

一次元粘性保存則系の解の長時間挙動 — 粘性気体の方程式系を軸に —

松村 昭孝

大阪大学大学院情報科学研究科

1. 初めに

本講演では、空間一次元での粘性保存則系と呼ばれる双曲-放物型の非線形微分方程式系の時間大域解の存在とその漸近挙動について、その典型例である粘性と熱伝導性を持つ理想気体の一次元運動を記述する方程式系を軸に、最近の結果と未解決問題を紹介します。

2. 粘性保存則系

空間一次元における粘性保存則系は次のような形の非線形偏微分方程式です：

$$(1) \quad u_t + f(u)_x = (B(u)u_x)_x \quad (x \in \mathbf{R}, \quad t > 0),$$

ここに、 $u = u(t, x)$, $f = f(u)$ はベクトル値関数 $u : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^m$, $f : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^m$ であり、それぞれ保存量、流束と呼ばれます。また、 $B : \mathbf{R}^{m \times m} \rightarrow \mathbf{R}^{m \times m}$ は非負定値な行列値関数で粘性項の係数行列を表します。粘性項がない系 ($B = 0$) を単に保存則系と呼びますが、このとき系が双曲型となるために、流束 f のヤコビ行列 $df(u)$ は状態空間 \mathbf{R}^m のある領域 Ω 上で一様に相異なる実固有値 (特性速度) $\lambda_1(u) < \lambda_2(u) < \dots < \lambda_m(u)$ を持つと仮定します。また、 $\lambda_i(u)$ に対応する右固有ベクトルを $r_i(u)$ としたとき、各 i について Ω 上で一様に $(r_i \cdot \nabla_u \lambda_i)(u) \neq 0$ であるか、 $(r_i \cdot \nabla_u \lambda_i)(u) = 0$ であることを仮定します。前者のとき第 i 特性場は“真に非線形”，後者のとき第 i 特性場は“線形退化”であると云います。次に $B(u)$ に関してですが、正值でなくとも系全体ではエネルギー消散的な構造があることを仮定します。このための十分条件として次の条件が特に有用です (Kawashima[11])：

$$(2) \quad B(u)r_i(u) \neq 0 \quad (u \in \Omega, i = 1, \dots, m).$$

この条件は多次元の場合も込めたもの (u での線形化方程式系の双曲型部分の定在波ベクトルが $B(u)$ の核に属しないこと) を一次元の場合に簡略化し書いたものですが、“Kawashima condition” として知られ、双曲-放物型方程式系を一般的状況で考えるときの標準となっています。以上のような諸条件を満たす典型であり、また粘性保存則系の研究の動機付けとなっている例として次の3例を上げておきます。

Burgers 方程式：

$$(3) \quad u_t + \left(\frac{1}{2}u^2\right)_x = \mu u_{xx}.$$

ここに、 μ は粘性係数 (正定数) です。

粘性気体の等エントロピーモデル：

$$(4) \quad \begin{cases} \rho_t + (\rho w)_x = 0, \\ (\rho w)_t + (\rho w^2 + p)_x = \mu w_{xx}. \end{cases}$$

ここに, ρ は質量密度, w は流速, μ は粘性係数 (正定数), p は圧力で, 気体が等温的や等エントロピー的なき p は状態方程式

$$p = a\rho^\gamma$$

で与えられ, γ は比熱比 (≥ 1 なる定数), a はある正定数です.

粘性及び熱伝導を考慮した理想気体モデル系 :

$$(5) \quad \begin{cases} \rho_t + (\rho w)_x = 0, \\ (\rho w)_t + (\rho w^2 + p)_x = \mu w_{xx}, \\ (\rho(e + \frac{w^2}{2}))_t + ((\rho(e + \frac{w^2}{2}) + p)w)_x = (\kappa \theta_x + \mu w w_x)_x. \end{cases}$$

ここに, θ は絶対温度, κ は熱伝導係数 (正定数), e は単位質量あたりの内部エネルギーで, 気体が理想的でポルトロピックのとき p, e は状態方程式

$$p = R\rho\theta, \quad e = \frac{R}{\gamma-1}\theta$$

で与えられます (R は気体定数).

