

粘性気体の運動方程式、 時間大域解とその漸近挙動

～部分積分で30余年～

大阪大学、数学教室談話会

松村昭孝

大阪大学情報科学研究科

平成27年2月16日

粘性気体の研究に至るまで I

- 昭和26年： 鹿児島市に生まれる（本籍 山口県）
オタクな少年時代、漠然と**技術者**を目指す
- 昭和44年： 京都大学**工学部**数理工学科入学
新入学生歓迎会で**鶴飼正二**先生と**薩摩順吉**先生に出会う、
自主ゼミで**松村睦豪**先生に出会う
- 昭和47年： 偶然に**大矢勇次郎**先生の研究室に
半線形波動方程式を学ぶ（**溝畑茂**先生の教科書，W. Straussの論文）
- 昭和48年： 修士課程進学
- 昭和49年： **西田孝明**先生に出会う
消散型波動方程式の解の減衰の研究

粘性気体の研究に至るまで II

- 昭和50年： 博士課程進学
エネルギー法による準線形消散型波動方程式の研究
西田先生に粘性気体の研究に誘われる

その後

せつせと部分積分(エネルギー法)で数十年

- 昭和53年 4月： 京都大学工学部（野木達夫先生に世話になる）
- 昭和55年10月～昭和57年1月： Wisconsin-Madison大学, MRC
Wagner, T.Liu, Klainerman, Strauss, Dafermos,
Lax, Majda, 加藤敏夫先生、他多くの人と出会う
- 昭和63年 4月： 金沢大学
林田和也先生、一瀬孝先生に世話になる、痛風になる
- 平成5年 3月より 1セメスター： Stanford大学
- 平成5年10月より大阪大学（井川先生、西谷先生に世話になる）

粘性と熱伝導性を持つ理想気体の方程式系

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_t + (\rho w)_x = 0, \\ (\rho w)_t + (\rho w^2 + p)_x = (\mu w_x)_x, \\ (\rho(e + \frac{w^2}{2}))_t + ((\rho(e + \frac{w^2}{2}) + p)w)_x = (\kappa \theta_x + \mu w w_x)_x. \end{array} \right.$$

ρ : 質量密度, w : 流速, θ : 絶対温度,

μ : 粘性係数 (正定数), κ : 熱伝導係数 (正定数),

p : 圧力, e : 内部エネルギー.

状態方程式 :

$$p = R\rho\theta, \quad e = \frac{R}{\gamma - 1}\theta.$$

R : 気体定数, γ : 比熱比 (> 1 , 定数).

オイラー方程式系 (1757)

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho w)_x = 0, \\ (\rho w)_t + (\rho w^2 + p)_x = 0, \\ (\rho(e + \frac{w^2}{2}))_t + ((\rho(e + \frac{w^2}{2}) + p)w)_x = 0. \end{cases}$$

Leonhard Euler

(1707 – 1783)

Swiss mathematician and physicist



ダランベールのパラドックス (1752)

Jean-Baptiste le Rond d'Alembert
(1717 – 1783)



粘性 Navier (1827), Stokes (1845)

内部応力：

$$T = p - \mu \omega_x$$



**Claude-Louis
Navier**
(1785 – 1836)



**Sir George Gabriel
Stokes**
(1819 – 1903)

熱伝導性 Fourier (1807)

熱流ベクトル：

$$q = -\kappa \theta_x$$



**Jean Baptiste Joseph
Fourier**
(1768 – 1830)

粘性と熱伝導性を持つ理想気体の方程式系

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho w)_x = 0, \\ (\rho w)_t + (\rho w^2 + p)_x = (\mu w_x)_x, \\ (\rho(e + \frac{w^2}{2}))_t + ((\rho(e + \frac{w^2}{2}) + p)w)_x = (\kappa \theta_x + \mu w w_x)_x. \end{cases}$$

粘性気体の断熱モデル

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho w)_x = 0, \\ (\rho w)_t + (\rho w^2 + p)_x = (\mu w_x)_x, \\ p = p(\rho) = a \rho^\gamma \quad (a : \text{正定数}). \end{cases}$$

バーガース方程式

$$w_t + \left(\frac{1}{2}w^2\right)_x = \mu w_{xx}.$$

粘性保存則系の初期値問題

$$u_t + f(u)_x = (B(u)u_x)_x \quad (x \in \mathbb{R}, t > 0).$$

初期条件 : $u(0, x) = u_0(x) \quad (x \in \mathbb{R}),$

遠方条件 : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(t, x) = u_{\pm} \quad (t \geq 0).$

$u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$, 保存量, $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, 流束

$B : \mathbb{R}^{m \times m} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m}$, 粘性項行列 (非負定値)

問題

時間大域解の存在と、初期状態 u_0 と遠方状態 u_{\pm} に
応じての解の長時間挙動

・ $f(u)$ について

$df(u)$: f のヤコビ行列

$\lambda_i(u)$: $df(u)$ の固有値 (特性速度), 全て実数値

$$\lambda_1(u) < \lambda_2(u) < \cdots < \lambda_m(u), \quad (u \in \Omega).$$

$r_i(u)$: $\lambda_i(u)$ に対応する右固有ベクトル

“真に非線形” と “線形退化”

$(r_i \cdot \nabla_u \lambda_i)(u) \neq 0 \quad (u \in \Omega) \iff i$ 特性場は “真に非線形”

$(r_i \cdot \nabla_u \lambda_i)(u) = 0 \quad (u \in \Omega) \iff i$ 特性場は “線形退化”

・ $B(u)$ について

正定値でなくとも，系全体ではエネルギー消散的十分条件 (**Kawashima 条件**) :

$$B(u)r_i(u) \neq 0 \quad (u \in \Omega, i = 1, \dots, m).$$

・ 解の粗いイメージ

$$u_t + df(u)u_x = 0$$

粘性項無し ($B = 0$):

局所的に固有ベクトル $r_i(u)$ に平行で伝播速度 $\lambda_i(u)$ を持つ m 個の波 ($1 \leq i \leq m$) に分解されて時間発展

粘性項有り:

上記の波がエネルギー散逸効果に応じ平滑化されつつ時間発展.

