160. 四元数群ヲgalois群ニ持ツp進数体上ノ体ノ構成ニツイテ

（東北大）　国吉　秀夫

p進数体上ニテ　任意ノ可解群ヲgalois群ニ持ツ体ノ構成ハ、可能ナドウカ分リマセンガ、四元数体ノトキハ可能デアル。前ニコノ事ヲ仮定シテp進体ニ於ケル

一．二ノ反例ニツイテ述ベタコトガアルノデ．次ニ証明ヲ掲ゲル。

1．ソノヤウナ体ノ構成ニツイテ．淡中先生ノ論文（東北数学雑誌．Vol.43(1937)）ヨリ 必要ナ所ダケ取ル。

$\mathfrak{G}$ p群 $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}' = P$ abel群． $\mathfrak{G}'$ p次デ．シカモ核心トスル． ソノトキ．$\mathfrak{G}$ヲ $\mathfrak{G}'$ノ P ニヨル拡大ト考エル。

$$\begin{cases} u_\sigma u_\tau = g_{\sigma,\tau} u_{\sigma\tau} & \sigma,\tau \in P \\ u_\sigma g = g u_\sigma & g,\ g_{\sigma,\tau} \in \mathfrak{G}' \\ g_{\sigma,\tau} g_{\rho,\sigma\tau} = g_{\rho,\sigma} g_{\rho\sigma,\tau} & \end{cases}$$

今 k ガ 1．p 巾根ヲ含ミ．P ヲ galois 群ニ持ツ体 K ガ存在シタト仮定ス。 $\mathfrak{G}'$ノ erzeugende Charakter ヲ χ トスルトキ

(*) $(\chi(g_{\sigma,\tau}),\ K/k,\ T) \sim k$

ガ成立スルナラバ．求ムル体ガ構成出来ル。

（証明） (*) ヨリ

$$\chi(g_{\sigma,\tau}) = \frac{\delta_\sigma^\tau \delta_\tau}{\delta_{\sigma\tau}} \qquad (\delta_\sigma \in K)$$

$$1 = \chi(g_{\sigma,\tau})^p = \frac{(\delta_\sigma^p)^\tau \delta_\tau^p}{\delta_{\sigma\tau}^p}$$

$$\delta_\sigma^p = \gamma^{\sigma-1}$$

ソノトキ $K(\theta)$，$\theta = \sqrt[p]{\gamma}$ ハ求ムル体デアル。 q.e.d.

2．四元数群ハ

$$\alpha^4 = \beta^4 = \gamma^4 = 1, \qquad \alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = \varepsilon$$

$$\beta\gamma = \alpha,\quad \gamma\alpha = \beta,\quad \alpha\beta = \gamma$$

$$\gamma\beta = \alpha^{-1},\quad \alpha\gamma = \beta^{-1},\quad \beta\alpha = \gamma^{-1}$$

ソコデ．$\{\varepsilon\}$ガ交換子群．核心．2次． 故ニ 1 ニヨリ．

P ニ対スル K ノ存在ト．(*) トヲ証明スレバヨイ。

$u_\alpha = \alpha$，$u_\beta = \beta$，$u_\gamma = \gamma$ トオケバ

$$g_{\alpha,\alpha} = g_{\beta,\beta} = g_{\gamma,\gamma} = \varepsilon.$$

$$g_{\alpha,\beta} = g_{\beta,\gamma} = g_{\gamma,\alpha} = 1.$$

$$g_{\beta,\alpha} = g_{\gamma,\beta} = g_{\alpha,\gamma} = \varepsilon.$$

Lemma. p進数体ニテ K/k (2,2)型ノ abel 体トスレバ

$$\mathfrak{a} = (\chi(g_{\sigma,\tau}).\ K/k,\ P)$$

ハ多元体デハナイ。

(証明) $F(\alpha, \chi(g_{\sigma,\tau})) = \chi(g_{1,\alpha}\, g_{\alpha,\alpha}\, g_{\beta,\alpha}\, g_{\gamma,\alpha})$

$$= \chi(1\cdot\varepsilon\cdot\varepsilon\cdot 1) = \chi(1)$$

$$= 1 \quad (N^{*}\ K/k)$$

γ, β ニ関シテモ同様デアルカラ中山―秋月ノ定理ニヨリ $\mathfrak{a}$ ハ多元体デハナイ.

今 p 進数体 $\bar{k}$ 上ニ2次体ガ少クトモ四個存在スルヤウナ $\bar{k}$ ヲ考ヘル。即チ p ガ (2) ノ約数デアルトスル。之ハ类体論デヨク知ラレタ公式 $(\bar{k} : \bar{k}^{\times n}) = n^2 N(\mathfrak{g}^{e})$ ニヨル。但シ n ガ丁度 p^e デ割レルモノトスル。)

$k_1.\ k_2.\ k_3,\ k \cdots$ ヲ4箇ノ2次体トスレバ.
$k_1 k_2$ ノ合成体 $\bar{K}$ ハ2次ノ中間体ヲ3個有スルカラ $k_3\ k_4$ ノ内1個ハ含マナイ。ソレヲ k トスル。4個ノ体ノ合成体ヲ K トスレバ K/k (或ヒハ $\bar{K}/\bar{k}$) ヲ拡大シテ求メル体ヲ得ル。

(証明) $\bar{K}/\bar{k}$ ニ上ノ Lemma ヲ用ヒレバ $\mathfrak{a}$ ノ Exp. ハ 1カ2デアル。

$\therefore\ (\chi(g_{\sigma,\tau}), K/k, P) \sim (\chi(g_{\sigma,\tau}), \bar{K}/\bar{k}, P)_k = \mathfrak{a}_k \sim 1$

以上マトメテ. q.e.d.

定理 $(k : R_{(2)})$ ガ2ノ倍数ナラバ k 上ニ四元数体ヲ galois 群ニ持ツヤウナ体ガ少クトモ1ツ存在スル。(但シ $R_{(2)}$ ハ有理数体 R ノ (2)一進数体)

上ト同様ノ証明デ任意ノ p群ノ場合モ適当ナ基礎体ノ上ニ之ヲ Galois 群ニ持ツ体ガ存在スル。只 基礎体ニ関スル条件ガ荒ッポクナル。