]$$

により分解写像 $d_{K,\mathbb{F}} : K_0(\mathcal{H}_K\text{-mod}) \longrightarrow K_0(\mathcal{H}\text{-mod})$ が定義される．

定義 6.12　半標準盤 T であって，

$$sh(T) = \lambda, \quad (\mu_1(T), \mu_2(T), \cdots) = \mu$$

をみたすものの個数を **Kostka 数**と呼び，$K_{\lambda\mu}$ と書く．

Kostka 数は Littlewood-Richardson 係数の一種であり，対称関数環の中で

$$h_\mu = \sum_{\lambda\in\mathcal{P}} K_{\lambda\mu}s_\lambda$$

が成り立つ．分解写像と半単純対称代数の理論を用いればこの式を次のように理解することができる．

補題 6.15　$K_0(\mathcal{H}\text{-mod})$ において次の等式が成立する．

$$[M^\mu] = [S^\mu] + \sum_{\lambda\rhd\mu} K_{\lambda\mu}[S^\lambda]$$

証明 $\mathbb{F}(t)$ から $\mathbb{F}((t-q))$ に係数拡大してから分解写像で $K_0(\mathcal{H}\text{-mod})$ に送ればよいから，

$$\mathcal{H}_{\mathbb{F}(t)} = \mathcal{H}_n(t) \underset{\mathbb{Z}[t]}{\otimes} \mathbb{F}(t)$$

のときに示せば十分である．まず補題 6.11 より M^μ は $\{S^\lambda \mid \lambda \vdash n\}$ の直和に同型である．ここで，命題 4.6 の証明と同じ議論により

$$\mathcal{H}_{\mathbb{Q}(t)} = \mathcal{H}_n(t) \underset{\mathbb{Z}[t]}{\otimes} \mathbb{Q}(t)$$

の場合と比較すると $[M^\mu : S^\lambda]$ が変わらないことがわかる．実際，命題 4.6 の証明で定めた $c_\lambda(t)$ に対し

$$I(f) = c_\lambda(t)\,\mathrm{Tr}(f)\,\mathrm{Id}_V \quad (f \in \mathrm{End}_{\mathbb{Q}(t)}(V^\lambda))$$

であり，$c_\lambda(t)$ を $\mathrm{mod}\,\ell$ でも定義可能な $c'_\lambda(t)$ と $r \in \mathbb{Z}$ を用いて

$$c_\lambda(t) = \ell^r c'_\lambda(t)$$

と書くと次のどちらかが成り立つ．

- $r > 0$ ならば任意の $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}(t)}(V^\lambda)$ に対し $I(f) = 0$ になるから $\mathcal{H}_{\mathbb{F}(t)}$ の半単純性に反する．
- $r < 0$ ならば任意の $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}(t)}(V^\lambda)$ に対し $\mathrm{Tr}(f) = 0$ になり矛盾する．

ゆえに $c_\lambda(t)$ は $\mathrm{mod}\,\ell$ でも定義可能であり，命題 4.6 の証明が今の場合でも適用できて，とくに $[M^\mu : S^\lambda]$ は $\mathcal{H}_{\mathbb{F}(t)}$ と $\mathcal{H}_{\mathbb{Q}(t)}$ で同じ値をとる．

さらに，$\mathcal{H}_{\mathbb{Q}(t)}$ を $\mathcal{H}_n(t)$ を $t=1$ と特殊化した $\mathbb{Q}S_n$ と比較して命題 4.8 を用いれば，$\mathcal{H}_{\mathbb{Q}(t)}$ の場合に $[M^\mu : S^\lambda] = K_{\lambda\mu}$ となることがわかる．Kostka 数の性質または補題 6.14 を用いれば

$$[M^\mu] = [S^\mu] + [M^\mu/S^\mu] = [S^\mu] + \sum_{\lambda \rhd \mu} K_{\lambda\mu}[S^\lambda]$$

となるが，上で述べたことよりこの等式は $\mathcal{H}_{\mathbb{F}(t)}$ に対しても成り立つ．ゆえに最初に述べたように分解写像を施せば $\mathcal{H}$ でも成り立つ． □

M^λ の基底に対する $\mathcal{H}$ の作用を詳しく見て，より精緻な組合せ論的議論をすれば，M^λ が Specht 組成列をもつ，すなわち $\mathcal{H}$-部分加群の列

$$M^\lambda = F_0 \supseteq F_1 \supseteq \cdots \supseteq F_N = 0$$

が存在して，各 F_i/F_{i+1} が Specht 加群と同型なものがとれることがわかる．次の定理 6.3 が Specht 加群理論の基本定理である．$d_{\lambda\mu}$ を**分解係数**と呼ぶ．

定理 6.3 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_n(q)$ $(q \in \mathbb{F}^\times)$ に対し次が成立．

(1) M^μ の組成因子はすべて $D^\lambda \neq 0$ の形である．

(2) $\{D^\lambda \mid \lambda \vdash n, D^\lambda \neq 0\}$ は既約 $\mathcal{H}$-加群の同型類の完全代表系をなす．

(3) $D^\lambda \neq 0$ のとき

$$[S^\lambda] = [D^\lambda] + \sum_{\mu \rhd \lambda} d_{\lambda\mu}[D^\mu] \in K_0(\mathcal{H}\text{-mod})$$

証明 $\mu = (n)$ のとき，$\dim M^\mu = 1$ であり，$\langle , \rangle$ は M^μ 上非退化ゆえ $D^\mu \neq 0$ なので，$M^\mu = S^\mu = D^\mu$ である．

任意の $\nu \rhd \mu$ に対し (1) が成り立つと仮定して μ に対し (1) を示そう．$\mathcal{H}$-加群同型 $M^\mu \simeq M^{\mu\,*}$ のもとで，$M^{\mu\,*}$ の部分加群

$$(M^\mu/S^\mu)^* = \{\varphi \in M^{\mu\,*} \mid \varphi(S^\mu) = 0\}$$

は M^μ の部分加群 $S^{\mu\,\perp}$ に対応するので，$(M^\mu/S^\mu)^* \simeq S^{\mu\,\perp}$ である．補題 6.15 より M^μ/S^μ には $\{S^\nu \mid \nu \rhd \mu\}$ の組成因子しか現れず，S^ν は M^ν の部分加群なので，M^μ/S^μ の組成因子はすべて $D^\lambda \neq 0$ の形である．補題 6.13(1) より D^λ は自己双対加群であるので，$S^{\mu\,\perp}$ には $D^\lambda \neq 0$ の形の組成因子しか現れないことがわかった．ここで部分加群列

$$M^\mu \supseteq S^\mu \supseteq S^\mu \cap S^{\mu\,\perp} \supseteq 0$$

を考えれば，$M^\mu/S^\mu, S^\mu \cap (S^\mu)^\perp \subseteq (S^\mu)^\perp$ には $D^\lambda \neq 0$ の形の組成因子しか現れず，$S^\mu/S^\mu \cap (S^\mu)^\perp = D^\mu$ より M^μ には $D^\lambda \neq 0$ の形の組成因子しか現れない．ゆえに帰納法が成立し，(1) が示された．

(2) を示すため，$D^\lambda \neq 0$，$D^\mu \neq 0$，$D^\lambda \simeq D^\mu$ とすると，

$$[M^\mu : D^\lambda] \geq [S^\mu : D^\lambda] \geq [D^\mu : D^\lambda] = 1$$

であるから補題 6.14 より $\lambda \trianglerighteq \mu$ である．同様に $[M^\lambda : D^\mu] \geq 1$ より $\mu \trianglerighteq \lambda$ となるから $\lambda = \mu$ を得る．(1) より $\mathcal{H} = M^{(1^n)}$ には $D^\lambda \neq 0$ の形の組成因子しか現れないので，$\{D^\lambda \neq 0 \mid \lambda \vdash n\}$ は既約 $\mathcal{H}$-加群の同型類の完全代表系である．さらに，(2) より

$$[S^\lambda \cap S^{\lambda\perp}] = \sum_{\mu \vdash n} d_{\lambda\mu}[D^\mu]$$

と書けるが，$d_{\lambda\mu} \neq 0$ ならば $S^{\lambda\perp} \simeq (M^\lambda/S^\lambda)^*$ より $[M^\lambda/S^\lambda : D^\mu] \neq 0$ となるから，補題 6.14 より $\mu \triangleright \lambda$ である．よって

$$[S^\lambda] = [D^\lambda] + [S^\lambda \cap S^{\lambda\perp}] = [D^\lambda] + \sum_{\mu \triangleright \lambda} d_{\lambda\mu}[D^\mu]$$

が得られた． □

命題 6.2　$\lambda \vdash n$ に対し $D^\lambda \neq 0$ とする．このとき次の $\mathcal{H}$-加群同型が成立.

$$D^\lambda \simeq \mathcal{H} y_{{}^t\lambda} T_{w_\lambda} x_\lambda T_{w_\lambda} y_{{}^t\lambda}$$

証明　$\mathcal{H}$-加群準同型 $\varphi : S^\lambda \to N^{{}^t\lambda}$ を

$$hz_\lambda \mapsto hz_\lambda T^*_{w_\lambda} y_{{}^t\lambda} \quad (h \in \mathcal{H})$$

で定めると，$D^\lambda \neq 0$ と補題 6.10 より適当な h, h' が存在して

$$\langle \varphi(hz_\lambda), h' y_{{}^t\lambda} \rangle = \langle hz_\lambda, h' z_\lambda \rangle \neq 0$$

とできるから $\varphi \neq 0$ である．他方，$hz_\lambda \in S^\lambda \cap S^{\lambda\perp}$ とすると補題 6.10 より

$$\langle \varphi(hz_\lambda), N^{{}^t\lambda} \rangle = \langle hz_\lambda, S^\lambda \rangle = 0$$

であるから $\varphi(S^\lambda \cap S^{\lambda\perp}) = 0$ である．ゆえに，φ は $\mathcal{H}$-加群同型

$$D^\lambda \simeq \mathrm{Im}(\varphi) = \mathcal{H} y_{{}^t\lambda} T_{w_\lambda} x_\lambda T^*_{w_\lambda} y_{{}^t\lambda}$$

を誘導する． □

第 7 章

分類定理

7.1 $A^{(1)}_{e-1}$ 型 Kac-Moody 代数と Fock 空間

複素ベクトル空間 $\mathfrak{g}$ に対し，双線形写像

$$[\quad,\quad] : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

が定義されていて，$[X,X]=0$, $(X \in \mathfrak{g})$，および **Jacobi 恒等式**

$$[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0, \quad (X,Y,Z \in \mathfrak{g})$$

をみたすとき，この写像を Lie 積といい，$\mathfrak{g}$ を複素 Lie 代数と呼ぶ．たとえば，

$$sl(n,\mathbb{C}) = \{X \in \mathrm{Mat}(n,n,\mathbb{C}) \mid \mathrm{Tr}(X)=0\}$$

に Lie 積を $[X,Y] := XY-YX$ と定義すれば，$sl(n,\mathbb{C})$ は複素 Lie 代数になる．複素 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対し，$\mathbb{C}$ 上のテンソル代数

$$T(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{k\geq 0} \mathfrak{g}^{\otimes k} \quad （ただし，\mathfrak{g}^{\otimes 0} = \mathbb{C} とする.）$$

を，$\{X \otimes Y - [X,Y] \mid X,Y \in \mathfrak{g}\}$ の生成する両側イデアルで割って得られる代数を $U(\mathfrak{g})$ と書き，$\mathfrak{g}$ の**普遍包絡代数**と呼ぶ.

一般に，次に定義する Cartan 行列に対し Kac-Moody Lie 代数と呼ばれる複素 Lie 代数を定義することができる．$sl(n,\mathbb{C})$ などの有限次元簡約複素 Lie 代数と呼ばれる Lie 代数はすべて Kac-Moody Lie 代数である.