- 有界な一般的な初期値についての時間大域解の存在については、単独方程式の場合や特殊な場合を除いて**未解決**

戦略

- I) 時間についての**漸近解** $U(t, x)$ を予測して構成

$$U_t + f(U)_x = (B(U)U_x)_x + R$$

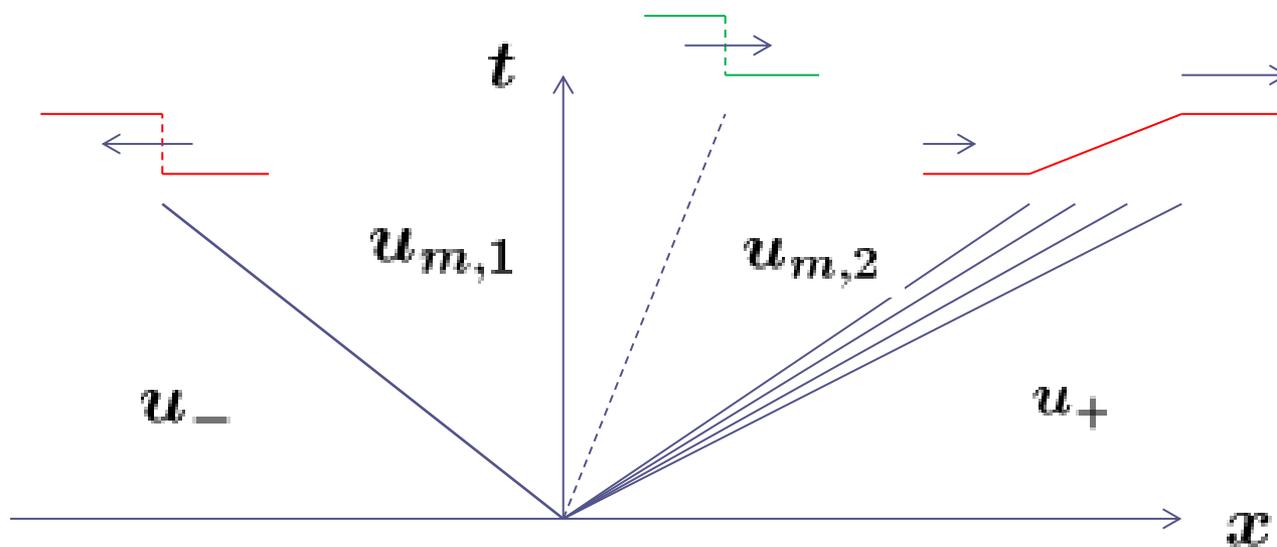
剰余項 $R(t, x)$: x, t について十分良い減衰

- II) 漸近解からの差 $u - U$ に対し**アプリアオリ評価**

- III) 漸近性を込めて漸近解の近傍に時間大域解を構成

リーマン問題

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 & (x \in \mathbb{R}, t > 0), \\ u(0, x) = \begin{cases} u_-, & x < 0, \\ u_+, & x > 0. \end{cases} \end{cases}$$



Riemann解

Riemann (1860)

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho w)_x = 0, \\ (\rho w)_t + (\rho w^2 + p)_x = 0, \\ p = p(\rho) = a\rho^\gamma. \end{cases}$$

Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite.

(Aus dem achten Bande der Abhandlungen der Königlich Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. 1860.)



**Georg Friedrich
Bernhard
Riemann**
(1826 – 1866)



Lax (1957)

$$u_t + f(u)_x = 0.$$

双曲保存則系の数学解析の基礎

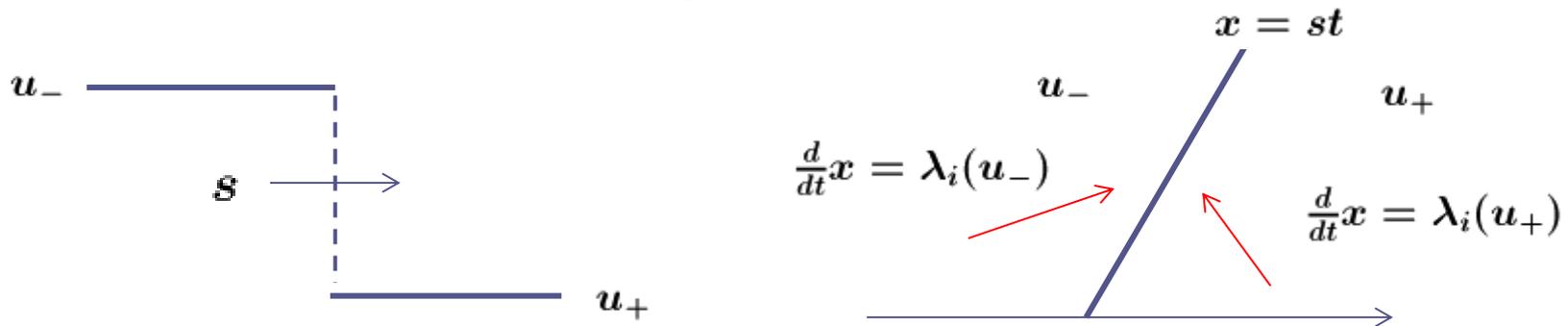
Peter David Lax (1926--)

Commun. Pure Appl. Math., 10 (1957)