3. 初期値問題

講演の前半では主に初期値問題についてお話しします. 粘性保存則系 (1) に次の初期条件と空間遠方での状態 $u_\pm \in \Omega$ を与えた初期値問題を考えます :

$$(6) \quad u(0, x) = u_0(x) \quad (x \in \mathbf{R}), \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(t, x) = u_\pm \quad (t \geq 0).$$

このとき, 私たちの興味は初期値問題 (1)(6) の時間大域解の存在と, 特に空間遠方での状態 u_\pm に応じて解がどのような漸近挙動を見せるかにあります. 理想的には, 有界で適当に滑らかな任意の初期値に対し時間大域解が先に求められ, 改めてその大域解に対する漸近挙動をじっくり考えることが出来ればよいのですが, そうは上手く行きません. 単独方程式の場合は最大値原理によりアプリアリオリ評価が得られ, これが可能ですが, 系の場合は単純なものを除けば, Itaya [9](1976) による粘性気体の等温度モデル ((4) で $\gamma = 1$) の場合にのみ時間大域解が構成されており, 他の方は全く未解決な問題です. そこで, 作戦を変更し, なんらかの考察で解の漸近形が近似的にも構成でき, これが漸近安定であろうと期待すると, この漸近形の小近傍に解を制限することでアプリアリオリ評価が得られ, 少なくともその小近傍では時間大域解の存在とその漸近形への漸近も同時に得られるのではないかと考えます. では, どの様に漸近形を予想するのでしょうか. 一番簡単に予想できるのは, $u_- = u_+ = \bar{u}$ のときで, $u = \bar{u}$ が定数自明解であることから, 解は \bar{u} に漸近すると予想するのが自然です. 実際, 一般にエントロピー関数を持つ系が, Kawashima condition を満たすときには $u = \bar{u}$ のある Sobolev 空間での小近傍に時間大域解が構成され, 減衰評価も込めて解の \bar{u} への漸近が示されています (Kawashima [11], 1987). 論文 [11] では, さらには解の漸近形の次のレベルとして, 解は m 個の各特性場に応じた拡散波の重ね合わせに漸近することが示されています. 拡散波への漸近の議論は, Burgers 方程式に対する Hopf [3](1950) に始まり, 後 Nishida [26](1986), Kawashima [12], Liu [17](1985) 等により系の場合に発展がなされ, 後述する粘性衝撃波の漸近安定性の議論に重要な役割を果たすこととなります (最近, 単独方程式について, Kato [10](2007) により最善の減衰評価が得られています). では, 一般の u_\pm の場合ですが, 実は波の伝播の様相は双曲型方程式系部分の解, それも次の Riemann 問題と呼ばれる初期値問題の弱解 (Riemann 解) により特徴付けられるのです :

$$(7) \quad \begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 & (x \in \mathbf{R}, t > 0), \\ u(0, x) = \begin{cases} u_-, & x < 0, \\ u_+, & x > 0. \end{cases} \end{cases}$$

この問題は Riemann が 1860 年の論文 [28] において、気体中を伝播する非線形音響波の考察 (系 (4) で $\mu = 0$ とした 2×2 の Euler 方程式系を考察) のために提唱したもので、解のミクロ的およびマクロ的構造に深く関わる基本的な問題です。Riemann はこの論文中で、後に Lax [16](1957) で大きく発展する非線形保存則系の数学理論における多くの基礎的概念や線形双曲型方程式のリーマン関数の概念などを導入しています。Lax は論文 [16] の中で、保存則系が前述の条件を満たしているとき、Riemann 問題は基本的な単純波として、真に非線形の特性場に対応しては“衝撃波”または“希薄波”を持ち、線形に退化した特性場に対応しては“接触不連続波”を持つことを示し、さらには一般の Riemann データに対しては、いわゆる“Lax の衝撃波条件”(真に非線形である場においての不連続面は対応する左右の特性曲線がぶつかり合うときのみ起こるとする条件)の下、 $|u_+ - u_-|$ が小であれば Riemann 解は m 個の各特性場に応じた単純波の重ね合わせで一意的に構成されることを示しました。衝撃波は波が圧縮されて不連続面が定速度で進行する波で、希薄波は波が引き伸ばされ生じる波、接触不連続波は不連続面が周辺ごと定速度で進行する波です。単独で真に非線形な粘性保存則について、この Riemann 解と対応する粘性保存則の解の漸近挙動との関係を本格的に論じた最初の論文が Il'in-Oleinik [8](1960) です。この中で彼らは粘性保存則の解は、Riemann 解が希薄波のときは、粘性効果があまり働かずこの希薄波自体に、Riemann 解が衝撃波のときは、粘性効果により衝撃波が平滑化された進行波(これを粘性衝撃波という)に漸近して行くことを最大値原理を用い示しました。この事と、系の場合の各単純波は異なる特性速度で伝播し互いに離れて行くことから、系の場合でも Riemann 解の構造に応じて、粘性保存則系の解の漸近形は希薄波、粘性衝撃波、粘性接触波(接触不連続波が粘性効果で緩和されたもの)の重ね合わせとなることが予想されるのです。これらの波の漸近安定性については、系の場合への最大値原理の適用が困難なことから、長い間未解決問題でしたが、Nishihara-M [22](1985), [23](1986), Goodman [1](1986) の論文を切っ掛けに、エネルギー法を用いて単一の衝撃波や希薄波の近傍での取り扱いが条件付ながら可能となり、以後多くの結果が得られることとなりました。しかしながら、特性場に線形退化なものを含み、Riemann 解に接触不連続波を含む場合の結果は殆どありませんでした。最近になって、特性場に線形退化なものを含む典型例である粘性気体の 3×3 の系 (4) について、Riemann 解に接触不連続波を含む場合についても結果が得られるようになって来ました。講演ではこれまでの流れの概要と、粘性気体の系 (4) の初期値問題についての最近の結果を紹介したいと思います。