定義 7.1　整数行列 $A=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ が **Cartan 行列**とは，

(i) $a_{ii}=2$
(ii) $i\neq j$ なら $a_{ij}\leq 0$
(iii) $a_{ij}=0$ ならば $a_{ji}=0$

をみたすときをいう．

本書では次の Cartan 行列のみを扱う．

定義 7.2　$A=(a_{ij})_{0\leq i,j<e}$ を $e\geq 3$ のとき

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & & -1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$e=2$ のとき $A=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ で定め，$A_{e-1}^{(1)}$ **型 Cartan 行列**と呼ぶ．

定義 7.3　Cartan 行列 A の**実現**とは，$(\mathfrak{h},\Pi,\Pi^\vee)$ であって，

(1) $\mathfrak{h}$ は $\dim\mathfrak{h}=2n-\operatorname{rank}A$ の複素ベクトル空間，
(2) $\Pi=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ は $\mathfrak{h}^*$ の一次独立な部分集合，
(3) $\Pi^\vee=\{\alpha_1^\vee,\cdots,\alpha_n^\vee\}$ は $\mathfrak{h}$ の一次独立な部分集合，
(4) $\langle\alpha_i^\vee,\alpha_j\rangle=a_{ij}$ $(1\leq,i,j\leq n)$

をみたすときをいう．

Cartan 行列 A に対しその実現は本質的に一意である．このとき，Kac-Moody Lie 代数 $\mathfrak{g}(A)$ が次のように定義される．

定義 7.4　$(\mathfrak{h},\Pi,\Pi^\vee)$ を Cartan 行列 A の実現とし，生成元が

$$\mathfrak{h},\quad \{e_i,f_i\mid 1\leq i\leq n\}$$

基本関係が

$$[h,e_i]=\langle h,\alpha_i\rangle e_i,\quad [h,f_i]=-\langle h,\alpha_i\rangle f_i$$

$$[e_i, f_j] = \delta_{ij}\alpha_i^\vee, \quad [h, h'] = 0 \quad (h, h' \in \mathfrak{h})$$

の $\mathbb{C}$ 上の Lie 代数を $\widetilde{\mathfrak{g}}$ とする．このとき，$\mathfrak{h}$ を $\widetilde{\mathfrak{g}}$ の部分 Lie 代数と思うことができて，さらに $\widetilde{\mathfrak{g}}$ のイデアル，すなわち $[\widetilde{\mathfrak{g}}, \mathfrak{I}] \subseteq \mathfrak{I}$ をみたす複素部分空間 $\mathfrak{I}$，であって $\mathfrak{I} \cap \mathfrak{h} = 0$ をみたすもの全体を考えると包含関係に関して最大のものが存在する．そこでこの最大イデアルを $\mathfrak{I}_{\max}$ と書き，

$$\mathfrak{g}(A) = \widetilde{\mathfrak{g}}/\mathfrak{I}_{\max}$$

を **Kac-Moody Lie 代数**と呼ぶ．ここで，$\mathfrak{h} \cap \mathfrak{I}_{\max} = 0$ であるから $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}(A)$ と思うこととする．

最大イデアル $\mathfrak{I}_{\max}$ の存在は $\widetilde{\mathfrak{g}}$ のルート空間分解から得られる．すなわち，$\alpha \in \mathfrak{h}^*$ と $[\mathfrak{h}, \mathfrak{I}] \subseteq \mathfrak{I}$ をみたす部分空間 $\mathfrak{I} \subseteq \widetilde{\mathfrak{g}}$ に対し，$\mathfrak{h}$ の同時固有空間を

$$\mathfrak{I}_\alpha = \{X \in \mathfrak{I} \mid [h, X] = \langle h, \alpha \rangle X \ \ (h \in \mathfrak{h})\}$$

と定めると，$Q_+ = \overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_i$ に対し

$$\widetilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{h} \bigoplus \left(\underset{\pm\alpha \in Q_+}{\oplus} \widetilde{\mathfrak{g}}_\alpha \right)$$

である．ゆえに，$\widetilde{\mathfrak{g}}$ のイデアル $\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2$ が $\mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{h} = \mathfrak{I}_2 \cap \mathfrak{h} = 0$ をみたせば

$$\mathfrak{I}_1 = \bigoplus_{\alpha \neq 0} (\mathfrak{I}_1)_\alpha, \quad \mathfrak{I}_2 = \bigoplus_{\alpha \neq 0} (\mathfrak{I}_2)_\alpha$$

であるから，$(\mathfrak{I}_1 + \mathfrak{I}_2)_\alpha = (\mathfrak{I}_1)_\alpha + (\mathfrak{I}_2)_\alpha$ に注意して $(\mathfrak{I}_1 + \mathfrak{I}_2) \cap \mathfrak{h} = 0$ を得る．

$\widetilde{\mathfrak{g}}$ のルート空間分解から $\mathfrak{g}(A)$ のルート空間分解

$$\mathfrak{g}(A) = \mathfrak{h} \bigoplus \left(\underset{\alpha \in Q_+ \setminus \{0\}}{\oplus} \mathfrak{g}(A)_\alpha \right) \bigoplus \left(\underset{\alpha \in Q_- \setminus \{0\}}{\oplus} \mathfrak{g}(A)_\alpha \right)$$

も得られる．ここで $Q_- = -Q_+$ であり，

$$\mathfrak{g}(A)_\alpha = \{X \in \mathfrak{g}(A) \mid [h, X] = \langle h, \alpha \rangle X \ \ (h \in \mathfrak{h})\}$$

をルート α に属する $\mathfrak{g}(A)$ のルート空間と呼ぶ．

定義 7.5 Kac-Moody Lie 代数 $\mathfrak{g}(A)$ に対し,

$$\Delta^+ = \{\alpha \in Q_+ \setminus \{0\} \mid \mathfrak{g}(A)_\alpha \neq 0\}$$

を $\mathfrak{g}(A)$ の**正ルート系**と呼ぶ.

Cartan 行列 A が $A^{(1)}_{e-1}$ 型のときは $\mathfrak{g}(A)$ を具体的に記述することができる. そのため, $\{0, 1, \cdots, e-1\}$ を $\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$ と同一視し,

$$\mathfrak{h} = \left(\bigoplus_{i=0}^{e-1} \mathbb{C}\alpha_i^\vee\right) \oplus \mathbb{C}d, \quad \mathfrak{h}^* = \left(\bigoplus_{i=0}^{e-1} \mathbb{C}\Lambda_i\right) \oplus \mathbb{C}\delta$$

$$\langle \alpha_i^\vee, \Lambda_j \rangle = \delta_{ij}, \quad \langle d, \Lambda_i \rangle = 0$$

$$\langle \alpha_i^\vee, \delta \rangle = 0, \quad \langle d, \delta \rangle = 1$$

とおくと $\{\Lambda_i \mid i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}\} \cup \{\delta\}$ は $\{\alpha_i^\vee \mid i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}\} \cup \{d\}$ の双対基底であり,

$$\dim \mathfrak{h} = e + 1 = 2e - \operatorname{rank} A$$

かつ, $\alpha_i = -\Lambda_{i-1} + 2\Lambda_i - \Lambda_{i+1} + \delta_{i0}\delta \ \ (i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z})$ は一次独立で

$$\langle \alpha_i^\vee, \alpha_j \rangle = -\delta_{i,j-1} + 2\delta_{ij} - \delta_{i,j+1} = a_{ij}$$

が成り立つから, $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$ は $A^{(1)}_{e-1}$ 型 Cartan 行列の実現を与える. そこでこの実現を用いて Kac-Moody Lie 代数を定義しよう. このとき, 次の補題が成り立つ.

補題 7.1 複素ベクトル空間

$$\mathfrak{g} = sl(e, \mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$$

は Lie 積

$$[c, \mathfrak{g}] = 0$$

$$[d, X \otimes t^n] = nX \otimes t^n$$

$$[X \otimes t^m, Y \otimes t^n] = [X, Y] \otimes t^{m+n} + m\delta_{m+n,0} \operatorname{Tr}(XY)c$$

により Lie 代数になり, $A^{(1)}_{e-1}$ 型 Cartan 行列から定義された $\widetilde{\mathfrak{g}}$ に対し, 次式

で定義された全射 Lie 代数準同型

$$\psi : \widetilde{\mathfrak{g}} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

が存在する．ここで E_{ij} は行列単位である．

$$\psi(e_i) = \begin{cases} E_{e1} \otimes t & (i = 0) \\ E_{i,i+1} \otimes 1 & (i \neq 0), \end{cases} \quad \psi(f_i) = \begin{cases} E_{1e} \otimes t^{-1} & (i = 0) \\ E_{i+1,i} \otimes 1 & (i \neq 0) \end{cases}$$

$$\psi(\alpha_i^\vee) = \begin{cases} (E_{ee} - E_{11}) \otimes 1 + c & (i = 0) \\ (E_{ii} - E_{i+1,i+1}) \otimes 1 & (i \neq 0), \end{cases} \quad \psi(d) = d$$

証明　Jacobi 恒等式を確かめれば $\mathfrak{g}$ が Lie 代数になることがわかる．ψ が Lie 代数準同型であることは $\widetilde{\mathfrak{g}}$ の基本関係式が

$$\psi(e_i),\ \psi(f_i),\ \psi(h) \quad (i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z},\ h \in \mathfrak{h})$$

に対して成り立つことを確認すればわかる．ψ が全射であることを示そう．

$$c = \sum_{i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}} \psi(\alpha_i^\vee), \quad d = \psi(d)$$

であるから

$$\mathrm{Im}(\psi) \supseteq sl(e, \mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$$

を示せばよいが，$\{e_i, f_i \mid i \neq 0\}$ の生成する部分 Lie 代数を考えれば

$$sl(e, \mathbb{C}) \otimes 1 \subseteq \mathrm{Im}(\psi)$$

であり，さらに $E_{e1} \otimes t \in \mathrm{Im}(\psi)$ との Lie 積を繰り返せば

$$sl(e, \mathbb{C}) \otimes t \subseteq \mathrm{Im}(\psi)$$

も分かる．$\mathfrak{g}$ の Lie 積の定義より，$k \geq 1$ に対し

$$[sl(e, \mathbb{C}) \otimes t, sl(e, \mathbb{C}) \otimes t^k] = sl(e, \mathbb{C}) \otimes t^{k+1}$$

であるから，$k \geq 1$ に関する帰納法により

$$sl(e,\mathbb{C}) \otimes t^k \subseteq \mathrm{Im}(\psi) \quad (k \geq 0)$$

が成り立つ．同様に，$E_{1e} \otimes t^{-1} \in \mathrm{Im}(\psi)$ との Lie 積を考えれば

$$sl(e,\mathbb{C}) \otimes t^k \subseteq \mathrm{Im}(\psi) \quad (k \leq 0)$$

を得る．ゆえに ψ は全射である． □

次の命題 7.1(3) により $A_{e-1}^{(1)}$ 型 Kac-Moody Lie 代数が補題 7.1 で定めた Lie 代数に他ならないことがわかる．

命題 7.1 $\mathfrak{g}$ を補題 7.1 で定めた Lie 代数とし，Lie 代数準同型 ψ により $\mathfrak{h} \subseteq \widetilde{\mathfrak{g}}$ と $\psi(\mathfrak{h})$ を同一視する．このとき次が成立．

(1) $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ に対し

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} \mid [h,X] = \langle h,\alpha\rangle X \ \ (h \in \mathfrak{h})\} \neq 0$$

ならば，$\mathfrak{g}_\alpha = \mathbb{C}E_{ij} \otimes 1 \ (i \neq j)$ または $\mathfrak{g}_\alpha = \sum_{i=1}^{e-1} \mathbb{C}\psi(\alpha_i^\vee) \otimes t^k$ である．

(2) $\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{I} \cap \mathfrak{h} = 0$ をみたすイデアル $\mathfrak{I} \neq 0$ を持たない．

(3) $\mathfrak{g}$ は $A_{e-1}^{(1)}$ 型 Cartan 行列の定める Kac-Moody Lie 代数に同型．

証明 (1) は $\mathfrak{g}$ を具体的にルート分解してみれば明らかゆえ (2) を示す．そこで，$\mathfrak{I} \cap \mathfrak{h} = 0$ をみたす $\mathfrak{g}$ のイデアル $\mathfrak{I} \neq 0$ があったとすると

$$\mathfrak{I} = \bigoplus_{\pm\alpha \in Q_+} \mathfrak{I}_\alpha, \quad \mathfrak{I}_\alpha = \{X \in \mathfrak{I} \mid [h,X] = \langle h,\alpha\rangle X \ \ (h \in \mathfrak{h})\}$$

とかけるが，(1) より $E_{ij} \otimes t^k \in \mathfrak{I} \ (i \neq j)$ または対角行列 $X \neq 0$ が存在して $X \otimes t^k \in \mathfrak{I}$ である．いずれの場合も簡単な計算により $\mathfrak{I} \cap \mathfrak{h} \neq 0$ が結論できるので矛盾．ゆえに (2) が成り立つ．

(2) より $\psi(\mathfrak{I}_{\max}) = 0$ であり，また $\mathrm{Ker}(\psi) \subseteq \mathfrak{I}_{\max}$ なので $\mathrm{Ker}(\psi) = \mathfrak{I}_{\max}$ である．ゆえに $\mathfrak{g}(A) \simeq \mathfrak{g}$ となり (3) を得る． □

