粘性気体の運動方程式、時間大域解とその漸近挙動

～部分積分で30余年～

大阪大学、数学教室談話会

松村昭孝
大阪大学情報科学研究科
平成27年2月16日

粘性気体の研究に至るまで　I

- 昭和26年：　鹿児島市に生まれる（本籍　山口県）
  オタクな少年時代、漠然と技術者を目指す

- 昭和44年：　京都大学工学部数理工学科入学
  新入学生歓迎会で鵜飼正二先生と薩摩順吉先生に出会う、
  自主ゼミで松村睦豪先生に出会う

- 昭和47年：　偶然に大矢勇次郎先生の研究室に
  半線形波動方程式を学ぶ（溝畑茂先生の教科書，W.Straussの論文）

- 昭和48年：　修士課程進学
- 昭和49年：　西田孝明先生に出会う
  消散型波動方程式の解の減衰の研究

粘性気体の研究に至るまで　II

- 昭和50年：　博士課程進学
  エネルギー法による準線形消散型波動方程式の研究
  西田先生に粘性気体の研究に誘われる

その後　**せっせと部分積分(エネルギー法)で数十年**

- 昭和53年 4月：京都大学工学部（野木達夫先生に世話になる）
- 昭和55年10月～昭和57年1月：Wisconsin-Madison大学，MRC
  Wagner，T.Liu，Klainerman，Strauss，Dafermos，
  Lax，Majda，加藤敏夫先生、他多くの人と出会う
- 昭和63年 4月：金沢大学
  林田和也先生、一瀬孝先生に世話になる、痛風になる
- 平成5年３月より１セメスター：Stanford大学
- 平成5年10月より大阪大学　（井川先生、西谷先生に世話になる）

粘性と熱伝導性を持つ理想気体の方程式系

$$
\begin{cases}
\rho_t + (\rho w)_x = 0, \\
(\rho w)_t + (\rho w^2 + p)_x = (\mu w_x)_x, \\
(\rho(e + \frac{w^2}{2}))_t + ((\rho(e + \frac{w^2}{2}) + p)w)_x = (\kappa\theta_x + \mu w w_x)_x.
\end{cases}
$$

ρ : 質量密度,　w : 流速,　θ : 絶対温度,
μ : 粘性係数（正定数),　κ : 熱伝導係数（正定数),
p : 圧力,　e : 内部エネルギー.

状態方程式 :

$$
p = R\rho\theta, \qquad e = \frac{R}{\gamma - 1}\theta.
$$

R : 気体定数, γ : 比熱比(> 1, 定数).

オイラー 方程式系　(1757)

$$
\begin{cases}
\rho_t + (\rho w)_x = 0, \\
(\rho w)_t + (\rho w^2 + p)_x = 0, \\
(\rho(e + \frac{w^2}{2}))_t + ((\rho(e + \frac{w^2}{2}) + p)w)_x = 0.
\end{cases}
$$

Leonhard Euler
(1707 – 1783)

Swiss mathematician and physicist

ダランベールのパラドックス (1752)

Jean-Baptiste le Rond d'Alembert
(1717 – 1783)

粘性 Navier (1827), Stokes (1845)

内部応力：

$$T = p - \mu w_x$$

Claude-Louis Navier
(1785 – 1836)

Sir George Gabriel Stokes
(1819 – 1903)

熱伝導性 Fourier (1807)

熱流ベクトル：

$$\boxed{q = -\kappa \theta_x}$$

Jean Baptiste Joseph Fourier
(1768 – 1830)

粘性と熱伝導性を持つ理想気体の方程式系

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho w)_x = 0, \\ (\rho w)_t + (\rho w^2 + p)_x = (\mu w_x)_x, \\ (\rho(e + \frac{w^2}{2}))_t + ((\rho(e + \frac{w^2}{2}) + p)w)_x = (\kappa \theta_x + \mu w w_x)_x. \end{cases}$$

粘性気体の断熱モデル

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho w)_x = 0, \\ (\rho w)_t + (\rho w^2 + p)_x = (\mu w_x)_x, \\ p = p(\rho) = a\rho^\gamma \quad (a：\text{正定数}). \end{cases}$$

バーガース方程式

$$w_t + (\frac{1}{2}w^2)_x = \mu w_{xx}.$$

粘性保存則系の初期値問題

$$u_t + f(u)_x = (B(u)u_x)_x \quad (x \in \mathrm{R},\ t > 0).$$

初期条件　:　$u(0,x) = u_0(x) \quad (x \in \mathrm{R}),$

遠方条件　: $\lim_{x \to \pm\infty} u(t,x) = u_\pm \quad (t \geq 0).$

$u : \mathrm{R}_+ \times \mathrm{R} \to \mathrm{R}^m$, 保存量,　$f : \mathrm{R}^m \to \mathrm{R}^m$, 流束

$B : \mathrm{R}^{m \times m} \to \mathrm{R}^{m \times m}$, 粘性項行列（非負定値）

問題

時間大域解の存在と、初期状態 u_0 と遠方状態 $u_\pm$ に応じての解の長時間挙動

・$f(u)$ について

$df(u)$: f のヤコビ行列

$\lambda_i(u)$: $df(u)$ の固有値(特性速度), 全て実数値

$$\lambda_1(u) < \lambda_2(u) < \cdots < \lambda_m(u), \quad (u \in \Omega).$$

$r_i(u)$: $\lambda_i(u)$ に対応する右固有ベクトル

“真に非線形” と “線形退化”

$(r_i \cdot \nabla_u \lambda_i)(u) \neq 0 \quad (u \in \Omega)$ $\Longleftrightarrow$ i 特性場は “真に非線形”

$(r_i \cdot \nabla_u \lambda_i)(u) = 0 \quad (u \in \Omega)$ $\Longleftrightarrow$ i 特性場は “線形退化”

・$B(u)$ について

正定値でなくとも，系全体ではエネルギー消散的
十分条件（Kawashima 条件）：

$$B(u)r_i(u) \neq 0 \qquad (u \in \Omega, i = 1,,,m).$$

・解の粗いイメージ

$$\boxed{u_t + df(u)u_x = 0}$$

粘性項無し$(B=0)$:

局所的に固有ベクトル $r_i(u)$ に平行で伝播速度 $\lambda_i(u)$ を持つ
m 個の波$(1 \leq i \leq m)$ に分解されて時間発展

粘性項有り:

上記の波がエネルギー散逸効果に応じ平滑化されつつ時間発展.