4. 理想気体モデルの初期値問題

粘性と熱伝導を考慮した理想気体モデル系 (4) の初期値問題に対する最近までの結果を簡単に纏めておきます。天下りですが、初期値問題では、Euler 座標系で記述された系 (4) は質量 Lagrange 座標系を用いると、 $v = 1/\rho$ を比体積として、次の系と同等となることが知られていますので、ここではこちらを使わせて貰います：

$$(8) \quad \begin{cases} v_t - w_x = 0, \\ w_t + p_x = \mu \left(\frac{w_x}{v}\right)_x, \\ \left(e + \frac{w^2}{2}\right)_t + (pw)_x = \left(\kappa \frac{\theta_x}{v} + \mu \frac{w w_x}{v}\right)_x, \end{cases} \quad (x \in \mathbf{R}^1, t > 0).$$

ここに、 p と e についての状態方程式は

$$p = \frac{R\theta}{v}, \quad e = \frac{R}{\gamma - 1}\theta$$

となります。方程式系 (8) を初期条件

$$(9) \quad (v, w, \theta)(x, 0) = (v_0, w_0, \theta_0)(x) \quad (x \in \mathbf{R}),$$

および、空間遠方での条件

$$(10) \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (v, w, \theta)(t, x) = (v_{\pm}, w_{\pm}, \theta_{\pm}) \quad (t > 0)$$

の下に考察することとなります。ここに、 $v_{\pm} (> 0), w_{\pm}, \theta_{\pm} (> 0)$ は与えられた定数で、初期値は適合性条件

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (v_0, w_0, \theta_0)(x) = (v_{\pm}, w_{\pm}, \theta_{\pm}),$$

および

$$\inf_{x \in \mathbf{R}^1} v_0(x) > 0, \quad \inf_{x \in \mathbf{R}^1} \theta_0(x) > 0$$

を満たすとします。このとき、対応する Riemann 問題は次で与えられます：

$$(11) \quad \begin{cases} v_t - w_x = 0, \\ w_t + p_x = 0, \\ (e + \frac{w^2}{2})_t + (pw)_x = 0, & (x \in \mathbf{R}, t > 0), \\ (v, w, \theta)(x, 0) = (v_0^R, w_0^R, \theta_0^R)(x) := \begin{cases} (v_-, w_-, \theta_-), & x < 0, \\ (v_+, w_+, \theta_+), & x > 0. \end{cases} \end{cases}$$

Riemann 問題 (11) における保存則系は、正の v と θ に対し、3 個の相異なる固有値（特性速度）

$$\lambda_1 = -\sqrt{\gamma p/v} < 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = -\lambda_1 > 0$$

を持ち、第 1 特性場と第 3 特性場は真に非線形であり、第 2 特性場は線形退化していることが分かります。このことから、Riemann 解は第 1, 第 3 特性場の希薄波または衝撃波と第 2 特性場の接触不連続波の 18 通りの組み合わせとして与えられます。以下簡単のために、 $z = (v, w, \theta), z_{\pm} = (v_{\pm}, w_{\pm}, \theta_{\pm})$ と略記し、また左方の定数状態 z_- を任意に与えたとき、右方の定数状態 z_+ は必要に応じて z_- の \mathbf{R}^3 での適当な小近傍にあるとします。

1) Riemann 解が、第 i 特性場 ($i = 1, 3$) に対応した単一の希薄波 $z_i^r(x/t)$ で構成される場合、Kawashima-Nishihara-M [13] (1986) において、この希薄波の小近傍に初期値問題 (8)-(10) の時間大域解が存在し、時間と共にこの双曲型部分の波である希薄波 $z_i^r(x/t)$ に漸近することが示されています。Riemann 解が二つの希薄波 $z_1^r(x/t)$ と $z_3^r(x/t)$ で構成される場合も、同様に取り扱うことが可能で、この場合、時間大域解は二つの希薄波の線形結合 $z_1^r(x/t) + z_3^r(x/t) - z_m$ に漸近することが示されます。ここに、 z_m は z_{\pm} から一意的に決まる中継的な定数状態であり、 $z_1^r(x/t)$ が z_- を z_m に繋ぎ、 $z_3^r(x/t)$ が z_m を z_+ に繋ぐものです。何れの場合も、証明は希薄波の単調性を利用したエネルギー法でなされます。

