146. Boole 代数ノ公理系 (I)

上 井 雪 子 (1949. 1. 13)

§1. <u>問題ノ説明</u>　「Bool環[1]」ハ又「一般Boole代数[2]」トモ名附ケラレ 之ヲ定義スル種々ノ公理系ガ *Stone*[3] *Stabler*[4] 及ビ *Bernstein*[5] 等ニヨッテ与ヘラレテ居ル. ソシテカヽル公理系ノ何レニ於イテモ乗法ノ結合法則(*Associative law of Multiplication*)ガ特殊ノ役割ヲ演ジテヰル。私ハコノ公理ヲ更ニ弱イ二ツノ公理デ, 併セテ之ト同値トナルモノニ分解シ ソレ等ノ独立性ヲ考究シテ見タイ。コヽデハ代表的ナ公理系トシテ *Stabler* ノ *Set* III[4] ヲ取リ上ゲヨウ. ソレハ以下ニ述ベル様ナモノデアル。

<u>*Bool*環Aヲ規定スル *Stabler* ノ公理系・ *Set* II・</u>

集合Aハ空デナク, ソノ要素ノ間ニハ + 及ビ × ノ算法ガ定義サレル。

1. $a, b \in A$ ナラバ $\begin{cases} \text{(i)} & a+b \in A \\ \text{(ii)} & ab \in A \end{cases}$ 一意ニ定マル.

(注意: 算法ノ記号 × ハ略シテ・又ハ全ク省略シテシマフノガ普通デアル)

2. $(a+b)+c = a+(b+c)$
3. $a+b_1 = a+b_2$ ナラバ $b_1 = b_2$
4. $a_1+b = a_2+b$ ナラバ $a_1 = a_2$

5. $(ab)c = a(bc)$

6. $a(b+c) = ab + ac$

7. $(a+b)c = ac + bc$

8. $aa = a$

コノ公理系ノ公理ノ中，公理5ガ如何ニ特殊ノ役割ヲ演ズルカハ コノ公理系カラ5ヲ除イタ残リ1.2.3.4.6.7.8カラ次ノ結果ガ得ラレル事カラモ窺ヒ知ル事ガ出来ル。

T4. $a + 0 = 0 + a = a$ ナル 0ガ存在シ且一ツニ限ル。

D2. $a + a = 0$

C1. $a + b = c$ ナラバ $a = c + b$

C2. $a + b = 0$ ナラバ $a = b$

T5. $a, b \in A$ ニ対シテ $x + a = b$ $x \in A$ ナルx 存在シテ一意ニ定マル。且 $x = b + a$. デアル。

T6. $a + b = b + a$

T7. $ab = ba$.

T8. $a0 = 0a = 0$

之等ノ定理ノ証明ハ *Stabler*[4] 及ビ *Bernstein*[5] ガ与ヘテ居ル。T4, D2 等定理ノ名称ハ *Stabler* ノ論文[4]ニ示シテアルモノヲ採用シタ。以下私ハ之等ノ結果ヲ多クノ場合断リ無シニ用ヒル。

私ハ先ヅ5ノ代リニ次ノ二ツノ公理ヲ導入シテ見タ。

5_1. 任意ノ $a, b \in A$ 且 $a \neq b$ ニ対シ $c^*a = a$, $c^*b = b$ ヲ同時ニ満足スル $c^* \in A$ ノ存在　但シ $c^* = c^*(a, b)$

5_2. 任意ノ $a, b \in A$ 且 $a \neq 0$, $b \neq 0$ ニ対シ $ab = 0$ ナラバ，任意ノ $c \in A$ ニ対シ $a(bc) = 0$.

1,2,3.4.6.7.8ナル七ツノ公理ノ下ニ5カラ5_1及ビ5_2ガ導キ出シ得ル事ハ *trivial* デアル。実際5_1ヲ証明スルニハ $c^* = a + b + ab$ ト置ケバ $c^*a = (a+b+ab)a = aa + ba + (ab)a = a + (ab+ab) = a + 0 = a$. 同様ニ $c^*b = b$ トナル。5_2ハT8カラ明カデアル。

依ッテ問題ハ上記ノ七ツノ公理ノ下ニ5_1, 5_2カラ5ヲ導ク事及ビ5_1, 5_2ガ

ガ互ニ且他ノ七個ノ公理トモ独立デアル事ヲ示ス点ニアル.