・有界な一般的な初期値についての時間大域解の存在については、単独方程式の場合や特殊な場合を除いて未解決

戦略

I）時間についての漸近解 $U(t,x)$ を予測して構成

$$U_t + f(U)_x = (B(U)U_x)_x + R$$

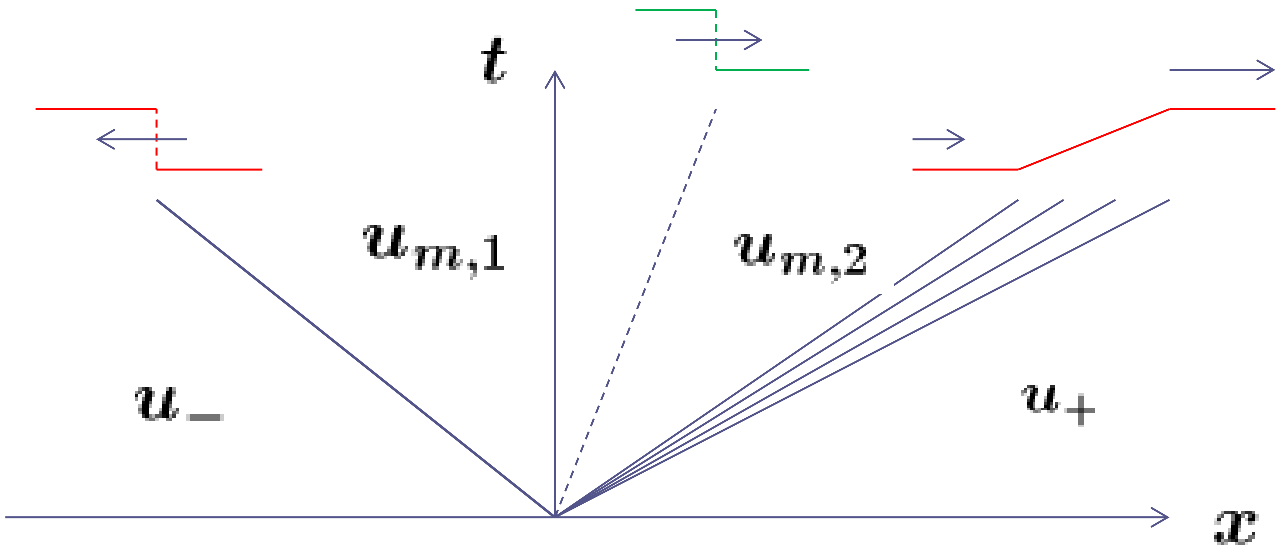
剰余項 $R(t,x)$: x,t について十分良い減衰

II）漸近解からの差　$u - U$ に対しアプリオリ評価

III) 漸近性を込めて漸近解の近傍に時間大域解を構成

リーマン問題

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 \quad (x \in \mathrm{R},\ t > 0), \\ u(0,x) = \begin{cases} u_-, & x < 0, \\ u_+, & x > 0. \end{cases} \end{cases}$$



Riemann解

Riemann (1860)

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho w)_x = 0, \\ (\rho w)_t + (\rho w^2 + p)_x = 0, \\ p = p(\rho) = a\rho^\gamma. \end{cases}$$

Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite.

(Aus dem achten Bande der Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. 1860.)

Georg Friedrich Bernhard Riemann
(1826 – 1866)

Peter David Lax (1926--)

Lax (1957)

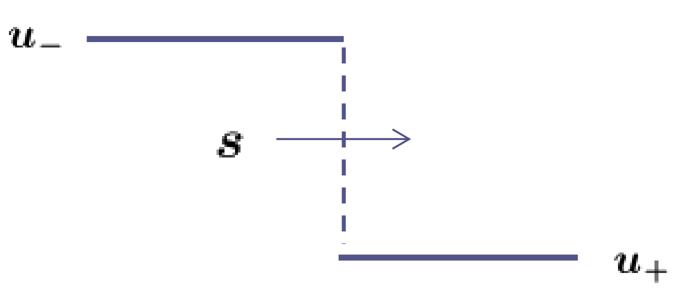
$$u_t + f(u)_x = 0.$$

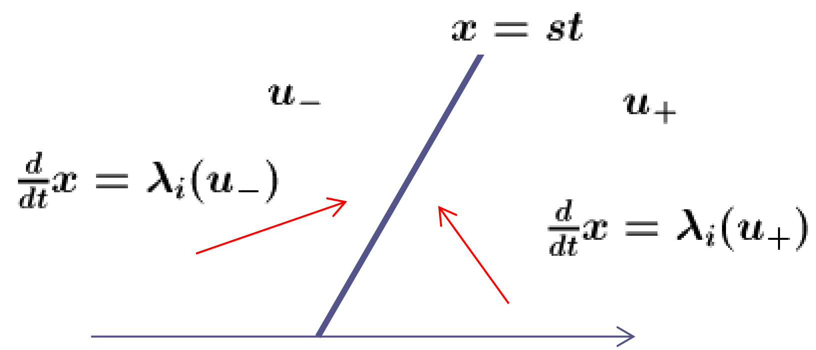
双曲保存則系の数学解析の基礎

Commun. Pure Appl. Math., 10 (1957)