命題 7.1 より $A_{e-1}^{(1)}$ 型 Kac-Moody Lie 代数の正ルートは次のどちらかの形である．

(a) $1 \leq i \leq j \leq e-1$ と $k \geq 0$ に対し

$$\alpha = \alpha_i + \alpha_{i+1} + \cdots + \alpha_j + k\delta, \quad -\alpha_i - \alpha_{i+1} - \cdots - \alpha_j + (k+1)\delta.$$

このとき $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$ である．α を**実ルート**と呼ぶ．

(b) $\alpha = k\delta$ $(k \geq 1)$．このとき $\dim \mathfrak{g}_\alpha = e-1$ である．α を**虚ルート**と呼ぶ．

また，$A_{e-1}^{(1)}$ 型 Kac-Moody Lie 代数では $\mathfrak{I}_{\max} \subseteq \widetilde{\mathfrak{g}}$ は

- $e = 2$ ならば　$[e_i, [e_i, [e_i, e_j]]],\ [f_i, [f_i, [f_i, f_j]]] \quad (i \neq j)$
- $e \geq 3$ ならば　$\begin{cases} [e_i, [e_i, e_j]],\ [f_i, [f_i, f_j]] & (a_{ij} = -1) \quad \text{および} \\ [e_i, e_j],\ [f_i, f_j] & (a_{ij} = 0) \end{cases}$

で生成される．これはより一般に成り立つ Gabber-Kac の定理の特別な場合である．

定義 7.6　Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の **Borel 部分 Lie 代数**を

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \bigoplus \left(\underset{\alpha \in \Delta^+}{\oplus} \mathfrak{g}_\alpha \right) \subseteq \mathfrak{g}$$

とし，$U(\mathfrak{b}), U(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{b}, \mathfrak{g}$ の普遍包絡代数とする．$\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対し，$U(\mathfrak{b})$-加群 $\mathbb{C}_\lambda := \mathbb{C}v_\lambda$ を

$$hv_\lambda = \langle h, \lambda \rangle v_\lambda \quad (h \in \mathfrak{h}), \qquad \mathfrak{g}_\alpha v_\lambda = 0 \quad (\alpha \in \Delta^+)$$

で定め，$M(\lambda) = U(\mathfrak{g}) \underset{U(\mathfrak{b})}{\otimes} \mathbb{C}_\lambda$ を最高重み λ の **Verma 加群**と呼ぶ．

$M(\lambda)$ の重み $\mu \in \mathfrak{h}^*$ の重み空間を

$$M(\lambda)_\mu = \{ m \in M(\lambda) \mid hm = \langle h, \mu \rangle m \quad (h \in \mathfrak{h}) \}$$

で定めると，$M(\lambda)_\lambda = \mathbb{C}v_\lambda$ であり，$M(\lambda)_\mu \neq 0$ になるのは $\lambda - \mu \in Q_+$ のときである．また，$M(\lambda)$ は重み空間分解

$$M(\lambda) = \underset{\mu \in \lambda - Q_+}{\oplus} M(\lambda)_\mu$$

を持つ．とくに，$M(\lambda)$ が最大真部分加群をもつことがわかるから，

$$V(\lambda) := \mathrm{Top}(M(\lambda))$$

は既約 $U(\mathfrak{g})$-加群である．また，$V(\lambda)$ も重み空間分解

$$V(\lambda) = \bigoplus_{\mu \in \lambda - Q_+} V(\lambda)_\mu$$

を持つ．そこで，変数 $e(-\alpha_i)$ $(i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z})$ に関する形式的巾級数環

$$\mathbb{Z}[[e(-\alpha_0), \cdots, e(-\alpha_{e-1})]]$$

を考え，$e(\lambda)$ を基底とする $\mathbb{Z}[[e(-\alpha_0), \cdots, e(-\alpha_{e-1})]]$-自由加群の元

$$\chi(V(\lambda)) = \sum_{\mu \in \lambda - Q_+} \dim V(\lambda)_\mu e(\mu - \lambda) e(\lambda) \in \mathbb{Z}[[e(-\alpha_0), \cdots, e(-\alpha_{e-1})]] e(\lambda)$$

を $V(\lambda)$ の**指標**と呼ぶ．λ が一般のときの指標 $\chi(V(\lambda))$ は柏原・谷崎の定理（Kazhdan-Lusztig 公式）で与えられるが，可積分加群の場合は古典的な結果である．以下では $A_{e-1}^{(1)}$ 型に限って具体的な公式を与えていく．

定義 7.7 $U(\mathfrak{g})$-加群 M が**可積分**とは，任意の $i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$ について e_i, f_i が局所巾零，すなわち任意の $m \in M$ に対してある自然数 N が存在して

$$e_i^N m = f_i^N m = 0 \quad (i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z})$$

とできるときをいう．

定義 7.8 $A_{e-1}^{(1)}$ 型 Kac-Moody Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の重み格子を

$$P = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \langle \alpha_i^\vee, \lambda \rangle \in \mathbb{Z} \quad (i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z})\} = \left(\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}} \mathbb{Z}\Lambda_i \right) \bigoplus \mathbb{C}\delta$$

で定め，P の元を**整重み**という．また，

$$P_+ = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \langle \alpha_i^\vee, \lambda \rangle \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \quad (i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z})\} = \left(\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{\geq 0}\Lambda_i \right) \bigoplus \mathbb{C}\delta$$

の元を**支配的重み**という．

さて，しばしば言葉の濫用で「正ルートの和の半分」と呼ばれる元 $\rho \in \mathfrak{h}^*$ を

$$\langle \alpha_i^\vee, \rho \rangle = 1 \quad (i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}), \qquad \langle d, \rho \rangle = 0$$

により定める．次の定理は Weyl-Kac 指標公式と呼ばれる．

定理 7.1　$V(\lambda)$ が可積分 $U(\mathfrak{g})$-加群になるための必要十分条件は $\lambda \in P_+$ であり，このとき $V(\lambda)$ の指標は次式で与えられる．

$$\chi(V(\lambda)) = \frac{\sum_{w \in W} e(w(\lambda+\rho)-\rho)}{\prod_{\alpha \in \Delta_+} (1-e(-\alpha))^{\dim \mathfrak{g}_\alpha}}$$

定理 7.1 の指標公式の分子に現れる W は Weyl 群と呼ばれ

$$s_i(\lambda) = \lambda - \langle \alpha_i^\vee, \lambda \rangle \alpha_i \quad (\lambda \in \mathfrak{h}^*)$$

で定義される元 $s_0, \cdots, s_{e-1}$ で生成される $\mathrm{GL}(\mathfrak{h}^*)$ の部分群である．

定義 7.9　$\alpha = \sum_{i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}} m_i \alpha_i \in Q_+$ に対し，

$$h(\alpha) = \sum_{i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}} m_i$$

を α の**高さ**と呼ぶ．このとき，x の形式的巾級数環の元を

$$\dim_x V(\lambda) = \sum_{\alpha \in Q_+} \dim V(\lambda)_{\lambda-\alpha} x^{h(\alpha)} \in \mathbb{Z}[[x]]$$

と定める．

Cartan 行列 A の転置行列 ${}^tA$ も Cartan 行列であり，A の実現が $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$ のとき，$(\mathfrak{h}^*, \Pi^\vee, \Pi)$ は ${}^tA$ の実現であるから，この実現を用いて Kac-Moody Lie 代数 $\mathfrak{g}({}^tA)$ が定義できる．$\mathfrak{g}({}^tA)$ の正ルート系を ${}^t\Delta^+ \subseteq \mathfrak{h}$ とすると，指標公式を $e(-\alpha_i) \mapsto x$ と特殊化することにより次の Kac 次元公式が成り立つ．

命題 7.2　$\mathbb{Z}[[x]]$ において次の等式が成立．

$$\dim_x V(\lambda) = \prod_{\alpha^\vee \in {}^t\Delta^+} \left(\frac{1-x^{\langle \lambda+\rho, \alpha^\vee \rangle}}{1-x^{\langle \rho, \alpha^\vee \rangle}} \right)^{\dim \mathfrak{g}({}^tA)_{\alpha^\vee}}$$

次の概念が既約 $\mathcal{H}_n(q)$-加群の分類に重要な役割を果たす.

定義 7.10　$\lambda \in \mathcal{P}$ が e-**正則**であるとは，任意の k について

$$\#\{i \geq 1 \mid \lambda_i = k\} < e$$

が成り立つときをいう.

定理 7.2　$A_{e-1}^{(1)}$ 型 Kac-Moody Lie 代数の可積分既約加群 $V(\Lambda_0)$ に対し Kac 次元公式は次の形で与えられる.

$$\dim_x V(\Lambda_0) = \sum_{n \geq 0} \#\{\lambda \vdash n \mid \lambda \text{ は } e\text{-正則 }\} x^n$$

証明　命題 7.2 を $A_{e-1}^{(1)}$ 型の場合に具体的に計算する．今の場合 A が対称行列であるから $\mathfrak{g}({}^tA)$ も $A_{e-1}^{(1)}$ 型 Kac-Moody Lie 代数で，${}^t\Delta^+$ の元は

$$\alpha^\vee = k(\alpha_0^\vee + \cdots + \alpha_{e-1}^\vee) \quad (k \geq 1)$$

の形か，または $1 \leq i \leq j \leq e-1, k \geq 0$ が存在して

$$\alpha^\vee = \begin{cases} \alpha_i^\vee + \cdots + \alpha_j^\vee + k(\alpha_0^\vee + \cdots + \alpha_{e-1}^\vee) \\ -\alpha_i^\vee - \cdots - \alpha_j^\vee + (k+1)(\alpha_0^\vee + \cdots + \alpha_{e-1}^\vee) \end{cases}$$

の形である．それぞれについて $\dim_x V(\Lambda_0)$ に寄与する項を計算する.

(a) $\alpha^\vee = k(\alpha_0^\vee + \cdots + \alpha_{e-1}^\vee)$ の形の正ルートの寄与は

$$\frac{\prod_{k \geq 1} (1 - x^{k(e+1)})^{e-1}}{\prod_{k \geq 1} (1 - x^{ke})^{e-1}}.$$

(b) $\alpha^\vee = \alpha_i^\vee + \cdots + \alpha_j^\vee + k(\alpha_0^\vee + \cdots + \alpha_{e-1}^\vee)$ の形に対しては,

$$\langle \Lambda_0 + \rho, \alpha^\vee \rangle = k(e+1) + (j-i+1),$$
$$\langle \rho, \alpha^\vee \rangle = ke + (j-i+1)$$

であるから，寄与は

$$\prod_{k\geq 0}\frac{(1-x^{1+k(e+1)})^{e-1}(1-x^{2+k(e+1)})^{e-2}\cdots(1-x^{e-1+k(e+1)})}{(1-x^{1+ke})^{e-1}(1-x^{2+ke})^{e-2}\cdots(1-x^{e-1+ke})}.$$

(c) $\alpha^\vee=-\alpha_i^\vee-\cdots-\alpha_j^\vee+(k+1)(\alpha_0^\vee+\cdots+\alpha_{e-1}^\vee)$ の形に対しては,

$$\prod_{k\geq 0}\frac{(1-x^{2+k(e+1)})(1-x^{3+k(e+1)})^2\cdots(1-x^{e+k(e+1)})^{e-1}}{(1-x^{1+ke})(1-x^{2+ke})^2\cdots(1-x^{e-1+ke})^{e-1}}.$$

まず, (b) と (c) の寄与分を掛け合わせると

$$\begin{aligned}&\prod_{k\geq 0}\frac{(1-x^{1+k(e+1)})^{e-1}(1-x^{2+k(e+1)})^{e-1}\cdots(1-x^{e+k(e+1)})^{e-1}}{(1-x^{1+ke})^{e}(1-x^{2+ke})^{e}\cdots(1-x^{e-1+ke})^{e}}\\&\quad=\frac{\prod_{k\geq 1}(1-x^k)^{e-1}}{\prod_{k\geq 1}(1-x^{k(e+1)})^{e-1}}\frac{\prod_{k\geq 1}(1-x^{ke})^{e}}{\prod_{k\geq 1}(1-x^k)^{e}}\end{aligned}$$

であるから, さらに (a) の寄与分を掛けて

$$\dim_x V(\Lambda_0)=\prod_{k\geq 1}\frac{1-x^{ke}}{1-x^k}=\prod_{k\geq 1}(1+x^k+\cdots+x^{k(e-1)})$$

を得るが, 意味を考えれば右辺は

$$\sum_{n\geq 0}\#\{\lambda\vdash n\mid \lambda\text{ は }e\text{-正則 }\}x^n$$

に等しい. □

次節で既約 $\mathcal{H}_n(q)$-加群の同型類の個数を定理 7.2 を用いて下から評価するのだが, そのためには次のように組合せ論的に定義される可積分加群が必要である. まず可積分加群に対しては次の命題が成り立つことが知られている.