リーマン解の単純波

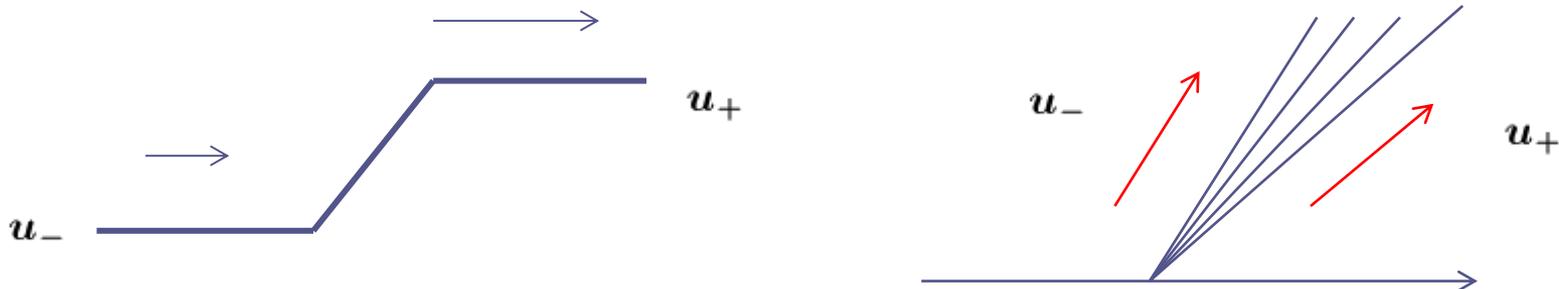
特性場が真に非線形の場合は次のどちらか

衝撃波 (Shock wave): $u_i^s(x - st; u_-, u_+)$



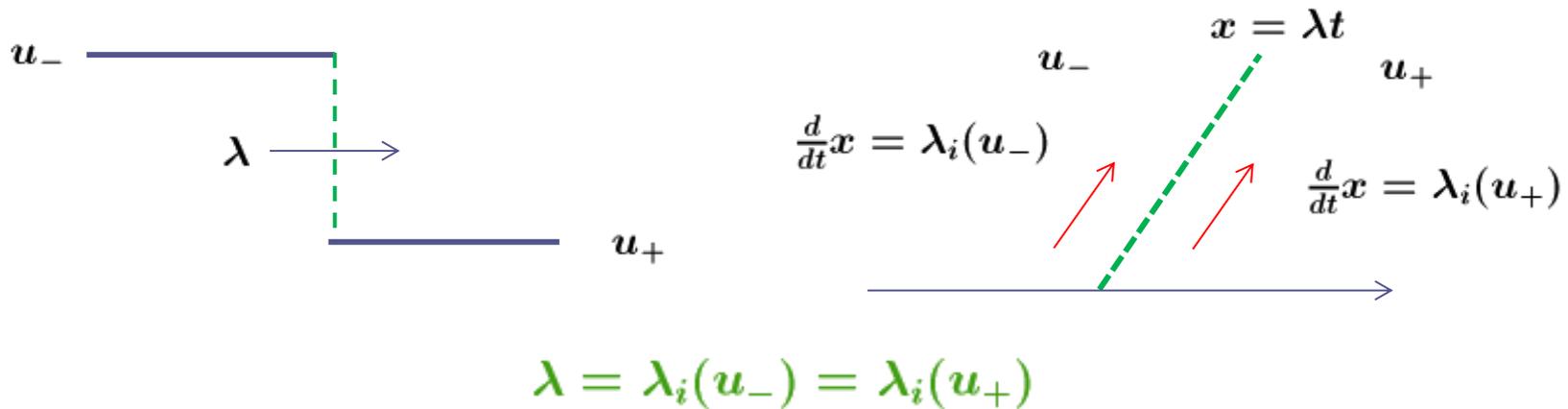
Rankine-Hugoniot 条件: $f(u_-) - su_- = f(u_+) - su_+$

希薄波 (Rarefaction wave): $u_i^r(x/t; u_-, u_+)$



リーマン解の単純波 特性場が線形退化の場合

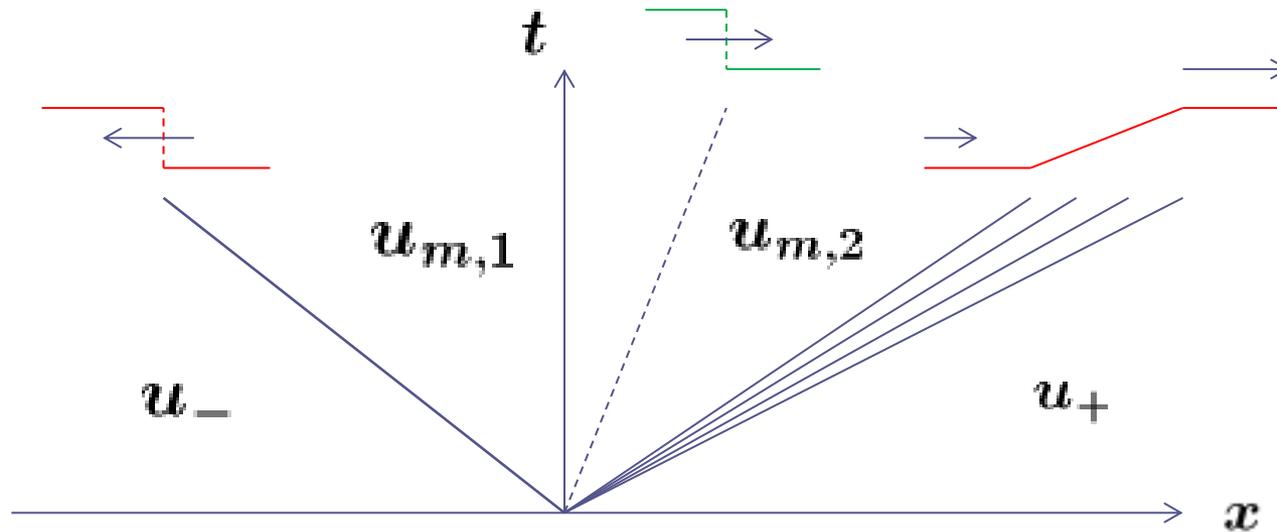
接触不連続波 (Contact discontinuity): $u_i^c(x - \lambda t; u_-, u_+)$