リーマン解の単純波　　特性場が真に非線形の場合は次のどちらか

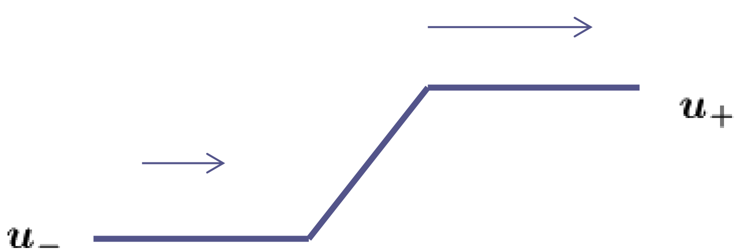
衝撃波 (Shock wave) :　$u_i^s(x - st; u_-, u_+)$

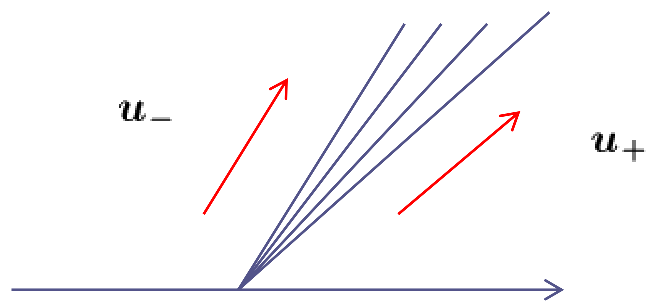




Rankine-Hugoniot 条件 :　$f(u_-) - su_- = f(u_+) - su_+$

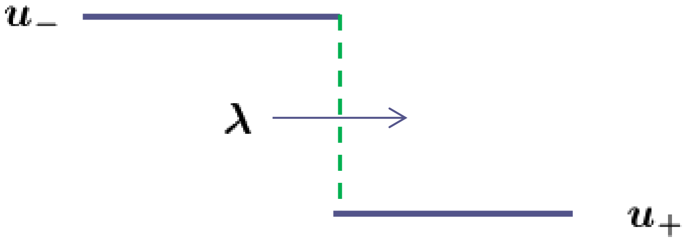
希薄波 (Rarefaction wave) :　$u_i^r(x/t; u_-, u_+)$

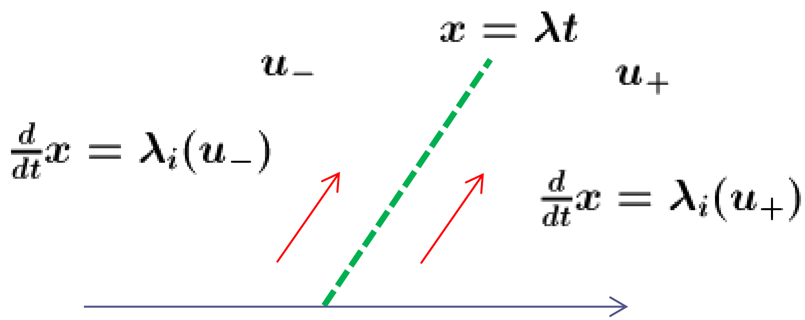




リーマン解の単純波　特性場が線形退化の場合

接触不連続波 (Contact discontinuity) :　$u_i^c(x-\lambda t; u_-, u_+)$



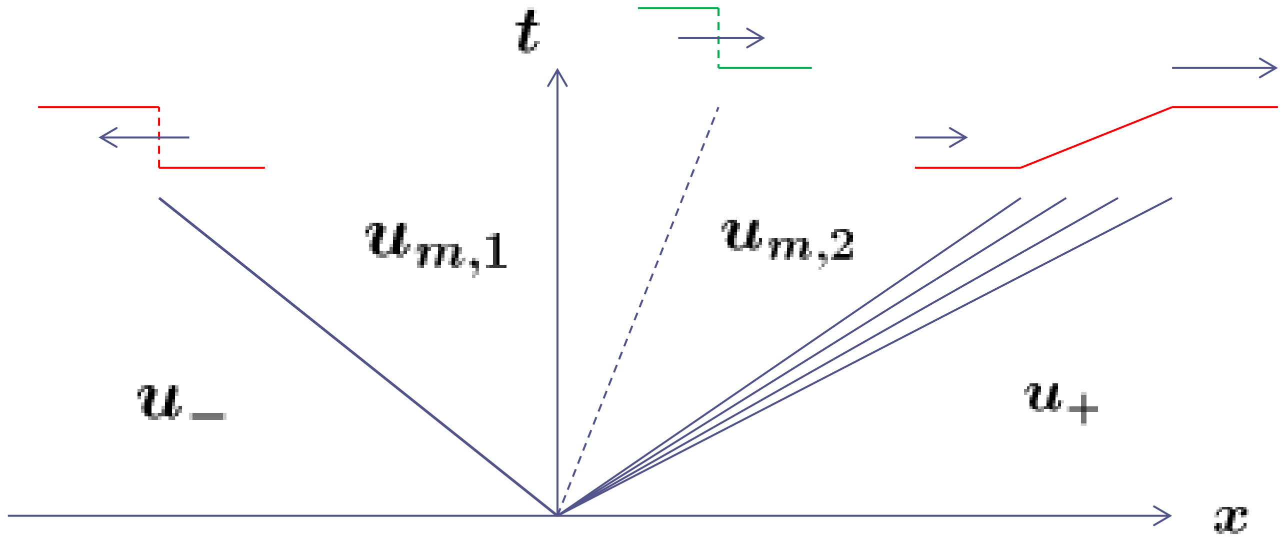


$$\lambda = \lambda_i(u_-) = \lambda_i(u_+)$$

リーマン解の一般解

m個の単純波（無い場合も込めて）の合成した波

Riemann 解の例



$$u^R(t,x) = u_1^s(x - s_1 t; u_-, u_{m,1})$$

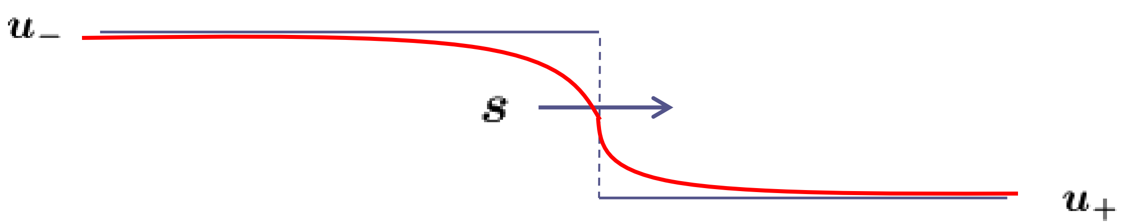
$$+ u_2^c(x - \lambda_2 t; u_{m,1}, u_{m,2}) - u_{m,1}$$