2) Riemann 解が、線形退化した第 2 特性場に対応した単一の接触不連続波で構成される場合は、Huang-Xin-M [6](2006) において、粘性系 (8) を高レベルで近似する“粘性接触波” $z_2^{vc}(x/\sqrt{t})$ が構成され、この粘性接触波の小近傍において、積分平均が零の初期擾乱に対し初期値問題 (8)-(10) の時間大域解が存在し、時間と共にこの粘性接触波 $z_2^{vc}(x/\sqrt{t})$ に漸近することが示されています。証明は、初期擾乱の積分平均零を用い、一度積分した系を考え、これにエネルギー法を工夫してなされます。その後、Huang-Xin-Yang [7] で、初期擾乱の積分平均零を仮定しない場合への拡張がなされています。ここでは、積分した系に問題を持ち込むために、第 1 及び第 3 特性場に対応した拡散波も利用しています。さらに最近、積分した系を用いないですむエネルギー法が工夫され、これまでの証明を簡単にするばかりでなく、Riemann 解が接触不連続解と希薄波で構成される場合の取り扱いが可能となりました (Huang-Li-M [4])。

3) Riemann 解が、第 i 特性場 ($i = 1, 3$) に対応した単一の衝撃波 $z_i^s(x - s_i t)$ (s_i : 衝撃波速度, $s_1 < 0 < s_3$) で構成される場合は、これに対応して粘性系 (8) は z_- を z_+ に繋ぐ“粘性衝撃波”と呼ばれる進行波 $z_i^{vs}(x - s_i t)$ を持ち、またこの進行波は空間方向のシフトに関して自由度を持つことが知られています。このとき、この粘性衝撃波の小近傍に、初期値問題 (8)-(10) の時間大域解が

存在し、解はある α_i だけ空間シフトした粘性衝撃波 $z_i^{vs}(x - s_i t + \alpha_i)$ に漸近することが予想されます。この漸近性は、Kawashima-M [12](1985) により始めて、積分平均零の初期擾乱に対し示されました (シフト $\alpha_i = 0$ の場合に対応)。証明は、初期擾乱の積分平均ゼロを用い、問題を一度積分した系に付いての問題に再定式化した後、粘性衝撃波の単調性を利用したエネルギー法を工夫することで与えられます。一般の積分平均零を仮定しない場合には、シフト α_i を決めることが難しい問題となるのですが、Liu [17](1985) は、第 i 番目以外の特性場に対応する“拡散波” (真に非線形な場では Burgers 方程式、線形退化な場では熱方程式の自己相似解を用いる) を定義し、初期擾乱から一意にシフト α_i と各拡散波の強度を決める規範を提唱しました。Liu の議論を発展させ、Szepessy-Xin [27](1993) は、粘性項を人工粘性項 εu_{xx} に置き換えた系に対して、積分平均零を仮定しない初期擾乱に対する漸近安定性を示しました。しかしながら、系 (4) のような退化した物理的粘性項に対しては、Liu [18] での近似的基本解による詳細な各点評価を用いた手法や、Zumbrun [29],[30] などによる一般論 (Evans 関数を用いた線形化方程式のスペクトル解析とエネルギー法の組み合わせ) からの壮大な試みに拘わらず、未だに明快なものとはなっていません (2×2 の粘性気体の系については Mascia-Zumbrun [19] を参照)。より簡明な手法が望まれるところです。

3.2. Riemann 解が、衝撃波と希薄波とで構成されている場合は、 2×2 の粘性気体の系についてさえ、全くの未解決な問題です。粘性衝撃波と希薄波の扱いの手法が違うことと、伝播速度が違うとは言え両者の相互作用が他の場合より強いことが問題を困難なものにしています。軌道安定性の議論も視野に入れた新たな手法が必要と思われます。

3.3. Riemann 解が、二つの衝撃波 $z_1^s(x - s_1 t)$ と $z_3^s(x - s_3 t)$ で構成される場合も最近まで未解決の問題の一つでした。この場合解は、対応する二つの粘性衝撃波の線形結合

$$z_{\alpha_1, \alpha_3}(x, t) := z_1^{vs}(x - s_1 t + \alpha_1) + z_3^{vs}(x - s_3 t + \alpha_3) - z_m$$