命題 7.3　$\lambda\in P_+$ とする. 可積分 $U(\mathfrak{g})$-加群 V が Verma 加群 $M(\lambda)$ の商加群ならば $V\simeq V(\lambda)$ である.

定義 7.11　$\lambda\in\mathcal{P}$ とする. $x\in\lambda$ が a 行 b 列にあるとき

$$\mathrm{res}(x)=-a+b+e\mathbb{Z}\in\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$$

と定義する．また，$\lambda, \mu \in \mathcal{P}$ と $i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$ に対し

$$\mu \cup \{x\} = \lambda, \quad \mathrm{res}(x) = i$$

のとき $\mathrm{res}(\lambda/\mu) = i$ と書く．

命題 7.4　$\mathcal{F}$ を $\mathcal{P}$ を基底とする複素ベクトル空間とする．$\mathcal{F}$ は次の作用により可積分 $U(\mathfrak{g})$-加群である．

$$\begin{aligned}
e_i\lambda &= \sum_{\mathrm{res}(\lambda/\mu)=i} \mu \\
f_i\lambda &= \sum_{\mathrm{res}(\mu/\lambda)=i} \mu \\
\alpha_i^\vee \lambda &= \left(\delta_{0i} - \sum_{j\in\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}} \#\{x \in \lambda \mid \mathrm{res}(x) = j\}\langle \alpha_i^\vee, \alpha_j\rangle\right)\lambda \\
d\lambda &= -\#\{x \in \lambda \mid \mathrm{res}(x) = 0\}\lambda
\end{aligned}$$

さらに，$\varnothing \in \mathcal{F}$ の生成する $U(\mathfrak{g})$-部分加群は $V(\Lambda_0)$ と同型である．

証明　$U(\mathfrak{g})$-加群であることを示すには $\mathfrak{g}$ の基本関係式を確かめればよい．ただし，可積分加群のときは $\widetilde{\mathfrak{g}}$ の基本関係式を確かめれば十分であることが知られている．ここで，$\mathcal{F}$ が可積分加群であることは定義より明らかである．後半の主張は命題 7.3 より明らか．□

7.2　A 型 Hecke 代数の既約加群の分類

さて，前節までで準備ができたから，A 型 Hecke 代数 $\mathcal{H}_n(q)$ の既約表現の分類をしよう．定理 6.3(2) により $D^\lambda \neq 0$ になる条件を調べればよい．分類に関係するのは基礎体 $\mathbb{F}$ の標数ではなく，q の量子標数である．

定義 7.12　$q \in \mathbb{F}^\times$ に対し，

$$e(q) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid 1 + q + \cdots + q^{k-1} = 0\}$$

を**量子標数**と呼ぶ．以下 $e(q)$ を e と略記する．

$q=1$ ならば量子標数は $\mathbb{F}$ の標数 ℓ に一致する．他方，$q \neq 1$ ならば

$$e = \min\{k \in \mathbb{N} \mid q^k = 1\}$$

である．$e=\infty$ ならば Hoefsmit 加群 V^λ がすべての $\lambda \vdash n$ に対し定義され，$\mathcal{H}_n(q)$ は半単純代数になるから，補題 6.11 より $\{S^\lambda \mid \lambda \vdash n\}$ が $\mathcal{H}_n(q)$-既約加群の同型類の完全代表系になる．よって，$2 \le e < \infty$ のときだけ考えれば十分である．

命題 7.5　$\lambda \vdash n$ が e-正則でなければ $D^\lambda = 0$ である．

証明　$1, 2, \cdots, \lambda_1$ を λ の 1 行めに書き，$\lambda_1+1, \cdots, \lambda_1+\lambda_2$ を 2 行めに書き，... として標準盤 $T \in \mathrm{Std}(\lambda)$ を定める．また，λ の行の長さの重複度を上から順に $m_1, m_2, \cdots, m_r$ とする．このとき，$C(\lambda) \simeq S_{m_1} \times \cdots \times S_{m_r}$ を T の同じ長さの行を並べかえる S_n の部分群とする．さて補題 6.7(3) の証明より $w_\lambda \in S_n$ は

$$\begin{aligned}
w_\lambda(i) &= {}^t\lambda_1 + \cdots + {}^t\lambda_{i-1} + 1 \quad (1 \le i \le \lambda_1) \\
w_\lambda(\lambda_1 + i) &= {}^t\lambda_1 + \cdots + {}^t\lambda_{i-1} + 2 \quad (1 \le i \le \lambda_2) \\
w_\lambda(\lambda_1 + \lambda_2 + i) &= {}^t\lambda_1 + \cdots + {}^t\lambda_{i-1} + 3 \quad (1 \le i \le \lambda_3) \\
&\cdots\cdots
\end{aligned}$$

と定まるのであった．$w_\lambda(a,b)w_\lambda^{-1} = (w_\lambda(a), w_\lambda(b))$ に注意すれば，$u \in C(\lambda)$ に対し $w_\lambda u w_\lambda^{-1} \in S_{{}^t\lambda}$ となる．たとえば，u が最初の m_1 行を並べかえるとすると，

$$\begin{array}{cccc}
1 & 2 & \cdots & \lambda_1 \\
\lambda_1 + 1 & \lambda_1 + 2 & \cdots & 2\lambda_1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
(m_1-1)\lambda_1 + 1 & (m_1-1)\lambda_1 + 2 & \cdots & m_1\lambda_1
\end{array}$$

の各行を一斉に並べかえるので，$w_\lambda u w_\lambda^{-1}$ は

$$\begin{array}{cccc}
1 & {}^t\lambda_1+1 & \cdots & {}^t\lambda_1+\cdots+{}^t\lambda_{\lambda_1-1}+1 \\
2 & {}^t\lambda_1+2 & \cdots & {}^t\lambda_1+\cdots+{}^t\lambda_{\lambda_1-1}+2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
m_1 & {}^t\lambda_1+m_1 & \cdots & {}^t\lambda_1+\cdots+{}^t\lambda_{\lambda_1-1}+m_1
\end{array}$$

の各行を一斉に並べかえるから確かに $w_\lambda u w_\lambda^{-1} \in S_{{}^t\lambda}$ である．S' を $\{1,\cdots,{}^t\lambda_1\}$ を並びかえる $S_{{}^t\lambda}$ の部分群，S'' を $\{1,\cdots,{}^t\lambda_1\}$ の各元を固定する $S_{{}^t\lambda}$ の元のなす部分群とすると $S_{{}^t\lambda} = S' \times S''$ であるから，$u \in C(\lambda)$ に対し

$$w_\lambda u w_\lambda^{-1} = u'u'' \quad (u' \in S', u'' \in S'')$$

と書く．すると，$w_\lambda \in \mathcal{D}_{{}^t\lambda\lambda}$ より

$$\ell(w_\lambda u) = \ell(w_\lambda u w_\lambda^{-1}) + \ell(w_\lambda) = \ell(u') + \ell(u'') + \ell(w_\lambda)$$

を得る．他方，$\ell(w_\lambda u) = \ell(w_\lambda) + \ell(u)$ も成り立つ．議論は同様であるから例で説明することとし，たとえば u を 1 行めと 2 行めの並べかえとすると，$\ell(w_\lambda)$ が順列

$$1, {}^t\lambda_1+1, {}^t\lambda_1+{}^t\lambda_2+1, \cdots, 2, {}^t\lambda_1+2, {}^t\lambda_1+{}^t\lambda_2+2, \cdots, 3, {}^t\lambda_1+3, \cdots$$

の転倒数に等しく，$\ell(w_\lambda u)$ が順列

$$2, {}^t\lambda_1+2, {}^t\lambda_1+{}^t\lambda_2+2, \cdots, 1, {}^t\lambda_1+1, {}^t\lambda_1+{}^t\lambda_2+1, \cdots, 3, {}^t\lambda_1+3, \cdots$$

の転倒数に等しいから，転倒数を比較して $\ell(w_\lambda u) = \ell(w_\lambda) + \ell(u)$ を得る．

以上から，とくに

$$T_{w_\lambda u} = T_{w_\lambda} T_u = T_{u'} T_{u''} T_{w_\lambda} = T_{u''} T_{u'} T_{w_\lambda}$$

が成り立つ．ここで，

$$y' = \sum_{u' \in S'} (-q^{-1})^{\ell(u')} T_{u'}, \quad y'' = \sum_{u'' \in S''} (-q^{-1})^{\ell(u'')} T_{u''}$$

とおく．$S_{{}^t\lambda} = S' \times S''$ より $y_{{}^t\lambda} = y'y'' = y''y'$ である．

さて，$u \mapsto u'$ は $C(\lambda)$ と S' の放物型部分群との群同型を与えることに注意しよう．$C(\lambda)$ を S' の放物型部分群と同一視し，左剰余類の集合 $\mathcal{D} = S'/C(\lambda)$

の各元をその剰余類の中で転倒数が最小の代表元と同一視すると，

$$y' = \left(\sum_{d\in\mathcal{D}}(-q^{-1})^{\ell(d)}T_d\right)\left(\sum_{u\in C(\lambda)}(-q^{-1})^{\ell(u')}T_{u'}\right)$$

と書けるから，

$$\begin{aligned}
z_\lambda &= y_{t^\lambda}T_{w_\lambda}x_\lambda = y''y'T_{w_\lambda}x_\lambda \\
&= y''\left(\sum_{d\in\mathcal{D}}(-q^{-1})^{\ell(d)}T_d\right)\left(\sum_{u\in C(\lambda)}(-q^{-1})^{\ell(u')}T_{u'}T_{w_\lambda}\right)x_\lambda \\
&= \left(\sum_{d\in\mathcal{D}}(-q^{-1})^{\ell(d)}T_d\right)y''\left(\sum_{u\in C(\lambda)}(-q^{-1})^{\ell(u')}T_{u'}T_{w_\lambda}\right)x_\lambda
\end{aligned}$$

であるが，$u\in C(\lambda)$ ごとに

$$y''T_{u'} = (-1)^{\ell(u'')}y''T_{u''}T_{u'}$$

と書きかえられるので，

$$\begin{aligned}
z_\lambda &= \left(\sum_{d\in\mathcal{D}}(-q^{-1})^{\ell(d)}T_d\right)y''\left(\sum_{u\in C(\lambda)}(-q^{-1})^{\ell(u')}(-1)^{\ell(u'')}T_{u''}T_{u'}T_{w_\lambda}\right)x_\lambda \\
&= y''\left(\sum_{d\in\mathcal{D}}(-q^{-1})^{\ell(d)}T_d\right)\left(\sum_{u\in C(\lambda)}(-q^{-1})^{\ell(u')}(-1)^{\ell(u'')}T_{w_\lambda u}\right)x_\lambda \\
&= y''\left(\sum_{d\in\mathcal{D}}(-q^{-1})^{\ell(d)}T_d\right)T_{w_\lambda}\left(\sum_{u\in C(\lambda)}(-q^{-1})^{\ell(u')}(-1)^{\ell(u'')}T_u\right)x_\lambda
\end{aligned}$$

と変形できる．$u\in\mathcal{D}_{\lambda(1^n)}$ であり，u による共役は S_λ の Coxeter 生成元の置換を引き起こすから，$w\in S_\lambda$ に対し

$$\ell(uw) = \ell(u)+\ell(w) = \ell(u)+\ell(uwu^{-1})$$

が成り立ち，$T_uT_w = T_{uw} = T_{uwu^{-1}}T_u$ を得るから，$T_ux_\lambda = x_\lambda T_u$ である．ゆえに，

$$z_\lambda = y''\left(\sum_{d\in\mathcal{D}}(-q^{-1})^{\ell(d)}T_d\right)T_{w_\lambda}x_\lambda\left(\sum_{u\in C(\lambda)}(-q^{-1})^{\ell(u')}(-1)^{\ell(u'')}T_u\right)$$

となることがわかる．$h \in \mathcal{H}_n(q)$ に対し $\langle z_\lambda, hz_\lambda \rangle$ を計算しよう．

$$z' = y'' \left(\sum_{d \in \mathcal{D}} (-q^{-1})^{\ell(d)} T_d \right) T_{w_\lambda} x_\lambda$$

