156. Riemann空間のBetti numberに就て

朝長康郎 (1949.3.28.)

§1. 故 岩本秀行君が『ホロノミー群研究第七号. 昭和23年3月』に書かれた論説『Riemann 空間のトポロギーと *holonomy* 群に対して不変な *exact differential form*』を読んでみて思ひついた事を二、三述べたい。同論文に次の定理が述べられてゐる。

〔定理〕 n次元の連続可微分な有向な閉ぢた *Riemann* 空間の P次元 *Betti number* を B_p，一次独立な P階の *holonomy* 群で不変な微分式の最大数を B_p' とすれば.

$$B_p \geqq B_p'$$

特に対称 *Riemann* 空間の時は等号が成立つ.

〔證明〕 岩本君は *de Rham* の定理を用ひられたので長くなったが (*Hodge* の定理) [1] を用ひれば極めて簡單である.

〔Hodgeの定理〕 可符号の閉ぢた正定値な *Riemann* 空間の P次元 *Betti number* B_p は p次の *harmonic* な *tensor* の一次

独立なものゝ数に等しい。 但し

P次の tensor が harmonic とは 次の事を意味する。

(1) $\xi_{a_1 \cdots a_{p-1} a_\sigma a_{p+1} \cdots a_{\sigma-1} a_p a_{\sigma+1} \cdots a_p} = -\xi_{a_1 \cdots a_p}$.

即ち 凡ての添字に関して交替.

(2) exact. 即ち

$$\xi_{a_1 \cdots a_p ; r} = \sum_{q=1}^{p} \xi_{a_1 \cdots a_{q-1} r a_{q+1} \cdots a_p ; a_q}$$

(3) $g^{bc} \xi_{a_1 \cdots a_{p-1} b ; c}$

但し ; は共変微分を意味する。

そこで

今 p次の微分式 $\xi_{a_1 \cdots a_p}$ が holonomy 群で不変とすれば

$$\xi_{a_1 \cdots a_p ; r} = 0$$

で.又 $\xi_{a_1 \cdots a_p}$ が 2つの添字に関して交替なことは 微分式の定義から明らか 故に $\xi_{a_1 \cdots a_p}$ は harmonic な tensor の條件を満足する このようなものが2つあれば 其の一次結合も亦 holonomy 群で不変 從って harmonic となる故に それ等の一次独立なものの最大数は $B_{p'}$ とすれば Hodge の定理で

$$B_p \geqq B_{p'}$$

次に 等号吟味であるが.岩本君は対称 Riemann 空間の時 等号が成立つと書かれただけで証明されてゐない。私は S. Bochner [2] の論法で 之を或る制限の下に証明した。 即ち

[定理] 可符号の閉ぢた正定値な Riemann 空間で 若し

(1) $R_{ijkl;h} = 0$ (対称 Riemann 空間)

(2) 次の二次形式が負定値 即ち.

$$\{p(p-1) R_{ijkl} g_{st} + g_{kl} (2p R_{ijts} - P R_{ij} g_{st} - R_{st} g_{ij})\} \times v^{lis} v^{kjt} < 0 \qquad (v^{lis} = -v^{ils})$$

が 任意の零でない V に対して凡ての点で成立つならば P次の harmonic な tensor の共変微分は零である。 即ち

$$B_p = B_{p'}$$

特に．$P=1$ の時は (2)の条件は 任意の零でない ξ に対して

$$(2R_{ijts}-R_{ij}g_{st}-R_{st}g_{ij})\,\xi^{is}\,\xi^{jt}<0$$

が凡ての点で成つこと となる

〔説明〕 今 $\xi_{a_1}\cdots{}_{a_p}$ を harmonic な tensor とする。之から

(1.1) $\varphi=\xi_{a_1\cdots a_p;r}\,\xi^{a_1\cdots a_p;r}$

なる スカラー φ を作る。但し ξ は 次の様に書く

(1.2) $\xi^{a_1\cdots a_p;r}=g^{a_1b_1}g^{a_2b_2}\cdots g^{a_pb_p}g^{rs}\xi_{b_1b_2\cdots b_p;s}$．

φ から 次のスカラーを作る

(1.3) $\Delta=g^{bc}\varphi_{,b;c}$

T.Y. Thomas の定理(3)に依ると Δ を 全空間に亘り積分した ものが零 即ち

(1.4) $0=\int\Delta\,dv$ (dv は 体積素)

でなければならない。 Δを実際に計算すると

$$\Delta=2g^{bc}\xi_{a_1\cdots a_p;r;b;c}\,\xi^{a_1\cdots a_p;r}$$
$$+\,2\,\xi_{a_1\cdots a_p;r;b}\,\xi^{a_1\cdots a_p;r;b}$$