リーマン解の一般解

m個の単純波（無い場合も込めて）の合成した波

Riemann 解の例

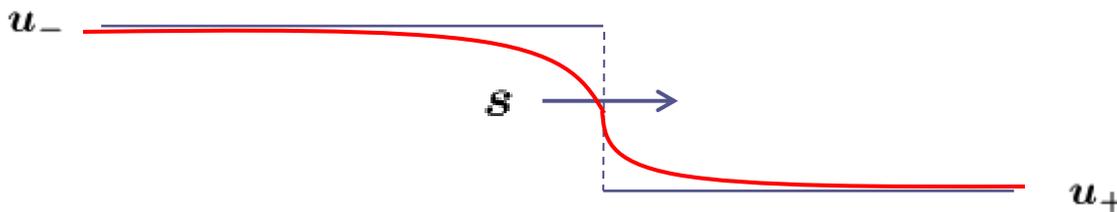


$$\begin{aligned} u^R(t, x) &= u_1^s(x - s_1 t; u_-, u_{m,1}) \\ &\quad + u_2^c(x - \lambda_2 t; u_{m,1}, u_{m,2}) - u_{m,1} \\ &\quad + u_3^r(x/t; u_{m,2}, u_+) - u_{m,2} \end{aligned}$$

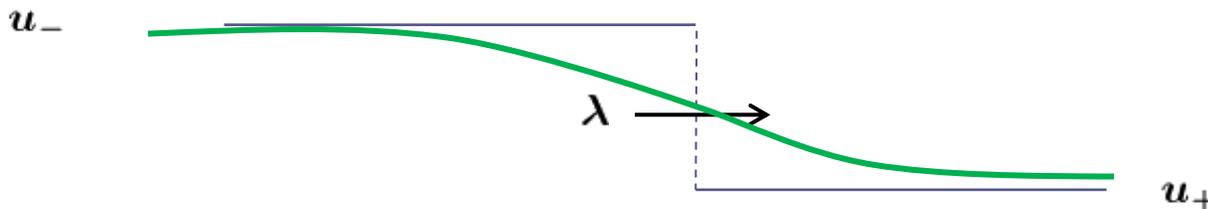
粘性効果があるときの漸近解

- 希薄波 (rarefaction wave) \longrightarrow 希薄波 (rarefaction wave)
- 衝撃波 (shock wave) \longrightarrow 粘性衝撃波 (viscous shock wave)
- 接触不連続波 (contact discontinuity) \longrightarrow 粘性接触波 (viscous contact wave)

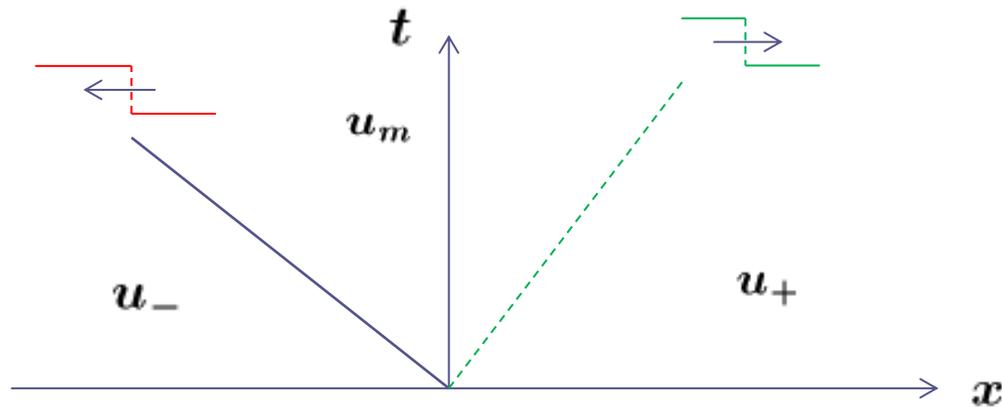
粘性衝撃波 : $U_i^{vs}(x - st; u_-, u_+)$ 粘性効果で平滑化された**進行波**



粘性接触波 : $U_i^{vc}(\frac{x-\lambda t}{\sqrt{t}}; u_-, u_+)$ 粘性効果で平滑化された**拡散波**



合成波の場合（例）



Reimann 解：

$$u^R(t, x) = u_1^s(x - st; u_-, u_m) + u_2^c(x - \lambda t; u_m, u_+) - u_m$$

漸近解：

$$U(t, x) = U_1^{vs}(x - st + \alpha; u_-, u_m) + U_2^{vc}\left(\frac{x - \lambda t}{\sqrt{t}}; u_m, u_+\right) - u_m$$

既存の仕事について

- 単独粘性保存則 (含 バーガース方程式)

Il'in – Oleinik (1960) 真に非線形の場合

粘性衝撃波, 希薄波の漸近安定性

最大値原理

- 粘性保存則系の粘性衝撃波の漸近安定性

エネルギー法

Nishihara-Matsumura (1985)

(断熱モデル)

Goodman (1986)

(人工粘性項を持つ一般粘性保存則系)

以後, 系の解の漸近挙動の研究が急速に進展



**Olga Arsenievna
Oleinik**
(1925 -2001)



**Arlen Mikhailovich
Il'in**
(1932--)

断熱モデル (2×2システム)

第1, 第2特性場 : 真に非線形



Riemann解のパターン : 9種類

Riemann 解

衝撃波



粘性系での漸近安定性

Nishihara-M (1985)
(平均ゼロの初期擾乱)

Mascia-Zumbum (2004)
Liu-Zen (2009)

衝撃波 + 衝撃波



Nishihara-M (1985)と同様

希薄波, 希薄波 + 希薄波



Nishihara-M (1986)

希薄波 + 衝撃波



未解決

粘性・熱伝導性理想気体モデル (3×3システム)

第1, 第3特性場: 真に非線形 \implies Riemann解のパターン: 18種類
第2特性場: 線形退化

衝撃波



Kawashima-M (1985)
(平均ゼロの初期擾乱)

Liu (1997)