とおくと，補題 6.10 より

$$\begin{aligned} \langle z_\lambda, hz_\lambda \rangle &= \langle z_\lambda T^*_{w_\lambda} y_{{}^t\lambda}, hy_{{}^t\lambda} \rangle \\ &= \sum_{u \in C(\lambda)} (-q^{-1})^{\ell(u')} (-1)^{\ell(u'')} \langle T^*_u T^*_{w_\lambda} y_{{}^t\lambda}, z'^* hy_{{}^t\lambda} \rangle \end{aligned}$$

であり，$(-q^{-1})^{\ell(u')}(-1)^{\ell(u'')} y_{{}^t\lambda} T_{w_\lambda} T_u$ を計算すると

$$\begin{aligned} (-q^{-1})^{\ell(u')}(-1)^{\ell(u'')} y_{{}^t\lambda} T_{w_\lambda u} &= (-q^{-1})^{\ell(u')}(-1)^{\ell(u'')} y_{{}^t\lambda} T_{u'} T_{u''} T_{w_\lambda} \\ &= q^{-\ell(u')} y_{{}^t\lambda} T_{w_\lambda} \end{aligned}$$

だから，

$$\langle z_\lambda, hz_\lambda \rangle = \left(\sum_{u \in C(\lambda)} q^{-\ell(u')} \right) \langle T^*_{w_\lambda} y_{{}^t\lambda}, z'^* hy_{{}^t\lambda} \rangle$$

と変形できる．ここで

$$\sum_{u \in C(\lambda)} q^{-\ell(u')} = \prod_{i=1}^{r} (1+q^{-1})(1+q^{-1}+q^{-2}) \cdots (1+q^{-1}+\cdots+q^{-m_i+1})$$

であるから，λ が e-正則でないことより

$$\sum_{u \in C(\lambda)} q^{-\ell(u')} = 0$$

となる．ゆえに任意の $h \in \mathcal{H}_n(q)$ に対し，$\langle z_\lambda, hz_\lambda \rangle = 0$ となるが，これは $\langle S^\lambda, S^\lambda \rangle = 0$ と同値だから $D^\lambda = 0$ が示された．　□

4.2 節でも触れたように，$X_1 = 1, X_{i+1} = q^{-1} T_i X_i T_i \quad (i \geq 1)$ により $X_1, \cdots, X_n \in \mathcal{H}_n(q)$ を定めると，$X_1, \cdots, X_n$ は互いに可換である．さらに，

$$\begin{cases} T_iX_i = qX_{i+1}T_i^{-1} = X_{i+1}T_i - (q-1)X_{i+1} \\ T_iX_{i+1} = q^{-1}T_i^2X_iT_i = X_iT_i + (q-1)X_{i+1} \end{cases}$$

から

$$T_i(X_i + X_{i+1}) = (X_i + X_{i+1})T_i, \quad T_iX_iX_{i+1} = X_iX_{i+1}T_i$$

が得られるから，$X_1, \cdots, X_n$ の対称式は $\mathcal{H}_n(q)$ のすべての元と可換である．そこで，

$$L_1 = 0, \quad L_{i+1} = q^{-1}(T_iL_iT_i + T_i) \ \ (i \geq 1)$$

により $L_1, \cdots, L_n \in \mathcal{H}_n(q)$ を定めると，$q \neq 1$ なら

$$L_i = \frac{X_i - 1}{q-1}$$

であるから，$L_1, \cdots, L_n$ も互いに可換であり，$L_1, \cdots, L_n$ の対称式は $\mathcal{H}_n(q)$ のすべての元と可換である．ゆえに，$e_i(x_1, \cdots, x_n)$ を i 次基本対称式とし $\mathcal{H}_n(q)$-加群の

$$e_1(L_1, \cdots, L_n), \cdots, e_n(L_1, \cdots, L_n)$$

に関する同時広義固有空間分解を考えることができる．M を $\mathcal{H}_n(q)$-加群とし，

$$\mathbf{C} = \{c_1, \cdots, c_n\} \in \mathbb{F}^n/S_n$$

に対し，$e_i(L_1, \cdots, L_n)$ の固有値が $e_i(c_1, \cdots, c_n)$ $(1 \leq i \leq n)$ である M の同時広義固有空間を $M_{\mathbf{C}}$ とおく．各同時広義固有空間も $\mathcal{H}_n(q)$-加群である．

$k \in \mathbb{Z}$ に対し q-整数 $[k] \in \mathbb{F}$ を

$$[k] = \begin{cases} \dfrac{q^k - 1}{q-1} & (q \neq 1) \\ k \ (\mathrm{mod}\, \ell) & (q = 1) \end{cases}$$

で定める．$e = e(q)$ とし，各 $i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$ に対し i-誘導関手，i-制限関手を次のように定義しよう．

定義 7.13　$\mathrm{Ind}_i : \mathcal{H}_n(q)\text{-mod} \to \mathcal{H}_{n+1}(q)\text{-mod}$ を

$$\mathrm{Ind}_i(M) = \bigoplus_{\mathbf{C} \in \mathbb{F}^n/S_n} \left(\mathrm{Ind}_{\mathcal{H}_n(q)}^{\mathcal{H}_{n+1}(q)} M_{\mathbf{C}} \right)_{\mathbf{C} \sqcup \{[i]\}}$$

で定め，$\mathrm{Res}_i : \mathcal{H}_n(q)\text{-mod} \to \mathcal{H}_{n-1}(q)\text{-mod}$ を

$$\mathrm{Res}_i(M) = \bigoplus_{\mathbf{C} \in \mathbb{F}^n/S_n} \left(\mathrm{Res}_{\mathcal{H}_n(q)}^{\mathcal{H}_{n-1}(q)} M_{\mathbf{C}} \right)_{\mathbf{C} \setminus \{[i]\}}$$

で定める．

補題 7.2　$\mathrm{Ind}_i, \mathrm{Res}_i$ は完全関手である．

証明　Ind_i が完全関手であることは $\mathcal{H}_{n+1}(q)$ が右自由 $\mathcal{H}_n(q)$-加群であることから従う．Res_i が完全関手であることは明らかである．　□

定義 7.14　$\mathcal{K} = \bigoplus_{n \geq 0} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(K_0(\mathcal{H}_n(q)\text{-mod}), \mathbb{C})$ とし，$m \in \mathcal{K}$ に対し

$$\begin{cases} e_i m([M]) = m([\mathrm{Ind}_i M]) \\ f_i m([M]) = m([\mathrm{Res}_i M]) \end{cases}$$

により，線形作用素 $e_i, f_i : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ を定義する．また $h_i = [e_i, f_i]$ とおく．

命題 7.6　単射線形写像 $\psi : \mathcal{K} \to \mathcal{F}$ が存在して次が成立．

(1) 次の可換図式が成り立つ．

$$\begin{tikzcd} \mathcal{K} \arrow[r] \arrow[d, "e_i"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathcal{F} \arrow[d, "e_i"] \\ \mathcal{K} \arrow[r] & \mathcal{F} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{K} \arrow[r] \arrow[d, "f_i"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathcal{F} \arrow[d, "f_i"] \\ \mathcal{K} \arrow[r] & \mathcal{F} \end{tikzcd}$$

(2) $V(\Lambda_0) \simeq U(\mathfrak{g})\varnothing \subseteq \mathrm{Im}(\psi) \subseteq \mathcal{F}$.

証明　$R = \mathbb{F}[[t-q]]$ とし，分解写像

$$d_{K,\mathbb{F}} : K_0(\mathcal{H}_n(t)_K\text{-mod}) \longrightarrow K_0(\mathcal{H}_n(q)\text{-mod})$$

を考える．$\mathcal{H}_n(t)_K$ は半単純代数であり，Hoefsmit 加群 V^λ が既約 $\mathcal{H}_n(t)_K$-加群の完全代表系である．また，$\mathcal{H}_n(q)$-加群 S^λ に対し

$$d_{K,\mathbb{F}}([V^\lambda]) = [S^\lambda]$$

であるから，定理 6.3 より $d_{K,\mathbb{F}}$ は全射である．次に i-制限関手の作用を見るため V^λ を $\mathcal{H}_{n-1}(t)_K \otimes K[L_n]$-加群と考えると

$$V^\lambda = \bigoplus_{\lambda \supseteq \mu \vdash n-1} V^\mu, \quad \left(L_n - \frac{t^{c(\lambda/\mu)} - 1}{t-1}\right) V^\mu = 0$$

である．ただし，$x \in \lambda$ が a 行 b 列にあるとき，$c(x) = -a + b \in \mathbb{Z}$ である．よって，$\mathrm{res}(x) = c(x) + e\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$ に注意すれば

$$[\mathrm{Res}_i(S^\lambda)] = \sum_{\mathrm{res}(\lambda/\mu)=i} [S^\mu]$$

が成り立つ．そこで，Fock 空間 $\mathcal{F}$ を $\langle \mu, [V^\nu] \rangle = \delta_{\mu\nu}$ により

$$\bigoplus_{n \geq 0} K_0(\mathcal{H}_n(t)_K\text{-mod})$$

の双対空間と同一視すると，分解写像の転置写像が単射線形写像 $\psi : \mathcal{K} \to \mathcal{F}$ を定める．$\psi(x) = \sum_{\nu \in \mathcal{P}} c_\nu \nu$ と書くと，

$$\begin{aligned}
\langle \psi(f_i x), [V^\lambda] \rangle &= \langle f_i x, [S^\lambda] \rangle = \langle x, [\mathrm{Res}_i(S^\lambda)] \rangle \\
&= \sum_{\mathrm{res}(\lambda/\mu)=i} \langle x, [S^\mu] \rangle \\
&= \sum_{\mathrm{res}(\lambda/\mu)=i} \langle \psi(x), [V^\mu] \rangle \\
&= \sum_{\mathrm{res}(\lambda/\mu)=i} \sum_{\nu \in \mathcal{P}} c_\nu \langle \nu, [V^\mu] \rangle = \sum_{\mathrm{res}(\lambda/\mu)=i} c_\mu
\end{aligned}$$

を得る．他方，$f_i \psi(x) = \sum_{\mu \in \mathcal{P}} c_\mu f_i \mu$ だから

$$\langle f_i \psi(x), [V^\lambda] \rangle = \sum_{\mu \in \mathcal{P}} c_\mu \sum_{\mathrm{res}(\nu/\mu)=i} \langle \nu, [V^\lambda] \rangle = \sum_{\mathrm{res}(\lambda/\mu)=i} c_\mu$$

となり，$\psi(f_i x) = f_i \psi(x)$ を得る．$\psi(e_i x) = e_i \psi(x)$ も同様である．以上から (1) が示された．(2) は (1) より明らかである． □

定理 7.3 $D^\lambda \neq 0$ となる必要十分条件は λ が e-正則となることである．とくに，既約 $\mathcal{H}_n(q)$-加群の同型類の完全代表系が

$$\{D^\lambda \mid \lambda \vdash n \text{ は } e(q)\text{-正則 }\}$$

で与えられる．

証明 定理 7.2 と命題 7.6 より既約 $\mathcal{H}_n(q)$-加群の同型類の個数は e-正則な n の分割の個数以上であるが，命題 7.5 より逆の不等号も成立するから，$D^\lambda \neq 0$ となるための必要十分条件は $\lambda \vdash n$ が e-正則なことである． □

$q = 1$ のときは，$\mathcal{H}_n(q) = \mathbb{F}S_n$ なので定理 5.2 より既約 $\mathbb{F}S_n$-加群の同型類の個数は S_n の ℓ-正則共役類の個数に等しいことにも注意しておく．

定義 7.15 (n, ℓ)-index

$$I = \left(\begin{array}{ccc|ccc} d_1, & \cdots, & d_N & m_1, & \cdots, & m_N \\ [\alpha_1], & \cdots, & [\alpha_N] & \mu^{(1)}, & \cdots, & \mu^{(N)} \end{array} \right)$$

が **foot index** とは，

(1) 各 $\mu^{(i)}$ は $e(q^{d_i})$-正則

(2) $\mu^{(1)}, \cdots, \mu^{(N)}$ を除くと，

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} d_1, & \cdots, & d_N & m_1, & \cdots, & m_N \\ [\alpha_1], & \cdots, & [\alpha_N] & & & \end{array} \right)$$

は cuspidal index

のときをいう．

補題 7.3 $\alpha \in \mathbb{F}_{q^d}^\times$ を $\#[\alpha] = a$ の ℓ-正則元とする．

(1) ℓ-元 $\beta \in \mathbb{F}_{q^d}^\times$ が存在して $\#[\alpha\beta] = d$ ならば，$d = a$ またはある $c \in \mathbb{N}$ が存在して $d = ae(q^a)\ell^c$ の形である．