第2項 $\geqq 0$ は明らか．故に第一項が正定値だとすると．

(1.4)から ξ が零でない限り

$$\int\Delta\,dv>0$$

となるから (1.4)に矛盾し．

(1.5) $\xi_{a_1\cdots a_p;r}=0$．

より他にない事になる。

第一項 $=\Phi=g^{bc}\xi_{a_1\cdots a_p;r;b;c}\,\xi^{a_1\cdots a_p;r}$

$$=\Big(\xi_{a_1\cdots a_p;b;r}-\sum_{s=1}^{p}R^{m}{}_{a_srb}\,\xi_{a_1\cdots\underset{(s)}{m}\cdots a_p}\Big)_{;c}\,g^{bc}\,\xi^{a_1\cdots a_p;r}$$

$$=\Big(\xi_{a_1\cdots a_p;b;r;c}-\sum_{s=1}^{p}R^{m}{}_{a_srb;c}\,\xi_{a_1\cdots\underset{(s)}{m}\cdots a_p}-\sum_{s=1}^{p}R^{m}{}_{a_srb}\,\xi_{a_1\cdots\underset{(s)}{m}\cdots a_p;c}\Big)\times g^{bc}\,\xi^{a_1\cdots a_p;r}$$

(1.6) $R^{m}{}_{a_srb;c}=0$

だから

(1.7) $\Phi = (\xi_{a_1\cdots a_p:b;r;r} - \sum_{s=1}^{p} R^{m}_{\cdot a_s r b}\,\xi_{a_1\cdots \underset{(s)}{m}\cdots a_p:c})\, g^{bc}\xi^{a_1\cdots a_p:r}$

(1.8) $\Phi = (\xi_{a_1\cdots a_p;b;c;r} - \sum_{s=1}^{p} R^{m}_{\cdot a_s r c}\,\xi_{a_1\cdots \underset{(s)}{m}\cdots a_p;b} - R^{m}_{\cdot brc}\,\xi_{a_1\cdots a_p;m}$

$- \sum_{s=1}^{p} R^{m}_{\cdot a_s r b}\,\xi_{a_1\cdots \underset{(s)}{m}\cdots a_p;c})\, \xi^{a_1\cdots a_p;r} g^{bc}$

harmonic の條件 (2) から

(1.9) $\Phi = (\sum_{s=1}^{p} \xi_{a_1\cdots \underset{(s)}{b}\cdots a_p;a_s;c;r} - \sum_{s=1}^{p} R^{m}_{\cdot a_s r c}\,\xi_{a_1\cdots \underset{(s)}{m}\cdots a_p;b}$

$- R^{m}_{\cdot brc}\,\xi_{a_1\cdots a_p;m} - \sum_{s=1}^{p} R^{m}_{\cdot a_s r b}\,\xi_{a_1\cdots \underset{(s)}{m}\cdots a_p;c})\, g^{bc}\xi^{a_1\cdots a_p;r}$

(1.10) $\Phi = \{\sum_{s=1}^{p} \xi_{a_1\cdots \underset{(s)}{b}\cdots a_p;c;a_s;r} - \sum_{s=1}^{p}\sum_{t\neq s}(R^{m}_{\cdot a_t a_s c}\,\xi_{a_1\cdots \underset{(t)}{m}\cdots \underset{(s)}{b}\cdots a_p}$

$+ R^{m}_{\cdot b a_s c}\,\xi_{a_1\cdots \underset{(s)}{m}\cdots a_p})_{;r} - \sum_{s=1}^{p} R^{m}_{\cdot a_s r c}\,\xi_{a_1\cdots \underset{(s)}{m}\cdots a_p;b}$

$- R^{m}_{\cdot brc}\,\xi_{a_1\cdots a_p;m} - \sum_{s=1}^{p} R^{m}_{\cdot a_s r b}\,\xi_{a_1\cdots \underset{(s)}{m}\cdots a_p;c}\}\, g^{bc}\xi^{a_1\cdots a_p;r}$

harmonic の條件 (3) から第一項は零 又 添字を入れ替えて整理すれば

結局.

(1.11) $\Phi = -\{p(p-1)R^{m}_{\cdot a_p a_{p-1} c}\,\xi_{a_1\cdots a_{p-2} b m;r}$

$+ pR^{m}_{\cdot b a_p c}\,\xi_{a_1\cdots a_{p-1} m;r} + 2pR^{m}_{\cdot a_p r b}\,\xi_{a_1\cdots a_{p-1} m;c}$

$+ R^{m}_{\cdot brc}\,\xi_{a_1\cdots a_p;m}\}\, g^{bc}\xi^{a_1\cdots a_p;r}$

之が 正定値ならよいことになる. 書直すと.