Zumbum (2004)

Liu-Zen (2009)

衝撃波 + 衝撃波



Huang-M (2009)

希薄波 + (希薄波)



Kawashima-Nishihara-M (1986)

(希薄波) + 接触不連続 + (希薄波)



Huang-Li-M (2010)

衝撃波 + 接触不連続 + (衝撃波)



未解決

希薄波 + (接触不連続) + 衝撃波



未解決

ショートコース：非線形微分方程式の時間大域解

時間大域解の構成法：

時間局所解の構成 + アプリオリ評価

時間局所解の構成： 逐次近似, 不動点定理 等

アプリオリ評価 (a priori estimate)：

• エネルギー法 (部分積分)

• 線形化方程式の解の減衰評価法

状態空間 H 上の発展方程式 (力学系)

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) = F(u(t)), & t \geq 0, \\ u(0) = u_0 \in H \end{cases}$$

目的： 時間大域解 $u \in C([0, \infty); H)$ の構成.

局所解の存在

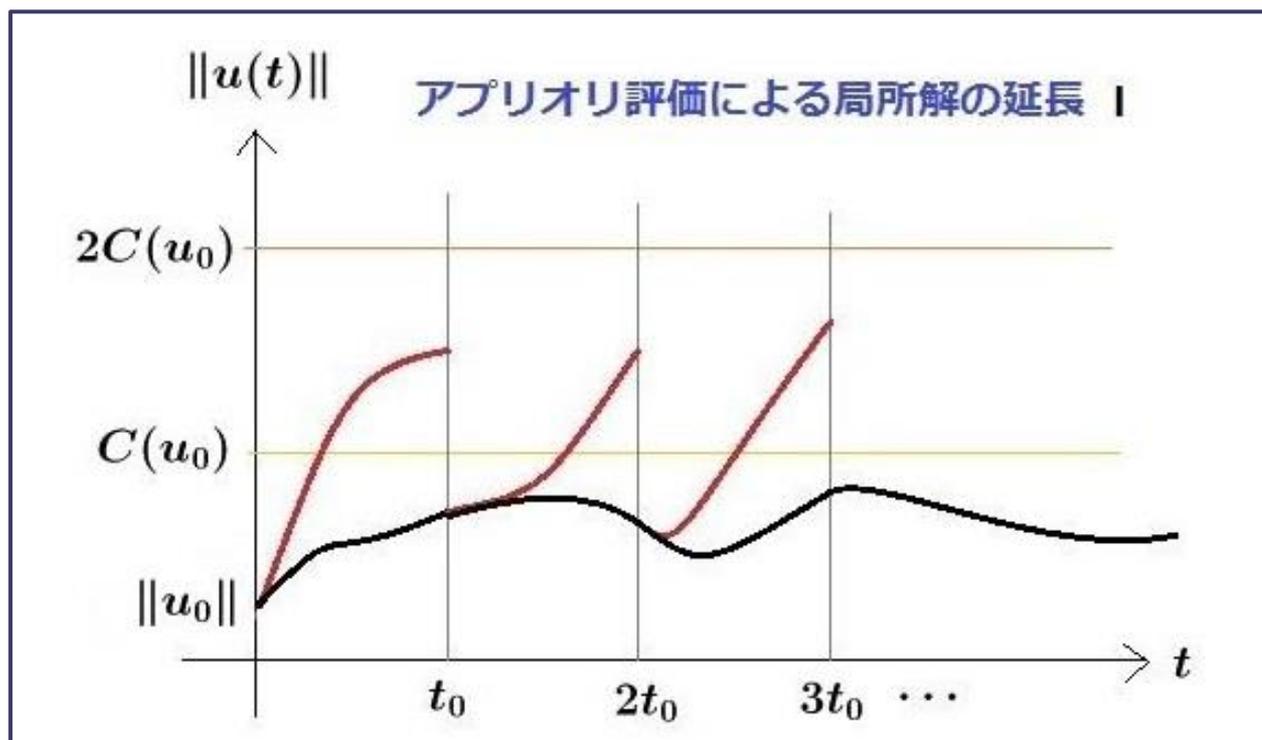
任意の $M > 0$ に対し, $t_0 = t_0(M) > 0$ が存在して,
 $\|u_0\| \leq M$ ならば, 解 $u \in C([0, t_0]; H)$ が存在し,

$$\sup_{t \in I} \|u(t)\| \leq 2M.$$

アприオリ評価 I

任意の $u_0 \in H$ に対し, $C(u_0) > 0$ が存在して次が成立:
ある $T > 0$ に対し, $u \in C([0, T]; H)$ が解ならば,

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\| \leq C(u_0).$$



アприオリ評価 II

ある $\varepsilon_0 > 0$ と $C_0 > 0$ が存在して次が成立 :