に漸近することが予想されます。ここに、 α_1 と α_3 はそれぞれの粘性衝撃波のシフトを表します。また z_m は z_{\pm} から一意に決まる中継的な定数状態で、 $z_1^s(x - s_1 t)$ が z_- を z_m に、 $z_3^s(x - s_3 t)$ が z_m を z_+ に繋ぎます。最近、Huang-M [5] により $z_{0,0}(x, 0)$ の小近傍に初期値問題 (8)-(10) の時間大域解が存在すると共に、初期擾乱からシフト α_1, α_3 が一意に決まり、解は $z_{\alpha_1, \alpha_3}(x, t)$ に漸近することが示されました。証明は、定数状態 z_m の周りでの第 2 特性場に対応する線形退化な拡散波を系 (4) 固有の構造を上手く利用して構成し、上でも述べた Liu [17] によるシフト α_1, α_3 と拡散波の強度の決め方の議論と Kawashima-M [12] のエネルギー法の議論を組み合わせでなされます。次の問題として、これに上述した粘性接触波についての新たなエネルギー法を組み合わせることで、Riemann 解が接触不連続波と二つの衝撃波で構成される場合も解決が期待され、現在研究が進行中ですが、未だ解決にはいたっていません。また、Riemann 解が接触不連続解と一つだけの衝撃波で構成される場合も、残りの特性場に対応する非線形拡散波の性質が上記の線形退化拡散波より性質が悪いことから、同じ手法が使えず未解決な問題となっています。

5. 半空間上の初期値境界値問題

講演の後半部分では、前半の初期値問題の結果を頭において、半空間上の初期値境界値問題を取り上げ、境界の影響が解の漸近挙動にどのように影響を与えるかを紹介します。特に、粘性気体の 2×2 の系 (3) に対する、境界の上で流体の流入や流出がある問題 (それぞれ Inflow 問題, Outflow 問題という) を考えます。この場合、解の漸近挙動は、境界上での条件と遠方での状態に依存し、これまで以上に多彩になることが予想されます。実際、粘性の効果と境界条件との相互作用で形成される境界層解と呼ばれる定常解が現れることがあり、解の漸近挙動は、単に境界から離れて行く粘性衝撃波や希薄波ばかりではなく、これらと境界層解の重ね合せに漸近することが一般に起こるのです (3×3 にもなるとこれに粘性接触波までありますからもう大変です)。この Inflow 問題と Outflow 問題については、論文 [20] において、境界層解がいつ現れるのかの規範が、境界条件と対

応する Riemann 問題の解の境界上の値との整合性として提唱されており、これを用い漸近挙動の分類がなされています。改めて方程式系を書いておきますと

$$(12) \quad \begin{cases} \rho_t + (\rho w)_x = 0, \\ (\rho w)_t + (\rho w^2 + p)_x = \mu w_{xx}, & (x > 0, t > 0), \\ p = a\rho^\gamma. \end{cases}$$

いま、方程式系 (12) に初期条件

$$(13) \quad (\rho, w)(0, x) = (\rho_0, w_0)(x), \quad (x > 0), \quad \inf_{x>0} \rho_0(x) > 0,$$

遠方 $x = +\infty$ での状態を与える条件

$$(14) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\rho, w)(t, x) = (\rho_+, w_+) \quad (t > 0),$$

および、境界 $x = 0$ 上で次の 3 種類の境界条件のうちの一つを課して考えます：

Case 1 (境界上, 流速零):

$$(15)_1 \quad w(t, 0) = 0, \quad t > 0.$$

Case 2 (境界上, 流速負):

$$(15)_2 \quad w(t, 0) = w_- < 0, \quad t > 0.$$

Case 3 (境界上, 流速正):

$$(15)_3 \quad w(t, 0) = w_- > 0, \quad \rho(t, 0) = \rho_- > 0, \quad t > 0.$$

ここに、 ρ_\pm と w_\pm は与えられた定数であり、無論初期条件は境界条件 (14) と対応する (15) の中の一つを整合条件として満たすことを仮定します。上記三つの場合のうち、Case 1 は境界が通常の不透過な壁の場合で、この場合は密度 ρ を偶関数で、流速 w を奇関数で全空間に拡張することで初期値問題に帰着でき、従って特別な境界層解は出現しないことが予想できます。Case 2 (resp. Case 3) は固定境界上で流体の一定の流出 (outflow) 量 (resp. 流入 (inflow) 量) が与えられている場合で、対応する初期値境界値問題を Outflow (resp. Inflow) 問題と呼びます。また、Cases 1, 2 では、境界の上で質量密度については境界条件が与えられておらず、一方 Case 3 では、与えられていることに注意します。これは、方程式系 (8) の主要部を考えたとき、第 1 方程式を質量密度 ρ についての双曲型方程式、第 2 方程式を速度 w について放物型方程式と見たとき、初期値境界値問題が適切 (well posed) であるために必要だからです。この双曲-放物型方程式系としての初期値境界値問題の適切性と、波の伝播を支配する系全体の双曲型方程式系の波の伝播の性質との関係が、後に大きく漸近挙動に影響することとなります。方程式系 (8) に対する初期値問題については、講演の前半で述べたように空間遠方 $x = \pm\infty$ での条件

