

164. Wallmanの compactification に就て

森田 紀一 (1949. 5. 21)

完全正則空間 R をコンパクトな Hausdorff 空間 S へうつす連続写像は Čech のコンパクト化 $\beta(R)$ から S への連続写像に拡張されることはよく知られているが、ここでは、

定理. 『 T_1 空間 R をコンパクトな Hausdorff 空間 S へうつす連続写像は Wallman のコンパクト化 $w(R)$ から S への連続写像に拡張出来る』
 ことを証明しよう. 此の定理から「完全正則空間 R に対しては $w(R)$ から $\beta(R)$ の上へ R の各点を不変に保つような連続写像が存在する」ことが直ちに知られるが、之は既に小松氏等により証明された結果である。又「 T_1 空間 R で定義された有限連続実函数は $w(R)$ にまで拡張される」という長田 理一氏の定理も上の定理の特別な場合として得られる。(Tychonoff の定理を使へば、此の長田氏の定理から逆に上の定理が導かれる)

T_1 空間 R に於て、閉集合に依る極大フィルターの集合を R^* とし、 R の閉集合 G に対し、 $X \subset G$ なる閉集合 X を含む極大フィルターの全体を G^* とし、かゝる G^* の全体を R^* の open basis とした位相空間 R^* が 即ち $w(R)$ である。以下 上の定理の証明を述べよう。

扱て R をコンパクトな Hausdorff 空間 S へうつす連続写像 f が与えられたとする。 R^* の一点 $X = \{X_\alpha\}$ に対し ($\{X_\alpha\}$ は R の極大フィルター)、 S に於ける 集合系 $\{\overline{f(X_\alpha)}\}$ は有限交叉性をもつから、 $\bigcap \overline{f(X_\alpha)} \neq \emptyset$ 。相異なる二点 α, β がこの共通集合に含まれるとすれば $\overline{V(\alpha)} \cap \overline{V(\beta)} = \emptyset$ なる α, β の近傍 $V(\alpha), V(\beta)$ がある $\overline{V(\alpha)} \cap f(X_\alpha) \neq \emptyset, \overline{V(\beta)} \cap f(X_\alpha) \neq \emptyset$ より、 $A = f^{-1}(\overline{V(\alpha)}), B = f^{-1}(\overline{V(\beta)})$ は閉集合なる故、極大フィルター X に属しなければならぬが、 $A \cap B = \emptyset$ であるから之は矛盾である。従つて $\bigcap \overline{f(X_\alpha)}$ は唯一点のみよりなる。この点を $f^*(X)$ とおく。 X が R の点を含む極大フィルターなるときは、 $f^*(X) = f(X)$ なることは明らかであるから、 f^* が R^* で連続なることを証明すればよい。

$f^*(X)$ の任意の近傍 W に対し、 $\overline{V} \subset W$ なる近傍 V をとり、 $f^{-1}(V) = U$ とおけば、 U は R の閉集合であるが、 U^* は X を含む、何となれば

$X = \{X_\alpha\}$ とすれば $f^*(X) = \bigcap \overline{f(X_\alpha)}$, よって S がコンパクトなることより, $f^*(X) = V$ から

$$\bigcap \overline{f(X_{\alpha_i})} \subset V$$

なる有限個の X_{α_i} ($i=1, 2, \dots, r$) がある. 之等の X_{α_i} の共通集合は X に含まれるから, 例へば X_β とすれば,

$$f(X_\beta) \subset V$$

よって $X_\beta \subset f^{-1}(V) = U$. 従つて $X \in U^*$

即ち U^* は X の逆像である. 次に $X' \in U^*$ とすれば X' は $X'_\alpha \subset U$ なる開集合 X'_α を含む. 従つて $f(X'_\alpha) \subset V$ より $f^*(X') \in \overline{f(X'_\alpha)} \subset \bar{V} = W$. 故に f^* は R^* で連続である. 以上上の定理が証明された.

尚 T 空間に対しても, その開集合による極大フィルター $\{X_\alpha\}$ のうち

$\bigcap X_\alpha = 0$ なる如きものをつけ加えることによつてコンパクトな T 空間が得られ 之は *Ważelmann* のコンパクト化といつてよいであらうが 之に対して上述の定理がやはり成立することは上の証明から明らかなであらう.

- 註 1) 小橋氏, 紙上談話会第2輯第8号; 武隈氏, 同上, 第2輯第11号
には *Alexandroff* の証明が紹介されてある
2) 1)の小松氏の論文参照.