$$+ u_3^r(x/t; u_{m,2}, u_+) - u_{m,2}$$

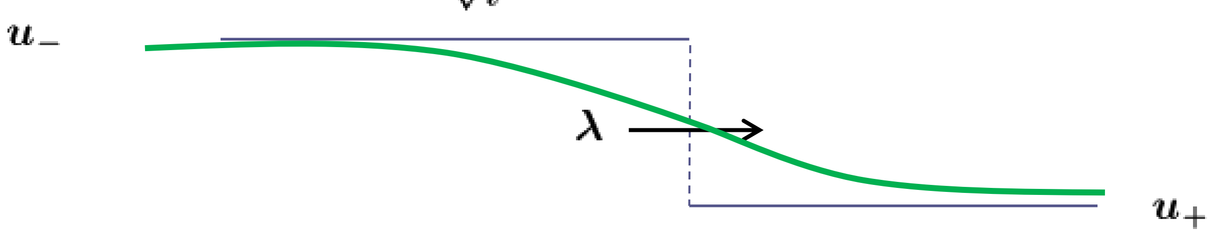
粘性効果があるときの漸近解

- 希薄波（rarefaction wave） ⟶ 希薄波（rarefaction wave）
- 衝撃波（shock wave） ⟶ 粘性衝撃波（viscous shock wave）
- 接触不連続波（contact discontinuity） ⟶ 粘性接触波（viscous contact wave）

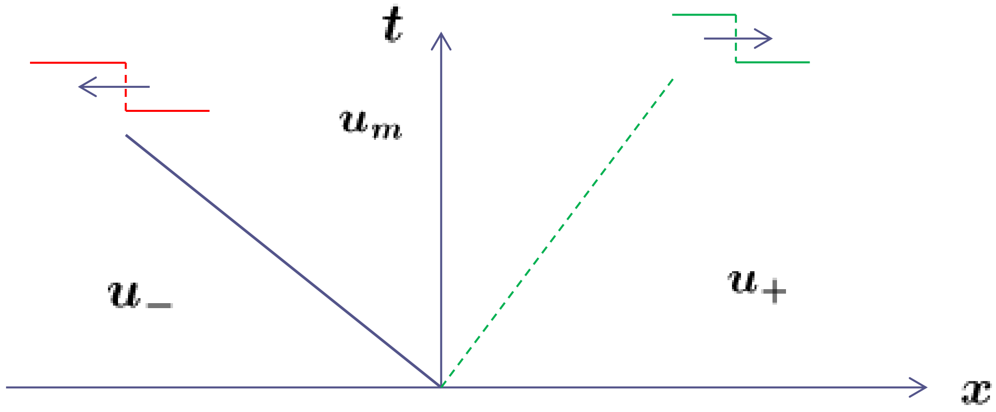
粘性衝撃波： $U_i^{vs}(x-st;u_-,u_+)$ 粘性効果で平滑化された進行波



粘性接触波： $U_i^{vc}(\frac{x-\lambda t}{\sqrt{t}};u_-,u_+)$ 粘性効果で平滑化された拡散波



合成波の場合（例）



Reimann 解：

$$u^R(t,x) = u_1^s(x - st; u_-, u_m) + u_2^c(x - \lambda t; u_m, u_+) - u_m$$

漸近解：

$$U(t,x) = U_1^{vs}(x - st + \alpha; u_-, u_m) + U_2^{vc}\left(\frac{x-\lambda t}{\sqrt{t}}; u_m, u_+\right) - u_m$$

既存の仕事について

- 単独粘性保存則（含 バーガース方程式）

Il'in –Oleinik (1960)　　真に非線形の場合

粘性衝撃波，希薄波の漸近安定性

最大値原理

- 粘性保存則系の粘性衝撃波の漸近安定性

エネルギー法

Nishihara-Matsumura (1985)
（断熱モデル）

Goodman (1986)
（人工粘性項を持つ一般粘性保存則系）

以後，系の解の漸近挙動の研究が急速に進展

Olga Arsenievna Oleinik
(1925 -2001)

Arlen Mikhailovich Il'in
(1932--)

断熱モデル（2×2 システム）

第1，第2特性場 ： 真に非線形 ⟹ Riemann解のパターン：9 種類

Riemann 解		粘性系での漸近安定性
衝撃波	⟶	**Nishihara-M** (1985) （平均ゼロの初期擾乱） **Mascia-Zumbum** (2004) **Liu-Zen** (2009)
衝撃波＋衝撃波	⟶	**Nishihara-M** (1985)と同様
希薄波，　希薄波＋希薄波	⟶	**Nishihara-M** (1986)
希薄波＋衝撃波	⟶	**未解決**

粘性・熱伝導性理想気体モデル（3×3システム）

第1，第3特性場：真に非線形
第2特性場：線形退化

⟹ Riemann解のパターン：18種類

衝撃波 ⟶ **Kawashima-M** (1985)
（平均ゼロの初期擾乱）

Liu（1997）
Zumbum（2004）
Liu-Zen（2009）

衝撃波＋衝撃波 ⟶ **Huang-M**（2009）

希薄波＋(希薄波) ⟶ **Kawashima-Nishihara-M** (1986)

(希薄波)＋ 接触不連続 ＋(希薄波） ⟶ **Huang-Li-M**（2010）

衝撃波＋ 接触不連続 ＋(衝撃波) ⟶ 未解決

希薄波＋(接触不連続)＋衝撃波 ⟶ 未解決

ショートコース：非線形微分方程式の時間大域解

時間大域解の構成法：

時間局所解の構成 ＋ アプリオリ評価

時間局所解の構成： 逐次近似，不動点定理 等

アプリオリ評価（a priori estimate) :

- エネルギー法 （部分積分）
- 線形化方程式の解の減衰評価法

状態空間 H 上の発展方程式（力学系）

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u(t) = F(u(t)), \quad t \geqslant 0, \\ u(0) = u_0 \in H \end{cases}$$

目的： 時間大域解 $u \in C([0,\infty); H)$ の構成.