(2) 逆に $d = a$ または $d = ae(q^a)\ell^c$ の形ならば，ℓ-元 $\beta \in \mathbb{F}_{q^d}^\times$ が存在して $\#[\alpha\beta] = d$ とできる．

証明　$F : x \mapsto x^q$ を $\mathbb{E}$ の Frobenius 写像とすると，

$$a = \min\{k \in \mathbb{N} \mid F^k(\alpha) = \alpha\}$$

であるから，自然数 $d' \in \mathbb{N}$ が存在して $d = ad'$ と書ける．また，

$$d = \min\{k \in \mathbb{N} \mid F^k(\alpha\beta) = \alpha\beta\}$$

だから，$F' = F^a$ とすると $1 \leq k < d'$ に対し

$$\alpha\beta \neq {F'}^k(\alpha\beta) = \alpha {F'}^k(\beta)$$

であり，また $\alpha\beta = {F'}^{d'}(\alpha\beta) = \alpha {F'}^{d'}(\beta)$ だから

$$d' = \min\{k \in \mathbb{N} \mid {F'}^k(\beta) = \beta\}$$

を得る．そこで，β の位数を ℓ^N とし，β が $\mathbb{E}^\times$ 中で生成する巡回群を $\mathbb{Z}/\ell^N\mathbb{Z}$ と同一視すると，F' は $\mathbb{Z}/\ell^N\mathbb{Z}$ に q^a 倍で作用し位数は d' である．

- $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z} = \mathbb{F}_\ell$ において $q^a \neq 1$ ならば，$\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ における q^a 倍写像の位数が $e(q^a)$ であるが，これは $\mathbb{Z}/\ell^N\mathbb{Z}$ における q^a 倍写像の位数の約数であるから自然数 $d'' \in \mathbb{N}$ が存在して $d = ae(q^a)d''$ と書ける．
- $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z} = \mathbb{F}_\ell$ において $q^a = 1$ ならば $e(q^a) = \ell$ であり，$q^a \in \mathbb{Z}$ を

$$q^a = 1 + x\ell \quad (x \in \mathbb{Z})$$

と書くと，$k = 1, 2, \cdots$ に対し，$x_k \in \mathbb{Z}$ なら

$$(1 + x_k\ell^k)^\ell = 1 + \ell x_k \ell^k + \binom{\ell}{2} x_k^2 \ell^{2k} + \cdots$$

より，$x_{k+1} \in \mathbb{Z}$ が存在して $(1 + x_k\ell^k)^\ell = 1 + x_{k+1}\ell^{k+1}$ と書けることに注意すれば，k に関する帰納法により

$$(1 + x\ell)^{\ell^{N-1}} \equiv 1 \pmod{\ell^N}$$

である．つまり $\mathbb{Z}/\ell^N\mathbb{Z}$ における q^a 倍写像の位数は ℓ^{N-1} の約数であるから，$d'=1$ なら $d=a$ で，$d'>1$ なら d' は $\ell=e(q^a)$ で割り切れて，やはり自然数 $d''\in\mathbb{N}$ が存在して $d=ae(q^a)d''$ と書ける．

以上から $d\neq a$ なら $d=ae(q^a)d''$ と書けることが示された．そこで

$$q^{ae(q^a)}=1+x\ell \quad (x\in\mathbb{Z})$$

と書くと上と同じ議論により $F''=F^{ae(q^a)}$ の位数 d'' が ℓ^{N-1} の約数であることがわかるので，$d=ae(q^a)\ell^c$ の形を得る．つまり (1) が示された．

次に (2) を示す．$d=a$ のときは $\beta=1$ ととればよいから，$d=ae(q^a)\ell^c$ とする．

- $\mathbb{F}_\ell$ において $q^a\neq 1$ のときは，$q^{ae(q^a)}-1=\ell^m x$ $(m\geq 1, x\in\mathbb{Z}\setminus\ell\mathbb{Z})$
- $\mathbb{F}_\ell$ において $q^a=1$ のときは，$q^a-1=\ell^{m-1}x$ $(m\geq 2, x\in\mathbb{Z}\setminus\ell\mathbb{Z})$

と書くと，

$$q^d=1+\ell^{m+c}x' \quad (x'\in\mathbb{Z})$$

と書けるから，q^d-1 は ℓ^{m+c} で割り切れ，$\beta\in\mathbb{F}_{q^d}^{\times}$ であって β の位数が ℓ^{m+c} であるものが取れる．そこで β のなす巡回群を $\mathbb{Z}/\ell^{m+c}\mathbb{Z}$ と同一視すると，F^a は $\mathbb{Z}/\ell^{m+c}\mathbb{Z}$ に q^a 倍写像として作用する．$q^{ae(q^a)}=1+\ell^m x$ のとき，

$$q^{ae(q^a)\ell}=(1+\ell^m x)^\ell=1+\ell^{m+1}(x+\binom{\ell}{2}l^{m-1}x^2+\cdots)$$

は $1+\ell^{m+1}x'$ $(x'\in\mathbb{Z}\setminus\ell\mathbb{Z})$ の形に書ける．以下同様に繰り返して β への Frobenius 作用として解釈すれば

$$F^{ak'}(\beta)\neq\beta \quad (1\leq k'<e(q^a)\ell^c), \quad F^{ae(q^a)\ell^c}(\beta)=\beta$$

が得られる．$q^a=1+\ell^{m-1}x$ のときも同様にして同じ結果を得る．

自然数 k に対し $F^k(\alpha\beta)=\alpha\beta$ が成り立つとすると，$F^k(\alpha)$ と α が ℓ-正則元で $F^k(\beta)$ と β が ℓ-元であることより

$$F^k(\alpha)=\alpha, \quad F^k(\beta)=\beta$$

となるから，$k = ak'$ の形でなければならない．すると，

$$F^k(\alpha\beta) = F^{ak'}(\alpha\beta) = \alpha F^{ak'}(\beta) = \alpha\beta,$$

すなわち $F^{ak'}(\beta) = \beta$ となるための k' の条件を考えることになるから，上で述べたことより

$$d = \min\{k \in \mathbb{N} \mid F^k(\alpha\beta) = \alpha\beta\}$$

が得られ，(2) が示される．　□

定義 7.16　2 つの分割 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots), \mu = (\mu_1, \mu_2, \cdots)$ に対し，

$$\lambda + \mu = (\lambda_1 + \mu_1, \lambda_2 + \mu_2, \cdots)$$

と定める．

補題 7.4　$\lambda \in \mathcal{P}$ に対し，e-正則な分割 $\lambda^{(-1)} \in \mathcal{P}$ と，ℓ-正則な分割 $\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \cdots \in \mathcal{P}$ がただひと通り存在して (e, ℓ)-進展開

$${}^t\lambda = {}^t\lambda^{(-1)} + e\,{}^t\lambda^{(0)} + e\ell\,{}^t\lambda^{(1)} + e\ell^2\,{}^t\lambda^{(2)} + \cdots$$

が成り立つ．

証明　$\lambda \in \mathcal{P}$ に対し $r = \lambda_1$ とおき，長さ i の行の数

$$m_i = \#\{k \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \mid \lambda_k = i\}$$

を用いて $\lambda = r^{m_r}(r-1)^{m_{r-1}} \cdots$ と表す．

$$m_i = n_i + em'_i, \quad (0 \leq n_i \leq e-1)$$

と書いて

$$\lambda^{(-1)} = r^{n_r}(r-1)^{n_{r-1}} \cdots, \quad \lambda' = r^{m'_r}(r-1)^{m'{}_{r-1}} \cdots$$

とおけば，$\lambda^{(-1)}, \lambda'$ は分割であって $\lambda^{(-1)}$ は e-正則である．$\lambda^{(-1)}$ と λ' は λ からただひと通りに決まることに注意する．次に λ' に対し $m'_i = {m'}_i^{(0)} + \ell m''_i$ として $\lambda^{(0)}$ を定め，以下同様にして $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \cdots$ を定めればよい．　□

命題 7.7

(1) 次の操作

$$\left(\begin{array}{c|c} d & m \\ [\alpha] & \lambda \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} d & de(q^d) & \cdots & |\lambda^{(-1)}| & |\lambda^{(0)}| & \cdots \\ [\alpha] & [\alpha] & \cdots & \lambda^{(-1)} & \lambda^{(0)} & \cdots \end{array}\right)$$

を head index

$$I = \left(\begin{array}{ccc|ccc} d_1, & \cdots, & d_N & m_1, & \cdots, & m_N \\ [\alpha_1], & \cdots, & [\alpha_N] & \lambda_1, & \cdots, & \lambda_N \end{array}\right)$$

のすべての

$$\left(\begin{array}{c|c} d_i & m_i \\ [\alpha_i] & \lambda_i \end{array}\right)$$

に施したものを I' とすると，I' は foot index である．

(2) 上の対応によって，head index の集合と foot index の集合のあいだの全単射が得られる．

証明 I' が (n,ℓ)-index であることは補題 7.3(2) から従う．foot index であることを示そう．まず，$\lambda^{(-1)}$ は $e(q^{d_i})$-正則であり，

$$e(q^{d_i e(q^{d_i})}) = e(q^{d_i e(q^{d_i})\ell}) = e(q^{d_i e(q^{d_i})\ell^2}) = \cdots = \ell$$

より $\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \cdots$ は各々，$e(q^{d_i e(q^{d_i})})$-正則，$e(q^{d_i e(q^{d_i})\ell})$-正則，... である．また，$I$ は head index だから，$i \neq j$ ならば $[\alpha_i] \neq [\alpha_j]$ となるので，I から $\lambda^{(-1)}, \lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \cdots$ を除いたものが cuspidal index になるためには

$$d_i,\ d_i e(q^{d_i}),\ d_i e(q^{d_i})\ell, \cdots$$

が相異なれば十分であるが，これは $e(q^{d_i}) \geq 2$ より明らかである．

逆に I' を foot index とすると，補題 7.3(1) より I' の左上成分に現れるのは

$$d_i' = \#[\alpha_i] \quad \text{または} \quad d_i' = \#[\alpha_i]e(q^{\#[\alpha_i]})\ell^c$$

の形のみである．そこで

$$\left(\begin{array}{c|c} d_i' & m_i' \\ [\alpha_i] & \lambda_i' \end{array}\right)$$

の中で $[\alpha_i]=[\alpha]$ のものだけを集めると，cuspidal index の条件より各 d_i' は高々1 回しか現れない．ゆえに，λ を λ_i' たちが λ の (e,ℓ)-進展開になるようにとることができて，これらの

$$\left(\begin{array}{c|c} d_i' & m_i' \\ [\alpha_i] & \lambda_i' \end{array}\right)$$

をただひとつの

$$\left(\begin{array}{c|c} \#[\alpha] & |\lambda| \\ [\alpha] & \lambda \end{array}\right)$$

に置き換える操作を施せば head index が得られる．この操作が (1) の逆操作 $I'\mapsto I$ を与えるので題意の全単射が得られる． □

定理 7.4

(1) $\mathrm{GL}_n(q)$ の cuspidal 対はすべて cuspidal index から得られる．とくに cuspidal index の集合が cuspidal 対の完全代表系を与える．

(2) cuspidal index

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} d_1, & \cdots, & d_N & m_1, & \cdots, & m_N \\ [\alpha_1], & \cdots, & [\alpha_N] & & & \end{array}\right)$$

の定める Harish-Chandra 系列に属する既約 $\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)$-加群の同型類の完全代表系は foot index

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} d_1, & \cdots, & d_N & m_1, & \cdots, & m_N \\ [\alpha_1], & \cdots, & [\alpha_N] & \lambda^{(1)}, & \cdots, & \lambda^{(N)} \end{array}\right)$$

と 1 対 1 に対応する．

証明　$\mathrm{GL}_n(q)$ の ℓ-正則共役類は命題 3.1 より head index と 1 対 1 に対応していて，定理 5.2 より ℓ-正則共役類の個数と既約 $\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)$-加群の同型類の個数は等しいから，命題 7.7 より既約 $\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)$-加群の同型類の個数は foot index の個数に等しい．とくに，foot index から定めた既約 $\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)$-加群がすべての既約 $\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)$-加群を尽くしていることがわかる．□

定理 7.4 は R. Dipper による．これで既約 $\mathrm{GL}_n(q)$-加群の同型類の分類ができたことになるわけだが，以下ではもっと具体的な構成を含んだ分類定理を目標としよう．この構成は G. James によって与えられた．

