152. Mōbius の函数について

林　勲　男　(1949.4.12)

Möbiusの函数は 整数論では　正整数nに対し

$$
\begin{aligned}
\mu(n) &= 1 && n=1 \\
&= 0 && n\text{ が素数の平方で割切れる時} \\
&= (-1)^k && n\text{ が }k\text{ 個の相異る素数の積の時}
\end{aligned}
$$

で定義され、又一般に最小元0を有し、有限個の元からなる半順序集合L上では

$$\mu(0) = 1$$

$$\mu(x) = -\sum_{y<x} \mu(y)$$

で定義されてある(G. Birkoff : *Lattice Theory* p.32)が、以下では稍々形式を改めて　この函数を定義し、その二、三の性質を示すことを目的とする。

§1.　LをS個の元からなる半順序集合とする時、二変数の函数 ε^x_y ; $x, y \in L$ を

$$\varepsilon^x_y = 1 \qquad (x \geqq y \text{ の時})$$

$$\varepsilon^x_y = 0 \qquad (x \ngeq y \text{ の時})$$

で定義する。

(ε^x_y) は S次の行列と考へられ、その行列式は

$$|(\varepsilon^x_y)| = \frac{1}{s!} \sum \pm \varepsilon^{x_1}_{y_1} \varepsilon^{x_2}_{y_2} \cdots\cdots \varepsilon^{x_s}_{y_s}$$

右辺の Σ は L の元全部から作られる順列 $(x_1, x_2 \cdots\cdots x_s)$, $(y_1, y_2 \cdots\cdots y_s)$ のすべてについての和であり、次の $\pm$ は、この二つの順列が互に偶置換で移り得るか否かに従って + 又は − をとるのであるが、この中で0と異るものは $x_1 \geqq y_1$, $x_2 \geqq y_2$, $\cdots\cdots$, $x_s \geqq y_s$ であるもののみであり、而もこれは $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, $\cdots\cdots$ $x_s = y_s$ の時に限って起ることがわかるから

$$|(\varepsilon^x_y)| = 1$$

故に整数を元素とする (ε^x_y) の逆行列が存在する。これを (μ^x_y) で表せば

$$\sum_{z \in L} \varepsilon^x_z \mu^z_y = \sum_{z \in L} \mu^x_z \varepsilon^z_y = \delta^x_y$$

(但し δ^x_y は $x = y$ の時1、$x \neq y$ の時 0)

尚詳しく調べれば $x \ngeq y$ ならば $\mu^x_y = 0$ が知られるから　結局

$$\sum_{x \geqq z \geqq y} \mu^z_y = \sum_{x \geqq z \geqq y} \mu^x_z = \delta^x_y \qquad (※)$$

を得る。

§2. 最大元, 最小元を有し, 有限個の元よりなる すべての半順序集合の集合を $\mathcal{L}$ とする.

$\mathcal{L} \ni L$ に対し, §1 で考へた行列を

$\mathbb{E}(L) = (\varepsilon^x_y(L))$, $\mathbb{M}(L) = (\mu^x_y(L))$ で表はすことにし、之を使って $\mathcal{L}$ 上の Möbius の函数 $\mu(L)$, $L \in \mathcal{L}$ を

$$\mu(L) = \mu^I_0(L) \qquad \text{で定義する}$$

但し $I, 0$ は L の最大元, 最小元である.

$\mathcal{L}$ の同型なる元に対し, μ が等しい値をとることは明らかであるが

(i) L の双対 L' に対して $\mu(L) = \mu(L')$

(ii) L_1, L_2 の直積を $L_1 \cdot L_2$ で表はせば

$$\mu(L_1 \cdot L_2) = \mu(L_1) \cdot \mu(L_2)$$

(iii) $L \ni a, b$ $\quad a \geqq b$ に対し

$$\sum_{a \geqq z \geqq b} \mu(z/b) = \sum_{a \geqq z \geqq b} \mu(a/z) = \delta^a_b$$

但し. $\quad u/v \equiv \{ z \,;\, u \geqq z \geqq v \}$

証明. (i) $\varepsilon^x_y(L') = \varepsilon^y_x(L)$ であるから, $\mathbb{E}(L')$ は $\mathbb{E}(L)$ を転置したもの、従って, $\mathbb{M}(L')$ は $\mathbb{M}(L)$ を転置したものであり,

従って $\quad \mu^0_I(L') = \mu^I_0(L)$

$0, I$ は夫々 L' の最大元, 最小元となるから, 左辺は $\mu(L')$

又右辺は $\mu(L)$.

(ii) $L_1 \ni x_1, y_1$, $L_2 \ni x_2, y_2$, $L_1 \cdot L_2 \ni x_1 \cdot x_2$. $y_1 \cdot y_2$ とす.

$\varepsilon^{x_1}_{y_1}(L_1) \cdot \varepsilon^{x_2}_{y_2}(L_2)$ を考へれば, 之は $x_1 \geqq y_1$、且つ $x_2 \geqq y_2$ の時のみ 1 で, 他の場合は 0 であるから,

$$\varepsilon^{x_1 \cdot x_2}_{y_1 \cdot y_2}(L_1 \cdot L_2) = \varepsilon^{x_1}_{y_1}(L_1) \cdot \varepsilon^{x_2}_{y_2}(L_2)$$

故に $\quad \mathbb{E}(L_1 \cdot L_2) = \mathbb{E}(L_1) \times \mathbb{E}(L_2)$ (Kronecker 積)

逆行列に移れば

$$\mathbb{M}(L_1 \cdot L_2) = \mathbb{M}(L_1) \times \mathbb{M}(L_2)$$

故に $$\mu_{y_1\cdot y_2}^{x_1\cdot x_2}(L_1\cdot L_2)=\mu_{y_1}^{x_1}(L_1)\cdot\mu_{y_2}^{x_2}(L_2)$$

ここで $x_1(x_2)$, $y_1(y_2)$ を夫々 $L_1(L_2)$ の最大元, 最小元にとれば 証明すべき式を得る.

(iii) は 詳細は略すが (本) から わかる.

例　正整数 n に対し n のすべての約数 m (正)の作る半順序集合を $[n]=\{m\,;\,n\geqq m\}$ で表わす.

$n=n_1\cdot n_2$ で n_1 ; n_2 が互に素ならば

$[n]=[n_1]\cdot[n_2]$ (直積) であり 又 素数 p に対しては,

$$\mu([p^r])=-1 \qquad r=1$$
$$=0 \qquad r=\geqq 2.$$ が 直に判るから

(iii) によって, 最初の $\mu(n)$ の定義と同じものが出ることがわかる.

(April '49)