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\rho, w)(t, x) = (\rho_\pm, w_\pm) \quad (t > 0)$$

の下に、解の漸近挙動は基本的に対応する Euler 方程式に対する Riemann 問題の解と同様な挙動となりました (無論、不連続面を持つ衝撃波については対応する粘性衝撃波に置き代える)。そのため、解の漸近形としては、希薄波と粘性衝撃波の組み合わせとして、全部で 9 種類に分類されます。一方、半空間上の初期値境界値問題の場合、粘性の影響は不連続衝撃波が平滑化され滑ら

かな粘性衝撃波になることにはばかりではなく、境界条件によっては“境界層解”と呼ばれる定常解が形成されることにも現れます(単独方程式系で簡単にこの例を見ることができます)。それでは、いつ境界層解が現れるかですが、次のような規範が有効です。まず、Euler 方程式に対する $x_0 > 0$ を中心とする Riemann 問題を考え、Riemann データの右側のデータとして、(14) の (ρ_+, w_+) を与え、左側のデータとしては (15) を満たす全ての (ρ_-, w_-) を考えて見ます。そのとき、もし左側の Riemann データが唯一に定まって、Riemann 問題の解の境界 ($x = 0$) 上での値が境界条件 (15) を満たせば(つまり、全ての非線形波は境界から離れて行くとき)、境界層解は現れないと予想します。一方、左側の Riemann データをどのようにとっても Riemann 問題の解の境界 ($x = 0$) 上での値が境界条件 (15) を満たさない場合(つまり、境界に入ってくるか定在する非線形波があるとき)境界層解が現れると予想するのです。粗く言うと、Euler 方程式での波の伝播の性質と双曲-放物型方程式系としての境界条件が不整合なとき、この不整合を粘性項の性質で埋め合わせるように定常な境界層解が立ち現れると見るわけです。従って、Euler 方程式に対する特性速度は $w \pm c(\rho)$ (ここに $c(\rho)$ は音速) ですから、解の漸近挙動は境界条件や遠方での条件が亜音速、遷音速、超音速であるかによって大きく影響されることが予想されます。また、この規範でみると、境界層解が現れない Case 1 の結果は改めてよく理解できます。この場合、境界条件 (15) では未定であった $(\rho_-, 0)$ が唯一に定まり、Euler 方程式の Riemann 問題の解が、 $w_+ > 0$ の場合は境界から逃げる希薄波のみ、 $w_+ < 0$ の場合は境界から逃げる衝撃波のみで与えられることから、境界層解は現れず、(12) の解はそれぞれ境界から逃げてゆく希薄波と粘性衝撃波へ漸近していくという訳です。この様に Case 1 の場合は、初期値問題と大きく異なり、ただ 2 種類だけに漸近挙動が分類され、境界の影響により漸近挙動の分類は大きく単純化されることが分かります。実際、この予想が正しいことが $w_+ > 0$ の場合には Nishihara-M [24](2000)、 $w_+ < 0$ の場合については条件付ながら Mei-M [21](1999) で示されました。一方、Inflow 問題や Outflow 問題では、一般に境界層解が現れるために遥かに漸近挙動は複雑に(それゆえに面白くも)なりますが、これについてもこれまで多くの結果が得られています。講演では、単独方程式での境界層解の例を示した後(cf. Hashimoto-M [2])、粘性気体の 2×2 の系 (8) を中心に、上記の規範に従って漸近安定性が示されている幾つかの場合や減衰評価まで込めて得られている場合(cf. [20] とその参考文献, Nishihara-M [25], Kawashima-Nishibata-Nishikawa [15], Nakamura-Nishibata-Yuge [26]) などの結果を紹介します。最後に、粘性気体の 3×3 の系 (4) に対する初期値境界値問題に若干の注意を与え、また全般についての今後の問題を上げて締めくくりにしたいと思います。いま、半空間上で系 (8) を初期条件

$$(16) \quad (v, w, \theta)(0, x) = (v_0, w_0, \theta_0)(x) \quad (x > 0)$$

と、空間遠方での条件

$$(17) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (v, w, \theta)(t, x) = (v_+, w_+, \theta_+) \quad (t > 0)$$

および、境界 $x = 0$ 上での境界条件(流速についてディリクレ零、絶対温度についてノイマン零条件)

$$(18) \quad w(t, 0) = 0, \quad \theta_x(t, 0) = 0, \quad (t > 0)$$

を課す初期値境界値問題を考えます。ここに、初期条件は

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (v_0, w_0, \theta_0)(x) = (v_+, w_+, \theta_+), \quad \inf_{x > 0} v_0(x) > 0, \quad \inf_{x > 0} \theta_0(x) > 0$$

を満たすとします。この問題では、上記の 2×2 の系についての Case 1 のように、 v と θ を偶関数として、 w を奇関数として全空間に拡張することで、 $z_+ = (v_+, w_+, \theta_+)$ and $z_- = (v_+, -w_+, \theta_+)$.