局所解の存在

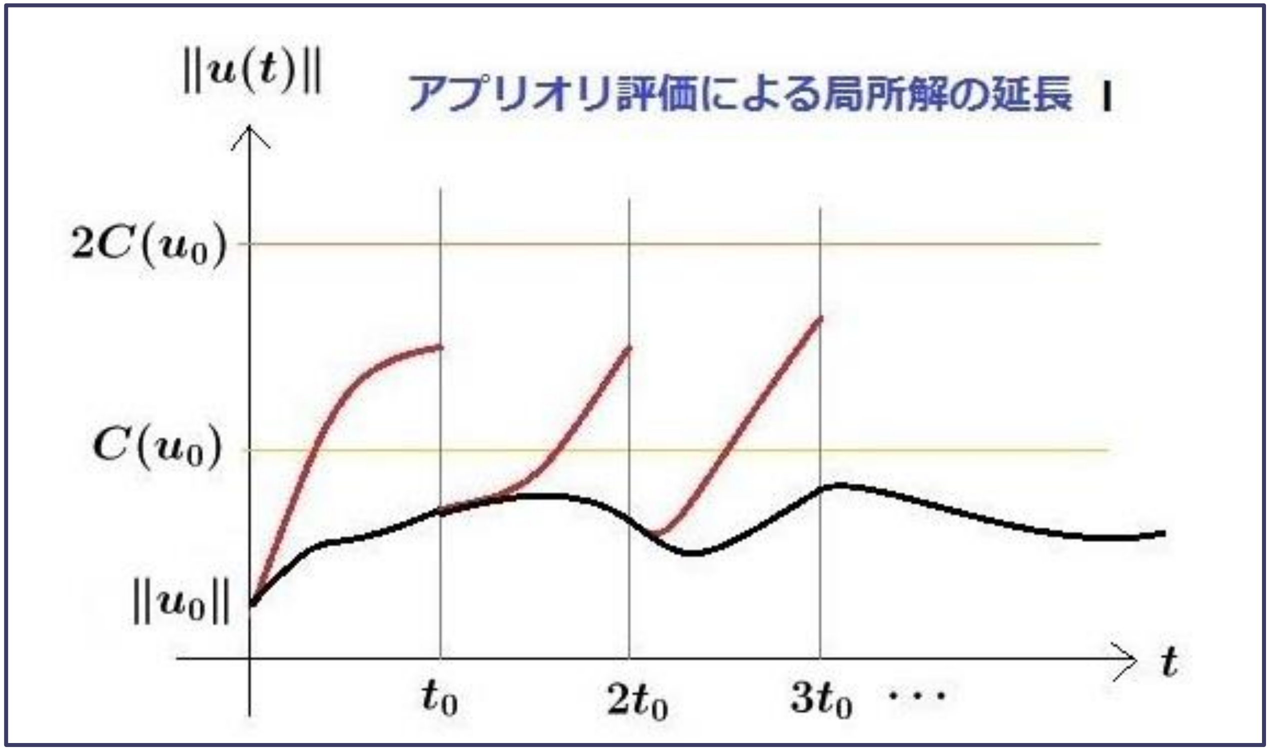
任意の $M > 0$ に対し, $t_0 = t_0(M) > 0$ が存在して,
$\|u_0\| \leq M$ ならば, 解 $u \in C([0, t_0]; H)$ が存在し,

$$\sup_{t \in I} \|u(t)\| \leq 2M.$$

アプリオリ評価　I

任意の$u_0 \in H$ に対し, $C(u_0) > 0$が存在して次が成立：
ある$T > 0$に対し,$u \in C([0,T];H)$ が解ならば,

$$\sup_{t \in [0,T]} \|u(t)\| \leq C(u_0).$$



アプリオリ評価　II

ある $\varepsilon_0 > 0$ と $C_0 > 0$ が存在して次が成立：
ある $T > 0$ に対し，$u \in C([0,T];H)$ が解でありかつ