ある $T > 0$ に対し, $u \in C([0, T]; H)$ が解でありかつ

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\| \leq \varepsilon_0$$

ならば,

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\| \leq C_0 \|u_0\|.$$

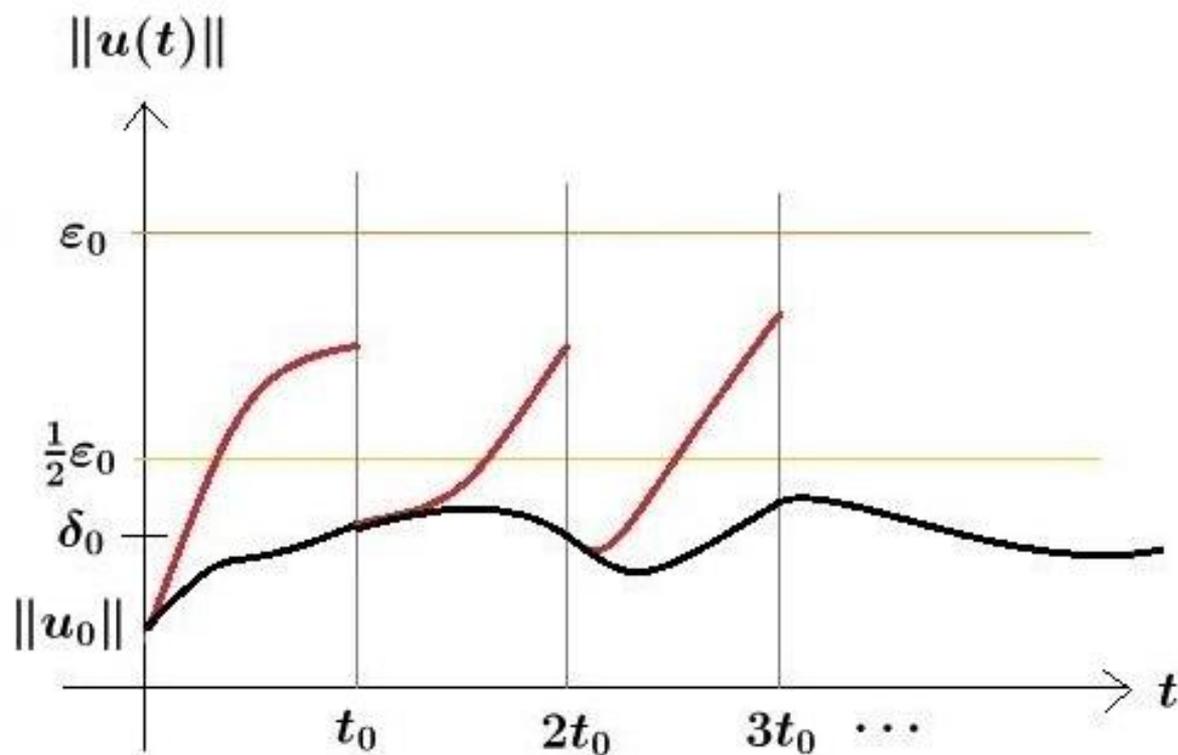
アприオリ評価 II による時間大域解の構成

$$\|u_0\| \leq \delta_0 := \min \left(\frac{\varepsilon_0}{2}, \frac{\varepsilon_0}{2C_0} \right) \quad \text{とすれば良い.}$$

アприオリ評価 II による時間大域解の構成

$$\|u_0\| \leq \delta_0 := \min\left(\frac{\varepsilon_0}{2}, \frac{\varepsilon_0}{2C_0}\right) \quad \text{とすれば良い.}$$

$$\left(C_0\|u_0\| \leq \frac{\varepsilon_0}{2} \quad \text{に注意する}\right)$$



エネルギー法によるアприオリ評価の簡単な例

$$H = R^2, \quad u = {}^t(x, v)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -(\kappa x + \alpha x^3) - \mu v \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} (0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

$$\kappa > 0, \alpha \in R, \mu > 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} v^2 + \frac{\kappa}{2} x^2 + \frac{\alpha}{4} x^4 \right) + \mu v^2 = 0$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2}v^2 + \frac{\kappa}{2}x^2 + \frac{\alpha}{4}x^4 \right) (t) + \int_0^t \mu v^2(\tau) d\tau \\ & = \left(\frac{1}{2}v_0^2 + \frac{\kappa}{2}x_0^2 + \frac{\alpha}{4}x_0^4 \right), \quad t \in [0, T] \end{aligned}$$

$\alpha \geq 0$ のとき, $\|u\|^2 = |x|^2 + |v|^2$ に注意して,

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|^2 \leq C(u_0).$$



アプリアオリ評価 I

$\alpha < 0$ のとき

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2}v^2 + \frac{\kappa}{2}x^2 \left(1 - \frac{|\alpha|}{2\kappa}x^2 \right) \right) (t) + \int_0^t \mu v^2(\tau) d\tau \\ &= \left(\frac{1}{2}v_0^2 + \frac{\kappa}{2}x_0^2 + \frac{\alpha}{4}x_0^4 \right), \quad t \in [0, T] \end{aligned}$$

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|^2 \leq \frac{\kappa}{|\alpha|}$$

ならば

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|^2 \leq C_0 \|u_0\|^2$$



アプリアオリ評価 II

非線形偏微分方程式への エネルギー法の提案と応用 (1980年前後から)

- 非線形消散的波動方程式のゼロ解の近傍での
時間大域解の構成

(Publ. RIMS Kyoto Univ., 1977)

$$u_{tt} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(u, u_t, \nabla u) u_{x_i x_j} + \kappa u_t = 0$$

- 粘性と熱伝導性を持つ気体方程式系の定数状態の近傍での
時間大域解の構成

(J. Math. Kyoto Univ., 1980, with T. Nishida)

気体の方程式系の場合

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_t + \nabla \cdot (\rho w) = 0, \\ \rho(w_t + w \cdot \nabla w) + \nabla p = \mu \Delta w + (\mu + \lambda) \nabla(\nabla \cdot w), \\ \rho(e_t + w \cdot \nabla e) + p \nabla \cdot w = \kappa \Delta \theta + \Psi, \\ p = R\rho\theta, \quad e = \frac{R}{\gamma - 1} \theta, \\ \Psi = \frac{\mu}{2} \sum_{i,j=1}^n (w_{x_j}^i + w_{x_i}^j)^2 + \lambda |\nabla \cdot w|^2 \end{array} \right.$$

定数状態 $(\rho, w, \theta) = (\bar{\rho}, 0, \bar{\theta})$ の近傍での初期値問題

初期条件 $(\rho, w, \theta)(0) = (\rho_0, w_0, \theta_0)$

の下に、時間大域解を探す：

$$(\rho - \bar{\rho}, w, \theta - \bar{\theta}) \in C([0, \infty); H)$$

局所解の構成とアプリアリ評価 II

H : Sobolev 空間 $H^k(\mathbb{R}^n)$ (例えば、空間3次元では $H = H^3$)

$$H^k = \{f \in L^2(\mathbb{R}^n) \mid (\frac{\partial}{\partial x})^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^n), |\alpha| \leq k\}$$