7.3　既約 $\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)$-加群の分類

G を有限群とする．$\mathbb{F}G$-加群 X に対し，双対空間 $X^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(X, \mathbb{F})$ は，$f \in X^*$ に対し G-作用を

$$gf : x \mapsto f(g^{-1}x) \quad (g \in G)$$

と定めることにより $\mathbb{F}G$-加群であり X の双対加群と呼ばれる．以下では従前どおり $G = \mathrm{GL}_n(q)$ とする．

補題 7.5

(1) X が cuspidal $\mathbb{F}G$-加群ならば X^* も cuspidal $\mathbb{F}G$-加群である．

(2) $\mathbb{F}G$-加群同型 $R_L^G(X)^* \simeq R_L^G(X^*)$ が成り立つ．

証明　X が cuspidal $\mathbb{F}G$-加群ならば，G と異なる放物型部分群 $P = LU$ に対し ${}^*R_L^G(X) = 0$ であるから，

$$e_U = \frac{1}{|U|} \sum_{u \in U} u$$

とおけば $e_U X = 0$ である．ゆえに，$f \in X^*$ に対し

$$(e_U f)(x) = f(e_U x) = 0,$$

すなわち ${}^*R_L^G(X^*) = 0$ となる．よって X^* も cuspidal $\mathbb{F}G$-加群であるから (1) が成り立つ．

(2) を示そう．$P = LU$ を L を Levi 部分にもつ放物型部分群とする．U の元は $(\mathrm{Infl}_L^P X)^*$ に恒等変換で作用するので $(\mathrm{Infl}_L^P X)^* \simeq \mathrm{Infl}_L^P(X^*)$ であり，

$$R_L^G(X^*) = \mathrm{Ind}_P^G \circ \mathrm{Infl}_L^P(X^*) \simeq \mathbb{F}G \underset{\mathbb{F}P}{\otimes} \mathrm{Infl}_L^P(X)^*$$

と書けるから，$Y = \mathrm{Infl}(X)$ とおいて

$$(\mathbb{F}G \underset{\mathbb{F}P}{\otimes} Y)^* \simeq \mathbb{F}G \underset{\mathbb{F}P}{\otimes} Y^*$$

を示せばよい．一般に，M, N が $\mathbb{F}P$-加群ならば $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(M,N)$ も $\mathbb{F}P$-加群であり，P-固定点をとれば

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(M,N)^P = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}P}(M,N)$$

を得るので，左辺は

$$\begin{aligned}(\mathbb{F}G \underset{\mathbb{F}P}{\otimes} Y)^* &= \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}G \underset{\mathbb{F}}{\otimes} Y, \mathbb{F})^P \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}G, Y^*)^P = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}P}(\mathbb{F}G, Y^*)\end{aligned}$$

と書き換えられる．ゆえに，任意の $\mathbb{F}P$-加群 M に対し

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}P}(\mathbb{F}G, M) \simeq \mathbb{F}G \underset{\mathbb{F}P}{\otimes} M$$

を示せばよい．ここで，単射線形写像 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}P}(\mathbb{F}G, M) \to \mathbb{F}G \underset{\mathbb{F}P}{\otimes} M$ が

$$f \mapsto \sum_{hP \in G/P} h \otimes f(h^{-1})$$

により矛盾なく定義されて，$g \in G$ に対し

$$gf \mapsto \sum_{hP \in G/P} h \otimes f(h^{-1}g) = g \sum_{hP \in G/P} g^{-1}h \otimes f(h^{-1}g)$$

であるから，両辺の次元を比べて題意の $\mathbb{F}G$-加群同型を得る．　□

定理 7.4 より，既約 $\mathbb{F}G$-加群の同型類の完全代表系は，cuspidal index から定まる cuspidal 対 (L, X) ごとに $\mathrm{Top}(R_L^G(X))$ に現れる既約 FG-加群の同型類を考えることにより得られるわけだが，補題 7.5 によれば $\mathrm{Top}(R_L^G(X))$ の

代わりに $\mathrm{Soc}(R_L^G(X))$ を考えてもよい．そこで，$\mathrm{Soc}(R_L^G(X))$ に現れる既約 $\mathbb{F}G$-加群の同型類の完全代表系を具体的に与えよう．

$$\mathcal{H} = \mathrm{End}_{\mathbb{F}G}(R_L^G(X))^{\mathrm{op}}$$

とおくと，$R_L^G(X)$ は $(\mathbb{F}G, \mathcal{H})$-加群であり次が成り立つ．

補題 7.6 (L, X) を $G = \mathrm{GL}_n(q)$ の cuspidal 対とすると，次の 2 条件をみたす $m \in R_L^G(X)$ が存在する．

(i) $R_L^G(X) = \mathbb{F}Gm$，つまり $R_L^G(X)$ は $\mathbb{F}G$-加群として m で生成される．

(ii) $R_L^G(X)$ の任意の部分加群 $N \neq 0$ に対し，$N \cap m\mathcal{H} \neq 0$ である．

証明 定理 7.4 によれば，ある cuspidal index

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} d_1, & \cdots, & d_N & m_1, & \cdots, & m_N \\ [\alpha_1], & \cdots, & [\alpha_N] & & & \end{array}\right)$$

が存在して，β_i を $\varphi_i = [\alpha_i \beta_i]$ が $\deg(\varphi_i) = d_i$ となるように取るとき

$$L = \prod_{i=1}^{N} \mathrm{GL}_{d_i}(q)^{\times m_i}, \quad X = \bigotimes_{i=1}^{N} S(\varphi_i)^{\otimes m_i}$$

と与えられるのであった．ここで，$\mathrm{GL}_{d_i}(q)$ の部分群 U_i を

$$U_i = \begin{pmatrix} 1 & * & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & * & \cdots & * \\ & 0 & \ddots & & * \\ \vdots & & \ddots & 1 & * \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

で定め，$\varepsilon : \mathbb{F}_q \to K^{\times}$ を単位指標と異なる加法的指標とするとき，

$$\kappa_i(u) = \varepsilon\left(\sum_{k=1}^{d_i - 1} u_{k,k+1}\right) \quad (u \in U_i)$$

とおくと，補題 5.11 より cuspidal 加群 $S(\varphi_i)$ は

$$e_i = \frac{1}{|U_i|}\sum_{u\in U_i}\kappa_i(u^{-1})u$$

に対し，$\dim e_iS(\varphi_i) = 1$ をみたす．そこで $e_iS(\varphi_i) = \mathbb{F}x_i$ と書き

$$m = \bigotimes_{i=1}^{N} x_i^{\otimes m_i}$$

と定義する．X は既約 $\mathbb{F}L$-加群より $X = \mathbb{F}Lm$ であるから

$$R_L^G(X) = \mathbb{F}G \underset{\mathbb{F}P}{\otimes} \mathbb{F}Lm = \mathbb{F}Gm$$

より (i) が成り立つ．次に $N \neq 0$ を $R_L^G(X)$ の部分加群とすると，

$$0 \neq \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}G}(N, R_L^G(X)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}L}({}^*R_L^G(N), X)$$

であって，しかも

$${}^*R_L^G(N) \subseteq {}^*R_L^G R_L^G(X) = \bigoplus_{w\in\mathcal{D}_{\mu\mu}\cap N_G(L)} {}^wX$$

は半単純 FG-加群であるから，X は ${}^*R_L^G(N)$ の直和因子として現れ，

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}L}(X, {}^*R_L^G(N)) \neq 0$$

となる．ゆえに，$X = \mathbb{F}Lm$ より

$$\sum_{f\in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}L}(X, {}^*R_L^G(N))} f(\mathbb{F}m) \neq 0$$

である．ところが，定理 6.1 の証明で定義された

$$A_w : X \longrightarrow {}^*R_L^G R_L^G(X) \quad (w \in W(L, X))$$

に対し，$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}L}(X, {}^wX) = \mathbb{F}A_w$ かつ $\{A_w\}_{w\in W(L,X)}$ は

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}L}(X, {}^*R_L^G R_L^G(X))$$

の基底だから

$$\sum_{f\in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}L}(X,{}^*R_L^G(N))} f(\mathbb{F}m) \subseteq \bigoplus_{w\in W(L,X)} \sum_{f\in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}L}(X,{}^wX)} f(\mathbb{F}m) = m\mathcal{H}$$

となり，${}^*R_L^G(N)\cap m\mathcal{H}\neq 0$ が得られる．とくに $N\cap m\mathcal{H}\neq 0$ となるから (ii) が成り立つ． □

以下，A を有限次元 $\mathbb{F}$-代数，M を A-加群とし，下記の条件が成り立つと仮定する．

(i) ある $m\in M$ が存在して $M=Am$ である．
(ii) M の任意の部分 A-加群 $N\neq 0$ に対し，$N\cap m\mathcal{H}\neq 0$ である．
(iii) $\mathcal{H}=\mathrm{End}_A(M)^{\mathrm{op}}$ は対称代数である．

$A=\mathbb{F}G, M=R_L^G(X)$ のときは，補題 4.6，定理 6.1，補題 7.6 よりこれらの仮定がみたされる．

補題 7.7　有限次元 $\mathbb{F}$-代数 A と A-加群 M が上記の条件をみたすと仮定する．このとき，$\mathcal{H}$ の任意の左イデアル $\mathfrak{I}$ に対し $M\mathfrak{I}\cap m\mathcal{H}=m\mathfrak{I}$ が成立する．

証明　$\mathfrak{I}\neq 0$ としてよい．

$$\mathfrak{I}'=\{h\in\mathcal{H}\mid mh\in M\mathfrak{I}\}$$

とおくと，$\mathfrak{I}\subseteq\mathfrak{I}'$ より $\mathfrak{I}'\neq 0$ であり，$h\in\mathcal{H}$ に対し，$mh\in M=Am$ よりある $a\in A$ が存在して $mh=am$ と書けるので，

$$mh\mathfrak{I}'=am\mathfrak{I}'\subseteq aM\mathfrak{I}\subseteq M\mathfrak{I}$$

に注意すれば $h\mathfrak{I}'\subseteq\mathfrak{I}'$，すなわち $\mathfrak{I}'$ は $\mathcal{H}$ の左イデアルである．ここで，

$$m\mathfrak{I}'=M\mathfrak{I}\cap m\mathcal{H}$$

が成り立つ．実際，$h\in\mathfrak{I}'$ なら $mh\in M\mathfrak{I}\cap m\mathcal{H}$ より $m\mathfrak{I}'\subseteq M\mathfrak{I}\cap m\mathcal{H}$ であり，$mh\in M\mathfrak{I}\cap m\mathcal{H}$ ならば $h\in\mathfrak{I}'$ だから $M\mathfrak{I}\cap m\mathcal{H}\subseteq m\mathfrak{I}'$ が得られる．

ゆえに $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}'$ を示せば題意の等式が得られる．そこで，$\mathcal{H}$ の右イデアル

$$r(\mathfrak{I}) = \{h \in \mathcal{H} \mid \mathfrak{I}h = 0\}$$

を考える．仮定より $\mathcal{H}$ は対称代数だから，非退化対称双 1 次形式

$$\langle \ , \ \rangle: \ \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{F}$$

が存在して $\langle ab, c\rangle = \langle a, bc\rangle$ $(a, b, c \in \mathcal{H})$ が成り立つ．そこで，

$$\mathfrak{I}^{\perp} = \{h \in \mathcal{H} \mid \langle h, \mathfrak{I}\rangle = 0\}$$

とおくと，$\mathfrak{I}$ は左イデアルなので

$$\langle h, \mathfrak{I}\rangle = \langle h\mathcal{H}, \mathfrak{I}\rangle = \langle \mathfrak{I}, h\mathcal{H}\rangle = \langle \mathfrak{I}h, \mathcal{H}\rangle$$

となり，$\mathfrak{I}h = 0$ は $\langle h, \mathfrak{I}\rangle = 0$ と同値だから，$\mathfrak{I}^{\perp} = r(\mathfrak{I})$ である．

$$lr(\mathfrak{I}) = \{h \in \mathcal{H} \mid hr(\mathfrak{I}) = 0\}$$

とおく．$hr(\mathfrak{I}) = 0$ は $\langle hr(\mathfrak{I}), \mathcal{H}\rangle = 0$ と同値であり，

$$\langle hr(\mathfrak{I}), \mathcal{H}\rangle = \langle \mathcal{H}h, r(\mathfrak{I})\rangle = \langle r(\mathfrak{I}), \mathcal{H}h\rangle = \langle r(\mathfrak{I}), h\rangle = \langle \mathfrak{I}^{\perp}, h\rangle$$

だから，$lr(\mathfrak{I}) = \mathfrak{I}^{\perp\perp} = \mathfrak{I}$ を得る．さて $\mathfrak{I} \subsetneq \mathfrak{I}'$ と仮定して矛盾を導こう．

$$r(\mathfrak{I}) = \mathfrak{I}^{\perp} \supseteq \mathfrak{I}'^{\perp} = r(\mathfrak{I}')$$