$$\sup_{t\in[0,T]} \|u(t)\| \le \varepsilon_0$$

ならば，

$$\sup_{t\in[0,T]} \|u(t)\| \le C_0\|u_0\|.$$

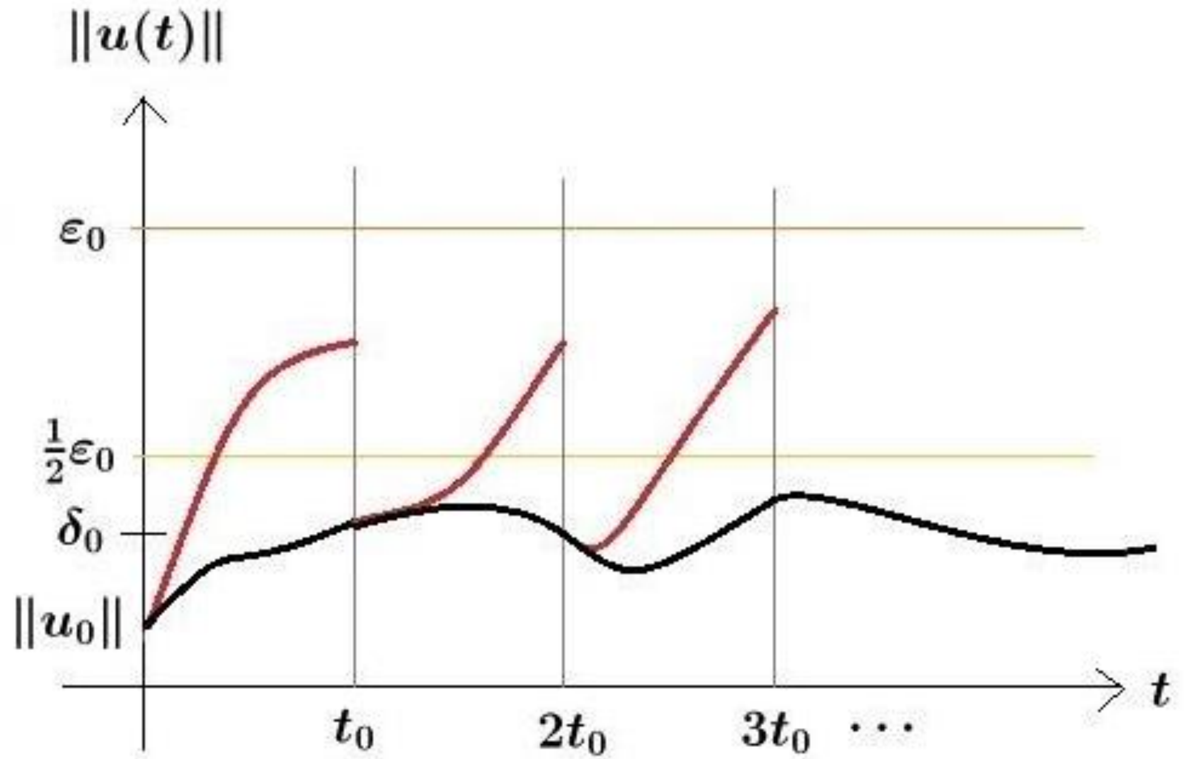
<u>**アプリオリ評価　II　による時間大域解の構成**</u>

$$\|u_0\| \le \delta_0 := \min\left(\frac{\varepsilon_0}{2}, \frac{\varepsilon_0}{2C_0}\right)$$ とすれば良い．

アプリオリ評価　II　による時間大域解の構成

$$\|u_0\| \leq \delta_0 := \min\left(\frac{\varepsilon_0}{2}, \frac{\varepsilon_0}{2C_0}\right)$$ とすれば良い.

$$\left(C_0\|u_0\| \leq \frac{\varepsilon_0}{2} \quad \text{に注意する} \right)$$



エネルギー法によるアプリオリ評価の簡単な例

$$H = R^2, \quad u = {}^t(x, v)$$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -(\kappa x + \alpha x^3) - \mu\, v \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

$$\kappa > 0, \alpha \in R, \mu > 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v^2 + \frac{\kappa}{2}x^2 + \frac{\alpha}{4}x^4\right) + \mu v^2 = 0$$

$$\left(\frac{1}{2}v^2 + \frac{\kappa}{2}x^2 + \frac{\alpha}{4}x^4\right)(t) + \int_0^t \mu v^2(\tau)\,d\tau$$

$$= \left(\frac{1}{2}v_0^2 + \frac{\kappa}{2}x_0^2 + \frac{\alpha}{4}x_0^4\right), \quad t \in [0, T]$$

$\alpha \geq 0$ のとき， $\|u\|^2 = |x|^2 + |v|^2$ に注意して，

$$\sup_{t\in[0,T]} \|u(t)\|^2 \leq C(u_0).$$

アプリオリ評価　I

$\alpha < 0$ のとき

$$\left(\frac{1}{2}v^2 + \frac{\kappa}{2}x^2\left(1 - \frac{|\alpha|}{2\kappa}x^2\right)\right)(t) + \int_0^t \mu v^2(\tau)\,d\tau$$

$$= \left(\frac{1}{2}v_0^2 + \frac{\kappa}{2}x_0^2 + \frac{\alpha}{4}x_0^4\right), \quad t \in [0,T]$$

$$\sup_{t\in[0,T]} \|u(t)\|^2 \le \frac{\kappa}{|\alpha|}$$

ならば

$$\sup_{t\in[0,T]} \|u(t)\|^2 \le C_0\|u_0\|^2$$

アプリオリ評価　II

非線形形偏微分方程式への
エネルギー法の提案と応用　（1980年前後から）

・非線形消散的波動方程式のゼロ解の近傍での時間大域解の構成

（Publ. RIMS Kyoto Univ., 1977)

$$u_{tt} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(u, u_t, \nabla u) u_{x_i x_j} + \kappa u_t = 0$$

・粘性と熱伝導性を持つ気体方程式系の定数状態の近傍での時間大域解の構成

(J. Math. Kyoto Univ., 1980, with T. Nishida)

気体の方程式系の場合

$$\begin{cases} \rho_t + \nabla \cdot (\rho w) = 0, \\ \rho(w_t + w \cdot \nabla w) + \nabla p = \mu \Delta w + (\mu + \lambda) \nabla (\nabla \cdot w), \\ \rho(e_t + w \cdot \nabla e) + p \nabla \cdot w = \kappa \Delta \theta + \Psi, \\ p = R\rho\theta, \quad e = \dfrac{R}{\gamma - 1}\theta, \\ \Psi = \dfrac{\mu}{2} \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} (w^i_{x_j} + w^j_{x_i})^2 + \lambda |\nabla \cdot w|^2 \end{cases}$$

定数状態 $(\rho, w, \theta) = (\bar{\rho}, 0, \bar{\theta})$ の近傍での初期値問題

初期条件 $(\rho, w, \theta)(0) = (\rho_0, w_0, \theta_0)$

の下に、時間大域解を探す：

$$(\rho - \bar{\rho}, w, \theta - \bar{\theta}) \in C([0, \infty); H)$$

<u>局所解の構成とアプリオリ評価　II</u>

H: Sobolev 空間 $H^k(R^n)$ (例えば, 空間3次元では $H = H^3$)

$$H^k = \{ f \in L^2(R^n) \mid (\frac{\partial}{\partial x})^\alpha f \in L^2(R^n),\ |\alpha| \le k \}$$