(1.12) $\Phi = -\{p(p-1)R_{ijkl}\,g_{st} + g_{kl}(2pR_{ijts} - pR_{ij}\,g_{st} - R_{st}\,g_{ij})\}$

$\times\, \xi_{a_1\cdots a_{p-2}}{}^{li;s}\, \xi^{a_1\cdots a_{p-2}kj;t} > 0$

或る点で座標を適当に選べば 其の点で g_{ij} が δ_{ij} となるから

$\xi_{a_1\cdots a_{p-2}}{}^{li;s}\, \xi^{a_1\cdots a_{p-2}kj;t} = \sum \bar{\xi}_{a_1\cdots a_{p-2}}{}^{li;s}\, \bar{\xi}_{a_1\cdots a_{p-2}}{}^{kj;t}$

となる. 從って

$\bar{\xi}_{a_1\cdots a_{p-2}}{}^{li;s} = V^{lis}$

と記せば　Ⅱ は 次の様な2次形式から成立つ.

(1.13)　$-v^{lis}v^{kjt}\{P(P-1)R_{ijkl}g_{st}+g_{kl}(2PR_{ijts}-PR_{ij}g_{st}-R_{st}g_{ij})\}$

但し ξ の交替性から

$$v^{lis}=-v^{ils}$$

結局 (1.13) のような2次形式が凡ての点で正定値ならよいことになる.

$P=1$ の時は 少し簡単になり

(1.14)　$-\xi^{is}\xi^{jt}(2R_{ijts}-R_{ij}g_{st}-R_{st}g_{ij})$

が 正常値 ならよい.

§2. 平行ベクトル場と Betti number の関係

〔Hodge の定理〕から直ちに 次の定理を得る.

〔定理〕　可符号の閉ぢた正定値の Riemann 空間に平行ベクトル場が存在すれば 其の一次元 Betti number は零でない.
m 個の独立な平行ベクトルが存在したとすれば ($m_1 \geq 2$)

$$B_{m'} \geq 1, \quad (m' \leqq m) \qquad B_1 \geqq m$$

$$B_{2k} \geqq 1, \qquad k=1,2,\cdots\cdots \qquad (\text{但 } n \text{ が偶数の場合})$$

〔証明〕　v^i を平行ベクトルとすると 平行の定義から

$$v^i_{;j}=0$$

即ち.

$$v_{i;j}=0 \qquad (v_i=g_{ki}v^k)$$

故に v_i は harmonic である故に Hodge の定理で B_1 は零でない.

○ 次に $\underset{1}{v}^i, \underset{2}{v}^i \cdots\cdots \underset{m}{v}^i$ が何れも 平行ベクトルだとし, 互に一次独立とすると, 前述のように 一次独立な harmonic なベクトルが m 個 あることになるから Hodge の定理で 一次元 Betti number は 少くとも m である.

○○ 次に之等 m 個の中から m' 個を選んで

$$|\underset{1}{v}\ \underset{2}{v}\cdots\underset{m'}{v}|$$

なる m'-vector を作れば 其の共変微分は 明に零で 而も 交替

だから m' 次の harmonic な tensor となる 従って Hodge の定理で m' 次元の Betti number は零でない．

§8 次に η_1^i と η_2^i とから

$$H^{ij} = \eta_1^i \eta_2^j - \eta_1^j \eta_2^i$$

なる bi-vector を造れば，之も2次の harmonic である Bochner [2] の如く H^{ij} から

$$H^{ij} \times H^{kl} \times \cdots\cdots$$

なる交替 tensor を造ってゆけば 皆 harmonic になるから偶数次元 Betti number は零でないことになる（了）

(Mar. 18. 1949)

文献

[1] Hodge. The theory and applications of harmonic integrals. 1941. Camb Univ. Press.

[2] S. Bochner. Curvature and Betti numbers. 1948. Apr. Ann. of Math. p-379.

[3] T.Y. Thomas. Some simple applications of Green's theorem for compact Riemann space. 1940. Tohoku. Math. J. Vol. 46. pp 261-266.

附記． 訂 正

§1 の〔定理〕の $P=1$ の場合を次の様に訂正します。

〔定理〕 R_n が正定値可符号の閉ぢた Riemann 空間とする．若し

(1) $R_{ijkl;h} = 0$

で 任意の零でない対称な量 ξ^{ij} に対して，常に

（但し $\xi^{ij} \neq \rho g^{ij}$）

(2) $(2R_{ijts} - R_{ij}g_{st} - R_{st}g_{ij})\xi^{is}\xi^{jt} < 0$

ならば

$$B_1 = B_1' .$$

§2. の〔定理〕 可符号の閉ぢた ………

$B_1 \geqq m.$

$B_2 \geqq 1$ $\quad B_{2k} \geqq 1,\ k = 1.2.\cdots\cdots$（但 n が偶数の場合）

$B_{n'} \geqq 1.$ $\quad m' \leqq m$ 之を追加する．