149. Lévy の條件

(北大) あつち・まさひこ (1949.2.18)

P. Lévy の与えた「個々には無視し得る」という概念は，独立な実確率変数の和の理論に於て重要な役割を演じていることは周知である.

この概念を次の立場から考察してみる.

[定義] 独立な(実)確率変数の無限行列 (X_{ij}) $(i=1,2,\cdots,j=1,2,\cdots,k_i)$ に於て $(1\leqq k_i\leqq\infty)$，次の條件(A)が満足される時，和 $S_i=X_{i,1}+X_{i,2}+\cdots\cdots+X_{i,k_i}$ の確率 ρ $(0<\rho<1)$ に対する散布度 $L_i(\rho)$ に対して，各 $X_{i,j}$ $(j=1,2,\cdots\cdots,k_i)$ は $i\to\infty$ の時「個々には無視し得る」という.

任意の $\varepsilon > 0$ に対して

(A) $$\lim_{i\to\infty} \max_{1\leqq j\leqq k_i} P\{|X_{i,j}| > \varepsilon L_i(p)\}=0$$

以下に於ては $X_{i,j}$ の mediane は 0 としておく。

〔定理 1〕 次の二つの条件 (A′), (B′) は同等である。

(A′) $$\lim_{i\to\infty} \max_{1\leqq j\leqq k_i} P\{|X_{i,j}| > \varepsilon\}=0, \quad \varepsilon > 0$$

(B′) $$\lim_{i\to\infty} \max_{1\leqq j\leqq k_i} l_{i,j}(\gamma)=0, \qquad 0\leqq \gamma < 1.$$

但し $l_{i,j}(\gamma)$ は、$X_{i,j}$ の、確率 γ に対する散布度である。

〔証明〕 先ず (A′) を仮定する。

$$\eta_i(\varepsilon) = \max_j P\{|X_{i,j}| > \varepsilon\}$$

とおけば

$$\lim_{i\to\infty} \varepsilon_i = 0, \qquad \lim_{i\to\infty} \eta_i(\varepsilon_i)=0$$

となる様な正数列 $\{\varepsilon_i\}$ が存在する。

$0 \leqq \gamma \leqq 1-\eta_i(\varepsilon_i)$ なら

$$l_{i,j}(\gamma) \leqq 2\varepsilon_i \quad (j=1,2,\cdots,k_i)$$

$$\max_j l_{i,j}(\gamma) \leqq 2\varepsilon_i.$$

即ち (B′) である。

逆に (B′) を仮定する。

任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\varepsilon > \max_j l_{i,j}(\gamma) \geqq l_{i,j}(\gamma), \quad (j=1,2,\cdots\cdots,k_i,\ i>N)$$

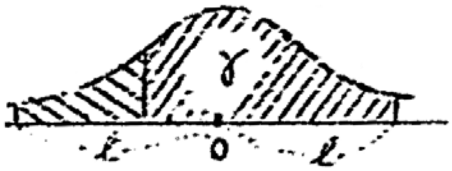
今 任意に ε' が与えられたとする。($\varepsilon' > 0$)。

$\frac{1}{2} > \varepsilon'$ の時は、$\gamma = 1-\varepsilon'$ とおけば

$$P\{|X_{i,j}| > \varepsilon\} \leqq P\{|X_{i,j}| > l_{i,j}(\gamma)\}$$
$$= 1 - P\{|X_{i,j}| \leqq l_{i,j}(\gamma)\}$$

$X_{i,j}$ の médiane は 0 だから $l_{i,j}(\gamma)$ の実直線上の位置は 0 を含む。 従て

$$P\{|X_{i,j}| \leqq l_{i,j}(\gamma)\} \geqq \gamma.$$



$$P\{|X_{i,j}| > \varepsilon\} \leqq 1-\gamma = \varepsilon \qquad (j = 1, 2, \cdots\cdots, k_i, \quad i > N)$$

(1) $\quad \max P\{|X_{i,j}| > \varepsilon\} \leqq \varepsilon', \quad i > N.$

$\varepsilon' \geqq \frac{1}{2}$ の時は 任意に $\varepsilon'' < \frac{1}{2}$ をとり，上述の ε' の代りに使えば (1)は ε' の代りに ε'' で おき代えられる．従て尚 $\varepsilon' \geqq \frac{1}{2}$ では (1)は成立する．

ε' は任意だったから (A') である．

［定理 2］ $X_{i,j}$ の収幅度を $L_{i,j}(\gamma)$ とすれば，條件 (A) と 次の條件 (B) とは同等である．但し $L_i(\rho) \neq 0$ とする．

(B) $\quad \lim_{i\to\infty} \frac{1}{L_i(\rho)} \max_{1 \leqq j \leqq k_i} L_{i,j}(\gamma) = 0. \quad 0 \leqq \gamma < 1$

［証明］ $\quad Y_{i,j} = \dfrac{X_{i,j}}{L_i(\rho)}$

とおけば (A) は［定理 1］ の (A') の型となる．

又 その時，

$$L_{i,j}(\gamma) = L_i(\rho) \quad l_{i,j}(\gamma)$$

但し $l_{i,j}(\gamma)$ は $Y_{i,j}$ の収幅度

であるから (B') は (B) となる．