としたときの、初期値問題 (8)-(10) に帰着されます。このとき、遠方の流速 w_+ が負であれば、対応する Euler 方程式に対する Riemann 解は衝撃波速度が $s_1 = -s_3$ であるような二つの衝撃波 $z_1^s(x - s_1 t)$ と $z_3^s(x - s_3 t)$ から構成され、また中継的な定数状態 z_m は $z_m = (v_m, 0, \theta_m)$ の形に与えられることが分かります。このようにして、 w_+ が負なら、 $z_3^{vs}(x)$ の小近傍において、初期値境界値問題 (16)-(18) の時間大域解が存在すると共に、あるシフト α_3 が定まり、解は境界から離れて行く粘性衝撃波 $z_3^{vs}(x - s_3 t + \alpha_3)$ に漸近して行くことが示されます。同様にして、遠方の流速 w_+ が正のときは、解が境界から離れて行く希薄波に漸近することを示すことが出来ます。これらの結果は、粘性気体の 2×2 の系に対する前述の [21] や [24] の結果の自然な拡張となっています。いま、境界条件 (18) を絶対温度についてはディリクレ型である

$$(19) \quad w(t, 0) = 0, \quad \theta(t, 0) = \theta_-, \quad (t > 0), \quad \theta_- > 0$$

に変更すると、対応する Riemann 解には特別な場合を除き接触不連続を必ず含むことが示されますので、少なくとも単一の粘性接触波の漸近安定性を境界条件 (19) の下で考察できなくてはなりません。しかしながら、この境界条件を満たす粘性接触波のうまい近似解の構成自体に困難があり、未解決な問題となっています。流速の境界条件が零でない、Inflow 問題や Outflow 問題では、事態はより複雑となり、単一の希薄波が境界から離れて行く場合のように、いかにも出来ても不思議でない場合を除けば、殆どの場合が未解決です。

6. 終わりに

終わりに、今後の問題として

- 上で述べた既存の未解決問題をどんないじましい方法でも試みる
- 粘性気体の系で個別に得られた面白そうな結果を、可能な限り分かりやすい手法で一般系に拡張すること
- 粘性気体の半空間の問題で、境界条件を物理的に興味ある場合に拡張すること（特に、ステファン問題との関連で境界上で化学反応や相転移がある場合や、ガス星との関連で真空と接する場合などの自由境界値問題等）
- 粘性気体系で、状態に真空を含む場合の弱解の漸近挙動を考えること
- 上で述べた全ての波の漸近安定性を多次元の中で考えること（もともと、一次元の解は多次元モデルでの平面波解）

を上げておきます。無論、これらについても一部の結果が最近得られていますが（文献に上げてないことご容赦ください）、殆どの場合がこれからの問題です。

以上、本講演で、圧縮性粘性流体の漸近挙動の世界に少しでも理解を持っていただけの方が増えましたら幸いに思います。

終わりの終わりにですが、全般にわたる入門書として、早稲田大学西原健二氏との共著「非線形微分方程式の大域解 — 圧縮性粘性流の数学解析 —」（日本評論社、2004）をお買い求め頂ければ幸いです（まだ沢山売れ残っているそうです）。