エネルギー形式

熱力学の関係式 $de = \theta dS - p dv$

e を S :エントロピーと v :比体積 ($= 1/\rho$) の関数と考えると凸関数

$$e_v = -p, \quad e_S = \theta,$$

に注意して, エネルギー形式を定数状態 $U = (\bar{\rho}, 0, \bar{\theta})$ の周りで

$$E(t) = \int \rho \mathcal{E}_U(u) dx,$$

と定義. ここに, $u = (\rho, w, \theta)$ と $\tilde{u} = (\tilde{\rho}, \tilde{w}, \tilde{\theta})$ に対し,

$$\mathcal{E}_{\tilde{u}}(u) = e - \tilde{e} + \tilde{p}(v - \tilde{v}) - \tilde{\theta}(S - \tilde{S}) + \frac{1}{2}|w - \tilde{w}|^2.$$

$$\frac{d}{dt}E(t) + \int \left(\frac{\bar{\theta}}{\theta} \Psi(w) + \frac{\kappa \bar{\theta}}{v \theta^2} |\nabla \cdot \theta|^2 \right) dx = 0$$

$$E(t) \sim \int |(v - \bar{v}, w, S - \bar{S})(t)|^2 dx \\ \sim \|(u - U)(t)\|_{L^2}^2.$$



k 階までの全ての偏導関数の評価



Sobolev空間 H^k での アプリオリ評価 II の成立

粘性接触波の漸近安定性

粘性・熱伝導性理想気体モデルの **Lagrange座標** での表現：

$$\begin{cases} v_t - w_x = 0, \\ w_t + p_x = \mu \left(\frac{w_x}{v} \right)_x, \\ \left(e + \frac{w^2}{2} \right)_t + (pw)_x = \left(\kappa \frac{\theta_x}{v} + \mu \frac{ww_x}{v} \right)_x. \end{cases}$$

$v = 1/\rho$: 比体積

状態方程式：

$$p = \frac{R\theta}{v}, \quad e = \frac{R}{\gamma - 1}\theta$$

初期条件：

$$(v, w, \theta)(x, 0) = (v_0, w_0, \theta_0)(x)$$

遠方条件：

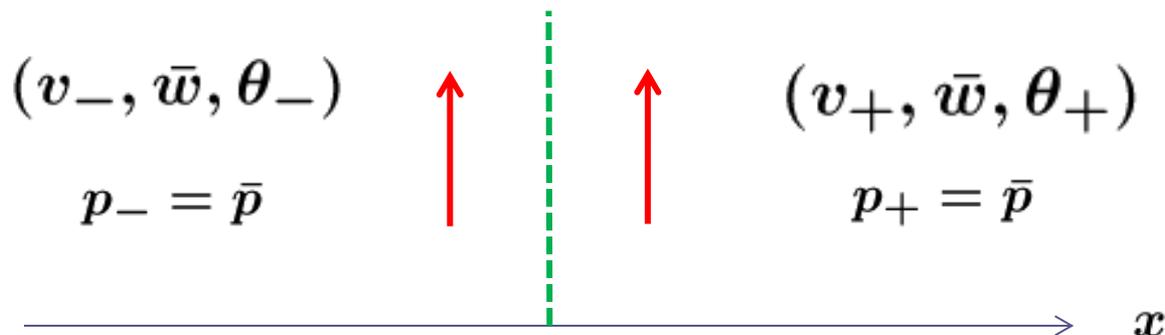
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (v, w, \theta)(t, x) = (v_{\pm}, w_{\pm}, \theta_{\pm})$$

Riemann 問題

$$\begin{cases} v_t - w_x = 0, \\ w_t + p_x = 0, \\ \left(\frac{R}{\gamma-1}\theta + \frac{w^2}{2}\right)_t + (pw)_x = 0, \\ (v, w, \theta)(x, 0) = \begin{cases} (v_-, w_-, \theta_-), & x < 0, \\ (v_+, w_+, \theta_+), & x > 0. \end{cases} \end{cases}$$

$$\lambda_1 = -\sqrt{\gamma p/v} < 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = \sqrt{\gamma p/v} > 0$$

接觸不連續 (contact discontinuity) : $p_- = p_+ = \bar{p}$, $w_- = w_+ = \bar{w}$



粘性接触波の漸近解の構成

$$U = (V, W, \Theta)$$

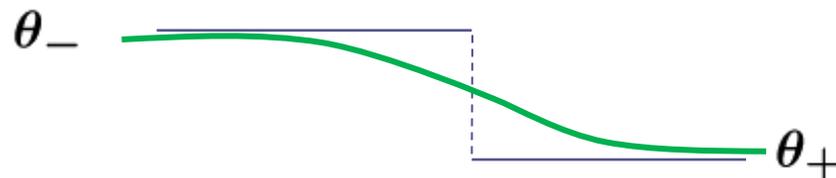
$$\frac{R\Theta}{V} = \bar{p} \iff V = \frac{R}{\bar{p}}\Theta$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{R}{\bar{p}}\Theta_t - W_x = 0 \\ \frac{R}{\gamma - 1}\Theta_t + \bar{p}W_x = \kappa \left(\frac{\Theta_x}{V}\right)_x + \mu \frac{(W_x)^2}{V} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Theta_t = \bar{\kappa} \left(\frac{\Theta_x}{\Theta}\right)_x, \\ \Theta(\pm\infty, t) = \theta_{\pm}, \end{array} \right.$$

$$\bar{\kappa} = \frac{\kappa \bar{p} (\gamma - 1)}{\gamma R^2} > 0$$

自己相似解： $\Theta = \Theta \left(\frac{x}{\sqrt{1+t}} \right)$



自己相似解の評価： $\Theta_x \sim$ 熱核

$$\delta = |\theta_+ - \theta_-|$$

$$(1+t)|\Theta_{xx}| + (1+t)^{1/2}|\Theta_x| + |\Theta - \theta_{\pm}| \leq C\delta e^{-\frac{\alpha x^2}{1+t}} \quad (x \rightarrow \pm\infty)$$