エネルギー形式

熱力学の関係式　　$de = \theta\, dS - p\, dv$

e を　S:エントロピーと v : 比体積 $(= 1/\rho)$ の関数と考えると凸関数

$$e_v = -p, \quad e_S = \theta,$$

に注意して，エネルギー形式を定数状態 $U = (\bar{\rho}, 0, \bar{\theta})$ の周りで

$$E(t) = \int \rho\, \mathscr{E}_U(u)\, dx,$$

と定義．ここに，$u = (\rho, w, \theta)$ と $\tilde{u} = (\tilde{\rho}, \tilde{w}, \tilde{\theta})$ に対し，

$$\mathscr{E}_{\tilde{u}}(u) = e - \tilde{e} + \tilde{p}(v - \tilde{v}) - \tilde{\theta}(S - \tilde{S}) + \frac{1}{2}|w - \tilde{w}|^2.$$

$$\frac{d}{dt}E(t) + \int \left(\frac{\bar{\theta}}{\theta}\Psi(w) + \frac{\kappa\bar{\theta}}{v\theta^2}|\nabla\cdot\theta|^2 \right) dx = 0$$

$$E(t) \sim \int |(v-\bar{v}, w, S-\bar{S})(t)|^2\, dx$$

$$\sim \|(u-U)(t)\|_{L^2}^2.$$

$\Downarrow$

k 階までの全ての偏導関数の評価

$\Downarrow$

Sobolev空間 H^k での アプリオリ評価 II の成立

粘性接触波の漸近安定性

粘性・熱伝導性理想気体モデルの Lagrange座標 での表現：

$$\begin{cases} v_t - w_x = 0, \\ w_t + p_x = \mu\left(\frac{w_x}{v}\right)_x, \\ \left(e + \frac{w^2}{2}\right)_t + (pw)_x = \left(\kappa\frac{\theta_x}{v} + \mu\frac{ww_x}{v}\right)_x. \end{cases}$$

$v = 1/\rho$ ： 比体積

状態方程式 :

$$p = \frac{R\theta}{v}, \quad e = \frac{R}{\gamma - 1}\theta$$

初期条件 :

$$(v, w, \theta)(x, 0) = (v_0, w_0, \theta_0)(x)$$

遠方条件 :

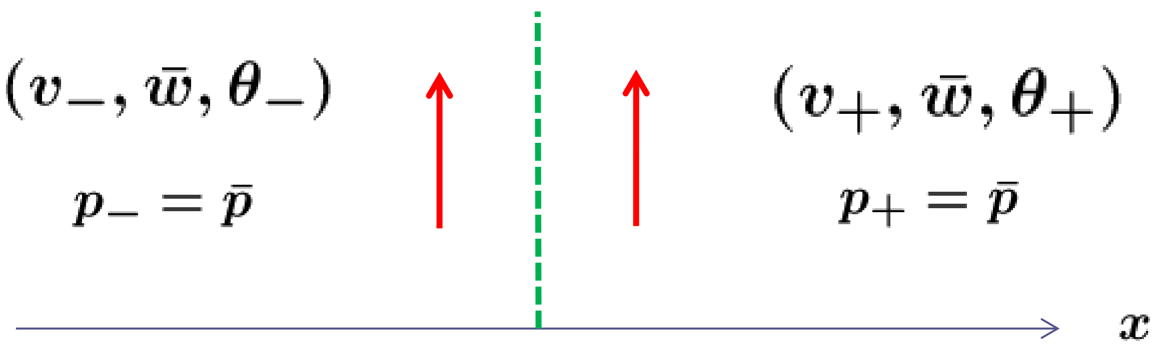
$$\lim_{x \to \pm\infty} (v, w, \theta)(t, x) = (v_\pm, w_\pm, \theta_\pm)$$

Riemann 問題

$$
\begin{cases}
v_t - w_x = 0, \\
w_t + p_x = 0, \\
(\frac{R}{\gamma-1}\theta + \frac{w^2}{2})_t + (pw)_x = 0, \\
(v, w, \theta)(x, 0) = \begin{cases} (v_-, w_-, \theta_-), & x < 0, \\ (v_+, w_+, \theta_+), & x > 0. \end{cases}
\end{cases}
$$

$$
\boxed{\lambda_1 = -\sqrt{\gamma p/v} < 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = \sqrt{\gamma p/v} > 0}
$$

接触不連続（contact discontinuity）： $p_- = p_+ = \bar{p}, \ w_- = w_+ = \bar{w}$



粘性接触波の漸近解の構成

$$U = (V, W, \Theta)$$

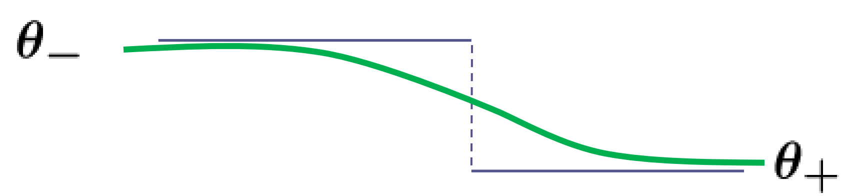
$$\frac{R\Theta}{V} = \bar{p} \quad \Longleftrightarrow \quad V = \frac{R}{\bar{p}}\Theta$$

$$\begin{cases} \dfrac{R}{\bar{p}}\Theta_t - W_x = 0 \\[2ex] \dfrac{R}{\gamma - 1}\Theta_t + \bar{p}W_x = \kappa\left(\dfrac{\Theta_x}{V}\right)_x + \mu\dfrac{(W_x)^2}{V} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Theta_t = \bar{\kappa}\left(\dfrac{\Theta_x}{\Theta}\right)_x, \\[2ex] \Theta(\pm\infty, t) = \theta_\pm, \end{cases}$$

$$\boxed{\bar{\kappa} = \frac{\kappa\bar{p}(\gamma - 1)}{\gamma R^2} > 0}$$

自己相似解：　$\Theta = \Theta\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+t}}\right)$



$$\delta = |\theta_+ - \theta_-|$$

<u>自己相似解の評価</u>： $\Theta_x \sim$ 熱核

$$(1+t)|\Theta_{xx}|+(1+t)^{1/2}|\Theta_x|+|\Theta-\theta_\pm| \leq C\delta e^{-\frac{\alpha x^2}{1+t}} \quad (x \to \pm\infty)$$