となるが，$lr(\mathfrak{I}) \subsetneq lr(\mathfrak{I}')$ だから，ある $h \in \mathcal{H}$ が存在して $hr(\mathfrak{I}') = 0$ かつ $hr(\mathfrak{I}) \neq 0$ となり，$r(\mathfrak{I}) \supsetneq r(\mathfrak{I}')$ である．そこで $h' \in r(\mathfrak{I}) \setminus r(\mathfrak{I}')$ をとると，$\mathfrak{I}h' = 0$ かつ $\mathfrak{I}'h' \neq 0$ とできる．ここで，$m\mathfrak{I}'h' = 0$ ならば

$$M\mathfrak{I}'h' = Am\mathfrak{I}'h' = 0$$

となり，他方 $\mathcal{H}$ は M に忠実に作用するから $M\mathfrak{I}'h' \neq 0$ となり矛盾するので，$m\mathfrak{I}'h' \neq 0$ でなければならないが

$$0 \neq m\mathfrak{I}'h' = (M\mathfrak{I} \cap m\mathcal{H})h' \subseteq M\mathfrak{I}h' = 0$$

よりやはり矛盾が生じる．ゆえに $M\mathfrak{I} \cap m\mathcal{H} = m\mathfrak{I}$ が示された．　□

定理 7.5 有限次元 $\mathbb{F}$-代数 A と A-加群 M が上記の条件をみたすと仮定する．左イデアル $\mathfrak{I}_1, \cdots, \mathfrak{I}_r \subseteq \mathrm{Soc}\,\mathcal{H}$ が既約 $\mathcal{H}$-加群の同型類の完全代表系とすると，$M\mathfrak{I}_1, \cdots, M\mathfrak{I}_r$ は $\mathrm{Soc}\,M$ に現れる既約 A-加群の同型類の完全代表系である．

証明 $0 \neq S \subseteq M$ を既約部分加群とする．仮定より $S \cap m\mathcal{H} \neq 0$ であるから，ある $h_0 \in \mathcal{H}$ が存在して，$mh_0 \neq 0$ かつ $mh_0 \in S$ である．そこで

$$\mathfrak{I} = \{h \in \mathcal{H} \mid mh \in S\}$$

とおくと，$0 \neq h_0 \in \mathfrak{I}$ であり，任意の $h \in \mathcal{H}$ に対し，$mh \in M = Am$ よりある $a \in A$ が存在して $mh = am$ と書けるので，

$$mh\mathfrak{I} = am\mathfrak{I} \subseteq aS \subseteq S$$

となり，$h\mathfrak{I} \subseteq \mathfrak{I}$ すなわち $\mathfrak{I}$ は $\mathcal{H}$ の左イデアルである．さらに，S の既約性と

$$0 \neq mh_0 \in M\mathfrak{I} = Am\mathfrak{I} \subseteq AS \subseteq S$$

より $S = M\mathfrak{I}$ と書ける．$\mathfrak{I}$ が既約 $\mathcal{H}$-加群であることを示すため，$0 \neq \mathfrak{I}' \subsetneq \mathfrak{I}$ となる左イデアル $\mathfrak{I}'$ が存在すると仮定しよう．$m\mathfrak{I}' = m\mathfrak{I}$ とすると，適当な $h_1 \in \mathfrak{I} \setminus \mathfrak{I}'$ と適当な $h_2 \in \mathfrak{I}'$ が存在して $mh_1 = mh_2$ となるから，

$$M(h_1 - h_2) = Am(h_1 - h_2) = 0$$

より $h_1 = h_2$ となり矛盾する．ゆえに $m\mathfrak{I}' \subsetneq m\mathfrak{I}$ である．同様に $0 \neq m\mathfrak{I}'$ を得る．ここで

$$0 \neq m\mathfrak{I}' \subseteq M\mathfrak{I}' \subseteq M\mathfrak{I} = S$$

より $M\mathfrak{I}' = M\mathfrak{I}$ であるから，補題 7.7 より

$$m\mathfrak{I}' = M\mathfrak{I}' \cap m\mathcal{H} = M\mathfrak{I} \cap \mathcal{H} = m\mathfrak{I}$$

が得られ，$m\mathfrak{I}' \subsetneq m\mathfrak{I}$ に矛盾する．ゆえに $\mathfrak{I}$ は既約 $\mathcal{H}$-加群である．以上から $\mathrm{Soc}\,M$ に現れる既約 A-加群は全て既約 $\mathcal{H}$-加群 $\mathfrak{I} \subseteq \mathrm{Soc}\,\mathcal{H}$ を用いて $M\mathfrak{I}$ と書けることが分かった．

既約 $\mathcal{H}$-加群 $\mathfrak{I}$ を用いて $M\mathfrak{I}$ と書ける M の部分加群はつねに既約である．実際，既約でなければある既約 $\mathcal{H}$-加群 $\mathfrak{I}'$ が存在して $M\mathfrak{I}' \subsetneq M\mathfrak{I}$ となるが，補題 7.7 より

$$m\mathfrak{I}' = M\mathfrak{I}' \cap \mathcal{H} \subseteq M\mathfrak{I} \cap \mathcal{H} = m\mathfrak{I}$$

であり，$m\mathfrak{I}' = m\mathfrak{I}$ なら

$$M\mathfrak{I}' = Am\mathfrak{I}' = Am\mathfrak{I} = M\mathfrak{I}$$

となって矛盾するから $m\mathfrak{I}' \subsetneq m\mathfrak{I}$ となる．同様の議論により $0 \neq m\mathfrak{I}'$ であるから $0 \neq \mathfrak{I}' \subsetneq \mathfrak{I}$ が得られ，$\mathfrak{I}$ の既約性に反する．

さて，$\mathfrak{I}_1 \simeq \mathfrak{I}_2 \subseteq \operatorname{Soc}\mathcal{H}$ としよう．$\mathcal{H}$ は自己入射的代数であるから，

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathfrak{I}_1 \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & \mathcal{H} \arrow[d, dashed, "\exists\varphi_1"'] \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{I}_2 \arrow[r] & \mathcal{H}
\end{tikzcd}$$

となり，同型 $\mathfrak{I}_1 \to \mathfrak{I}_2$ は $\varphi_1 \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{H}}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ に拡張できる．そこで $\varphi_1(1) = h_1$ と書くと $\varphi_1(h) = hh_1$ であるから $\mathfrak{I}_1 h_1 = \mathfrak{I}_2$ となり，全射 A-加群準同型 $\psi_1 : M\mathfrak{I}_1 \to M\mathfrak{I}_2$ を $amx \mapsto amxh_1$ により定義することができる．同様にして全射 A-加群準同型 $\psi_2 : M\mathfrak{I}_2 \to M\mathfrak{I}_1$ が構成できるから $M\mathfrak{I}_1 \simeq M\mathfrak{I}_2$ が得られる．

今度は逆に $M\mathfrak{I}_1 \simeq M\mathfrak{I}_2$ とする．全射 $\psi_1 : M\mathfrak{I}_1 \to M\mathfrak{I}_2$ が存在し，

$$\mathfrak{I} = \{h \in \mathcal{H} \mid mh \in \psi_1(m\mathfrak{I}_1)\}$$

とおくと $\mathfrak{I}$ は左イデアルである．実際，$x \in \mathfrak{I}$ ならば適当な $x_1 \in \mathfrak{I}_1$ が存在して $mx = \psi_1(mx_1)$ と書けるから，$h \in \mathcal{H}$ に対し，ある $a \in A$ が存在して $mh = am$ と書けることより

$$mhx = amx = a\psi_1(mx_1) = \psi_1(amx_1) = \psi_1(mhx_1) \in \psi_1(m\mathfrak{I}_1)$$

となり，$hx \in \mathfrak{I}$ が示される．

ここで $m\mathfrak{I} = \psi_1(m\mathfrak{I}_1)$ を示そう．まず $m\mathfrak{I} \subseteq \psi_1(m\mathfrak{I}_1)$ は定義より明らか．次に，$x \in \mathfrak{I}_1$ に対し $h \in \mathcal{H}$ を

$$M = Am \ni am \mapsto \psi_1(amx) = a\psi_1(mx) \in M\mathfrak{I}_2 \subseteq M$$

により定義すると，$mh = \psi_1(mx)$ より $h \in \mathfrak{I}$ であって，$\psi_1(m\mathfrak{I}_1) \subseteq m\mathfrak{I}$ を得るから $m\mathfrak{I} = \psi_1(m\mathfrak{I}_1)$ である．さて，ψ_1 は全射なので

$$M\mathfrak{I}_2 = \psi_1(Am\mathfrak{I}_1) = A\psi_1(m\mathfrak{I}_1) = Am\mathfrak{I} = M\mathfrak{I}$$

であり，補題 7.7 より

$$m\mathfrak{I}_2 = M\mathfrak{I}_2 \cap m\mathcal{H} = M\mathfrak{I} \cap m\mathcal{H} = m\mathfrak{I}$$

となるから，とくに $\mathfrak{I}_2 = \mathfrak{I}$ を得る．また，$m\mathfrak{I} = \psi_1(m\mathfrak{I}_1)$ より

$$\psi_1(m\mathfrak{I}_1) = m\mathfrak{I}_2$$

である．ゆえに，$x_1 \in \mathfrak{I}_1$ に対し $x_2 \in \mathfrak{I}_2$ がただひとつ存在して

$$\psi(mx_1) = mx_2$$

とかけるから，$\varphi_1 : \mathfrak{I}_1 \to \mathfrak{I}_2$ を $\varphi_1(x_1) = x_2$ により定義することができる．ψ_1 が全射ゆえ φ_1 も全射である．また，任意の $h \in \mathcal{H}$ に対し，ある $a \in A$ が存在して $mh = am$ と書けるから，

$$\psi_1(mhx_1) = \psi_1(amx_1) = a\psi_1(mx_1) = amx_2 = mhx_2 = mh\varphi_1(x_1)$$

より $\varphi_1(hx_1) = h\varphi_1(x_1)$ となるので，$\varphi_1 : \mathfrak{I}_1 \to \mathfrak{I}_2$ は全射 $\mathcal{H}$-加群準同型である．同様にして全射 $\mathcal{H}$-加群準同型 $\varphi_2 : \mathfrak{I}_2 \to \mathfrak{I}_1$ が構成できるから $\mathfrak{I}_1 \simeq \mathfrak{I}_2$ が得られる． □

次の定理が本書が目標とした定理であり，Dipper-James による．

定理 7.6 foot index

$$I = \left(\begin{array}{ccc|ccc} d_1, & \cdots, & d_N & m_1, & \cdots, & m_N \\ [\alpha_1], & \cdots, & [\alpha_N] & \lambda^{(1)}, & \cdots, & \lambda^{(N)} \end{array} \right)$$

に対し，cuspidal 対 (L_I, X_I) を

$$L_I = \prod_{i=1}^{N} \mathrm{GL}_{d_i}(q)^{\times m_i}, \quad X_I = \bigotimes_{i=1}^{N} S(\varphi_i)^{\otimes m_i}$$

で定め $M_I = R_{L_I}^G(X_I)$ とおく．ここで $\varphi_i = [\alpha_i \beta_i]$ である．このとき，

$$\mathcal{H}_I = \mathrm{End}_{\mathbb{F}G}(M_I)^{\mathrm{op}} \simeq \bigotimes_{i=1}^{N} \mathcal{H}_{m_i}(q^{d_i})$$

であり，$\mathcal{H}_I$ の元を

$$f_I := \bigotimes_{i=1}^{N} y_{t_{\lambda^{(i)}}} T_{w_{\lambda^{(i)}}} x_{\lambda^{(i)}} T_{w_{\lambda^{(i)}}^{-1}} y_{t_{\lambda^{(i)}}}$$

と定め，$D(I) = M_I f_I$ とおけば $\{D(I) \mid I$ は foot index$\}$ は既約 $\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)$-加群の同型類の完全代表系である．

証明　命題 6.2 と定理 7.5 より明らかである．□

定理 7.6 により既約 $\mathbb{F}\,\mathrm{GL}_n(q)$-加群の同型類が分類できたが，一般に有限群の群代数はブロック代数と呼ばれる直既約代数の直和であり既約加群の同型類の集合もそれに合わせてブロック分解される．次章ではブロック分解を与える Fong-Srinivasan の定理を紹介する．

《今後の講義予定》

第 8 章　$\mathrm{GL}_n(q)$ のブロック理論

§1 不足群

§2 部分対

§3 d-Harish Chandra 理論

§4 ブロックの分類