$$\text{漸近解：} \quad V = \frac{R}{\bar{p}}\Theta, \quad W = \bar{w} + \frac{\kappa(\gamma - 1)\Theta_x}{\gamma R} \frac{\Theta}{\Theta}, \quad \Theta = \Theta\left(\frac{x}{\sqrt{1+t}}\right)$$

$$\begin{cases} V_t - W_x = 0, \\ W_t + \left(\frac{R\Theta}{V}\right)_x = \mu \left(\frac{W_x}{V}\right)_x + R_1, \\ \left(E + \frac{W^2}{2}\right)_t + (PW)_x = \left(\kappa \frac{\Theta_x}{V} + \mu \frac{WW_x}{V}\right)_x + R_2, \end{cases}$$

$$R_1 = O(\delta)(1+t)^{-3/2} e^{-\frac{\alpha x^2}{1+t}},$$

$$R_2 = O(\delta)(1+t)^{-2} e^{-\frac{\alpha x^2}{1+t}}.$$

漸近解 $U = (V, W, \Theta)$ の近傍での初期値問題

時間大域解

$$u - U = (v - V, w - W, \theta - \Theta) \in C([0, \infty); H^1)$$

の存在と、そのゼロへの漸近性を示す。

アприオリ評価 タイプ II

$$\sup_{t \in [0, T]} \|(u - U)(t)\|_{H^1} \leq \varepsilon_0 \ll 1, \quad |u_+ - u_-| \leq \delta_0 \ll 1$$



$$\begin{aligned} \|(u - U)(t)\|_{H^1}^2 + \int_0^t (\|(v - V)_x\|_{L^2}^2 + \|(w - W, \theta - \Theta)_x\|_{H^1}^2) (\tau) d\tau \\ \leq C_0 (\|(u - U)(0)\|^2 + |u_+ - u_-|), \quad t \in [0, T] \end{aligned}$$

エネルギー形式の利用

$$E(t) = \int \mathcal{E}_U(u) dx, \quad E(t) \sim \|(u - U)(t)\|_{L^2}^2$$

このとき,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(t) + \int \left(\frac{\mu}{V} |(w - W)_x|^2 + \frac{\kappa}{V\Theta} |(\theta - \Theta)_x|^2 \right) dx \\ + \int PW_x \left(\gamma \Phi\left(\frac{v}{V}\right) + \Phi\left(\frac{p}{P}\right) \right) dx = \text{Good Terms}, \end{aligned}$$

$$\Phi(s) = s - 1 - \log s \quad (\sim |s - 1|^2)$$

注意： 希薄波のときは $W_x > 0$ でOK!

粘性接触波のときは正值でなく、**さらなる工夫が必要**

$$\int |W_x| \left(\gamma \Phi\left(\frac{v}{V}\right) + \Phi\left(\frac{P}{P}\right) \right) dx$$

$$\delta = |\theta_+ - \theta_-|$$

$$W_x \sim \Theta_{xx} \sim (\text{熱核})_x$$

$$\leq C\delta \int \frac{e^{-\frac{\alpha x^2}{1+t}}}{1+t} (|v - V|^2 + |\theta - \Theta|^2) dx$$

$$\int \frac{e^{-\frac{\alpha x^2}{1+t}}}{1+t} (|v - V|^2 + |\theta - \Theta|^2) dx \quad \text{の評価}$$

各種導関数の評価

アприオリ評価 タイプ II の完成

鍵となる補題 (2010)

$$\phi_t = G, \quad \omega = \int_{-\infty}^{\frac{\sqrt{\alpha x}}{\sqrt{2(1+t)}}} e^{-y^2} dy$$



$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int \omega^2 \phi^2 dx \right) + \frac{1}{8} \int \frac{e^{-\frac{\alpha x^2}{1+t}}}{1+t} \phi^2 dx \\ \leq \frac{\pi}{\alpha} \int |\phi_x|^2 dx + \int \omega^2 \phi G dx \end{aligned}$$

証明

$$\int \omega^2 \phi \phi_t dx = \int \omega^2 \phi G dx$$

次に注意して**部分積分**

$$\omega_x = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{2(1+t)}} e^{-\frac{\alpha x^2}{2(1+t)}}, \quad \omega_t = \frac{1}{2\alpha} \omega_{xx}, \quad 0 \leq \omega \leq \sqrt{\pi}$$

$$\omega_x = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{2(1+t)}} e^{-\frac{\alpha x^2}{2(1+t)}}, \quad \omega_t = \frac{1}{2\alpha} \omega_{xx}, \quad 0 \leq \omega \leq \sqrt{\pi}$$

$$\int \omega^2 \phi \phi_t dx = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int \omega^2 \phi^2 dx \right) - \int \omega \omega_t \phi^2 dx$$

$$- \int \omega \omega_t \phi^2 dx = \int -\frac{1}{2\alpha} \omega \omega_{xx} \phi^2 dx$$

$$\int -\frac{1}{2\alpha} \omega \omega_{xx} \phi^2 dx = \frac{1}{2\alpha} \int |\omega_x|^2 \phi^2 dx + \frac{1}{\alpha} \int \omega \omega_x \phi \phi_x dx$$

$$\left| \frac{1}{\alpha} \int \omega \omega_x \phi \phi_x dx \right| \leq \frac{1}{4\alpha} \int |\omega_x|^2 \phi^2 dx + \frac{\pi}{\alpha} \int |\phi_x|^2 dx$$

Matsumura's Stability Techniques

- *On the occasion of Professor Akitaka Matsumura's 60th birthday*
- Feimin Huang (黄飞敏)
- Chinese Academy of Sciences, China
- Hailiang Li (李海梁)
- Capital Normal University, China
- Ming Mei (梅茗)
- Champlain College/McGill University, Canada
- Xi'an, China, October 24-26, 2011

ご清聴ありがとうございます