漸近解： $V = \frac{R}{\bar{p}}\Theta, \quad W = \bar{w} + \frac{\kappa(\gamma-1)}{\gamma R}\frac{\Theta_x}{\Theta}, \quad \Theta = \Theta\left(\frac{x}{\sqrt{1+t}}\right)$

$$\begin{cases} V_t - W_x = 0, \\ W_t + (\frac{R\Theta}{V})_x = \mu\left(\frac{W_x}{V}\right)_x + R_1, \\ \left(E + \frac{W^2}{2}\right)_t + (PW)_x = \left(\kappa\frac{\Theta_x}{V} + \mu\frac{WW_x}{V}\right)_x + R_2, \end{cases}$$

$$R_1 = O(\delta)(1+t)^{-3/2}e^{-\frac{\alpha x^2}{1+t}},$$

$$R_2 = O(\delta)(1+t)^{-2}e^{-\frac{\alpha x^2}{1+t}}.$$

漸近解 $U = (V, W, \Theta)$ の近傍での初期値問題

時間大域解

$$u - U = (v - V, w - W, \theta - \Theta) \in C([0,\infty); H^1)$$

の存在と，そのゼロへの漸近性を示す.

アプリオリ評価　タイプ II

$$\sup_{t\in[0,T]} \|(u-U)(t)\|_{H^1} \le \varepsilon_0 \ll 1, \quad |u_+ - u_-| \le \delta_0 \ll 1$$

$\Longrightarrow$

$$\|(u-U)(t)\|_{H^1}^2 + \int_0^t \left(\|(v-V)_x\|_{L^2}^2 + \|(w-W, \theta-\Theta)_x\|_{H^1}^2 \right)(\tau)\, d\tau$$

$$\le C_0 \left(\|(u-U)(0)\|^2 + |u_+ - u_-| \right), \quad t \in [0,T]$$

エネルギー形式の利用

$$E(t) = \int \mathscr{E}_U(u)\,dx, \qquad E(t) \sim \|(u-U)(t)\|_{L^2}^2$$

このとき，

$$\frac{d}{dt}E(t) + \int \left(\frac{\mu}{V}|(w-W)_x|^2 + \frac{\kappa}{V\Theta}|(\theta-\Theta)_x|^2 \right) dx$$

$$+ \int PW_x \left(\gamma\Phi\left(\frac{v}{V}\right) + \Phi\left(\frac{p}{P}\right) \right) dx = \quad \textit{Good Terms},$$

$$\boxed{\Phi(s) = s - 1 - \log s} \qquad (\sim |s-1|^2)$$

注意：　希薄波のときは $W_x > 0$ でOK!

粘性接触波のときは正値でなく，さらなる工夫が必要

$$\int |W_x| \left(\gamma \Phi(\frac{v}{V}) + \Phi(\frac{p}{P})\right)\, dx$$

$$\delta = |\theta_+ - \theta_-|$$

$$W_x \sim \Theta_{xx} \sim (\text{熱核})_x$$

$$\leq C\delta \int \frac{e^{-\frac{\alpha x^2}{1+t}}}{1+t}(|v-V|^2 + |\theta - \Theta|^2)\, dx$$

$\displaystyle\int \frac{e^{-\frac{\alpha x^2}{1+t}}}{1+t}(|v-V|^2 + |\theta - \Theta|^2)\, dx$ の評価

各種導関数の評価

アプリオリ評価　タイプ II　の完成

鍵となる補題　（２０１０）

$$\phi_t = G, \qquad \omega = \int_{-\infty}^{\frac{\sqrt{\alpha}x}{\sqrt{2(1+t)}}} e^{-y^2}\,dy$$

$\Longrightarrow$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\int \omega^2\phi^2\,dx\right) + \frac{1}{8}\int \frac{e^{-\frac{\alpha x^2}{1+t}}}{1+t}\phi^2\,dx$$
$$\le \frac{\pi}{\alpha}\int |\phi_x|^2\,dx + \int \omega^2\phi G\,dx$$

証明

$$\int \omega^2\phi\phi_t\,dx = \int \omega^2\phi G\,dx$$

次に注意して**部分積分**

$$\omega_x = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{2(1+t)}}e^{-\frac{\alpha x^2}{2(1+t)}}, \quad \omega_t = \frac{1}{2\alpha}\omega_{xx}, \quad 0 \le \omega \le \sqrt{\pi}$$

$$\omega_x = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{2(1+t)}} e^{-\frac{\alpha x^2}{2(1+t)}}, \quad \omega_t = \frac{1}{2\alpha}\omega_{xx}, \quad 0 \le \omega \le \sqrt{\pi}$$

$$\int \omega^2 \phi \phi_t \, dx = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\int \omega^2 \phi^2 \, dx\right) - \int \omega \omega_t \phi^2 \, dx$$

$$-\int \omega \omega_t \phi^2 \, dx = \int -\frac{1}{2\alpha} \omega \omega_{xx} \phi^2 \, dx$$

$$\int -\frac{1}{2\alpha} \omega \omega_{xx} \phi^2 \, dx = \boxed{\frac{1}{2\alpha}\int |\omega_x|^2 \phi^2 \, dx} + \frac{1}{\alpha}\int \omega \omega_x \phi \phi_x \, dx$$

$$\left|\frac{1}{\alpha}\int \omega \omega_x \phi \phi_x \, dx\right| \le \frac{1}{4\alpha}\int |\omega_x|^2 \phi^2 \, dx + \frac{\pi}{\alpha}\int |\phi_x|^2 \, dx$$

Matsumura's Stability Techniques

- ***On the occasion of Professor Akitaka Matsumura's 60th birthday***

- Feimin Huang （黄飞敏）
- Chinese Academy of Sciences, China
- Hailiang Li （李海梁）
- Capital Normal University, China
- Ming Mei （梅茗）
- Champlain College/McGill University, Canada

- Xi'an, China, October 24-26, 2011

ご清聴ありがとうございます