References

- [1] J. Goodman: Nonlinear asymptotic stability of viscous shock profiles for conservation laws, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 95 (1986), 325-344.
- [2] I. Hashimoto, A. Matsumura: Large-time behavior of solutions to an initial-boundary value problem on the half line for scalar viscous conservation law, *Meth. Appl. Anal.*, 14 (2007), 45-59.
- [3] E. Hopf: The partial differential equations $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$, *Commun. Pure Appl. Math.*, 3 (1950), 201-230.
- [4] F. Huang, J. Li, A. Matsumura: Stability of combination of viscous contact wave with rarefaction waves for 1-D compressible Navier-Stokes system, to appear in *Arch. Rat. Mech. Anal.*
- [5] F. Huang, A. Matsumura: Stability of a composite wave of two viscous shock waves for the full compressible Navier-Stokes equation, *Commun. Math. Phys.*, 289 (2009), 841-861.
- [6] F. Huang, A. Matsumura, Z. Xin: Stability of contact discontinuities for the 1-D compressible Navier-Stokes equations, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 179 (2006) 55-77.
- [7] F. Huang, T. Yang, Z. Xin: Contact discontinuity with general perturbations for gas motions, *Adv. in Math.*, 219 (2008), 1246-1297.
- [8] A. M. Il'in, O. A. Oleinik: Asymptotic behavior of the solutions of Cauchy problem for certain quasilinear equations for large time (Russian), *Mat. Sbornik*, 51 (1960), 191-216.
- [9] N. Itaya: A survey on the generalized Burgers' equation with a pressure model term, *J. Math. Kyoto Univ.*, 16 (1976), 223-240.
- [10] M. Kato: Large time behavior of solutions to the generalized Burgers equations, *Osaka J. Math.*, 44 (2007) 923-943.
- [11] S. Kawashima: Large-time behaviour of solutions to hyperbolic-parabolic systems of conservation laws and applications, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, Sect.A 106 (1987), 169-194.
- [12] S. Kawashima, A. Matsumura: Asymptotic stability of traveling wave solutions of systems for one-dimensional gas motion, *Comm. Math. Phys.*, 101 (1985) 97-127.
- [13] S. Kawashima, A. Matsumura, K. Nishihara: Asymptotic behavior of solutions for the equations of a viscous heat-conductive gas, *Proc. Japan Acad.*, 62, Ser.A (1986) 249-252.
- [14] S. Kawashima, S. Nishibata, M. Nishikawa: L^p energy method for multi-dimensional viscous conservation laws and application to the stability of planar waves, *J. Hyperbolic Differ. Eqn.*, 1 (2004), 581-603.
- [15] S. Kawashima, S. Nishibata, P. Zhu: Asymptotic stability of the stationary solution to the compressible Navier-Stokes equations in the half space, *Comm. Math. Phys.*, 240 (2003), 483-500.

- [16] P. D. Lax: Hyperbolic systems of conservation laws II, *Commun. Pure Appl. Math.*, 10 (1957), 537-566.
- [17] T.-P. Liu.: “Nonlinear stability of shock waves for viscous conservation laws”, *Mem. Amer. Math. Soc.*, 56, 1985.
- [18] —: Pointwise convergence to shock waves for viscous conservation laws, *Commun. Pure Appl. Math.*, 50 (1997), 1113-1182.
- [19] C. Mascia, K. Zumbrun.: Stability of small-amplitude shock profiles of symmetric hyperbolic-parabolic systems, *Comm. Pure Appl. Math.*, 57 (2004) 841–876.
- [20] A. Matsumura: Inflow and outflow problems in the half space for a one-dimensional isentropic model system of compressible viscous gas, *Methods Appl. Anal.*, 8 (2001), 645-666.
- [21] A. Matsumura, M. Mei.: Convergence to traveling fronts of solutions of the p -system with viscosity in the presence of a boundary, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 146 (1999) 1–22.
- [22] A. Matsumura, K. Nishihara: On the stability of travelling wave solutions of a one-dimensional model system for compressible viscous gas, *Jpn. J. Appl. Math.*, 2 (1985), 17–25.
- [23] —: Asymptotics toward the rarefaction waves of the solutions of a one-dimensional model system for compressible viscous gas, *Jpn. J. Appl. Math.*, 3 (1986), 1–13.
- [24] —: Global asymptotics toward the rarefaction wave for solutions of viscous p -system with boundary effect, *Quart. Appl. Math.*, 58 (2000) 69–83.
- [25] T. Nakamura, S. Nishibata, T. Yuge: Convergence rates toward the stationary solution for the compressible Navier–Stokes equation in half space, *Journal of Differential Equations*, 241 (2007), 94–111.
- [26] T. Nishida: Equations of motion of compressible viscous fluids, in “Pattern and Waves” edited by Nishida, T., Mimura, M., Fujii, H., Amsterdam, Tokyo: Kinokuniya/North-Holland, 1986, 97-128
- [27] A. Szepessy, Z. Xin.: Nonlinear stability of viscous shock waves, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 122 (1993) 53–103.
- [28] B. Riemann: Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite (1860), in “Bernhard Riemann Collected Papers”, Edited by R. Narasimhan, Springer-Verlag, 1990.
- [29] K. Zumbrun: Multidimensional stability of planar viscous shock waves, in “Advances in the theory of shock waves”, 307–516, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., 47, Birkhauser Boston, Boston, MA, 2001.
- [30] —: Stability of large-amplitude shock waves of compressible Navier-Stokes equations, in “Handbook of Mathematical Fluid Dynamics, III”, Edited by S.J. Friedlander, D. Serre, Elsevier, 2004.