§2. 乗法ノ結合法則ノ分解

定理 上記ノ七個ノ公理ノ下ニ公理5ハ公理5_1, 5_2ノ二公理ヲ合セタモノニ同値デアル.

公理5_1, 5_2カラ公理5ヲ導ク. 以下ニ, 私ハ二ツノ証明ヲ与ヘル.

第一証明. 今a, bヲAノ任意ノ二ツノ要素トショウ. 5_1ニヨリ $c^* \in A$ 存在シテ $c^* a = a$, $c^* b = b$ トナル. ソコデ $a^* = c^* + a$ トオケバ $a a^* = a(c^* + a) = ac^* + aa = a + a = 0$ 即チ $aa^* = 0$.
従ッテ5_2ニヨリ $0 = a(a^* b) = a\{(c^* + a)b\} = a(c^* b + ab) = a(b + ab) = ab + a(ab)$.

故ニ (1) $ab = a(ab)$ 従ッテ M_2. $(aa)b = a(ab)$.

M_2ハ Bernstein[5] ノ与ヘタ条件デアル. Bernstein ハ之カラ次ノ様ニシテ $(ab)c = a(bc)$ ヲ導キ出シタ. 先ヅ任意ノa, bニ対シテ次ノ(2)ガ成立スル.

$$(2) \quad (a+b)(ab) = 0$$

$$(a+b)(ab) = a(ab) + b(ab) = ab + b(ba) = ab + ab^2 = 0 \quad (7, \{(1), T7\}$$

$\{(1), T7\}$, D2 ニ依リ).

ソコデ
$$0 = \{(a+b)+(b+c)\}\{(a+b)(b+c)\} = (a+c)\{(a+b)(b+c)\}$$
$$= (a+c)\{a(b+c) + b(b+c)\} = (a+c)\{(ab+ac)+(bb+bc)\}$$
$$= a\{(ab+ac)+(b+bc)\} + c\{(ab+ac)+(b+bc)\}$$
$$= [\{a(ab)+a(ac)\}+\{ab+a(bc)\}] + [\{c(ab)+c(ac)\}+\{cb+c(bc)\}]$$
$$= [(ab+ac)+\{ab+a(bc)\}] + [\{(ab)c+ac\}+(bc+bc)] = a(bc)+(ab)c$$

((2), {2, D2, T4}, 7, 6, {7, 8}, 6, {(1), T7} {2, D2, T4} ニ依リ)

$\therefore \quad (ab)c = a(bc) \qquad$ (C2 ニ依リ)

第二証明. $ab = b$ ヲ $a \geqq b$ ト定義スレバ次ノ(i)及ビ(ii)ハ8及ビT7カラ明カデアル.

(i) $a \geqq aa$, (ii) $a \geqq b$ 且 $b \geqq a$ ナラバ $a = b$.

Lemma 1. $a \geq b$ ナラバ，任意ノ c ニ対シ $a \geq bc$ デアル。

証明　5_1 ニヨリ b, bc ニ対シ $c^* b = b$, $c^*(bc) = bc$ ナル c^* ガ存在スル。　ソコデ $\lambda = c^* + a$ トオケバ $\lambda b = (c^* + a)b = c^* b + ab = b + b = 0$　即チ $\lambda b = 0$.　従ッテ 5_2 ニヨリ $\lambda(bc) = 0$　∴ $a(bc) = (c^* + \lambda)(bc) = c^*(bc) + \lambda(bc) = bc + 0 = bc$.　即チ $a \geq bc$.

系.　凡テノ a, b ニツイテ $a \geq ab$.

証明 (i) $a \geq a$ ト Lemma 1. カラ明カデアル。

Lemma 2　$a \geq b$ ナラバ，任意ノ c ニ対シ $ac \geq bc$ デアル。

証明.　5_1 ニヨリ b, c ニ対シ $c^{**} b = b$,　$c^{**} c = c$ ナル c^{**} ガ存在スル。　ソコデ $\beta = c^{**} + a$ トオケバ $\beta b = (c^{**} + a)b = c^{**} b + ab = b + b = 0$　即チ $\beta b = 0$.　従ッテ 5_2 ニヨリ $\beta(bc) = 0$. 更ニ $(bc)\beta = 0$ ニ 5_2 ヲ適用スレバ，$0 = (bc)(\beta c) = (bc)\{(c^{**} + a)c\} = (bc)(c^{**}c + ac) = (bc)(c + ac) = (bc)c + (bc)(ac)$.
Lemma 1.系ニヨリ $bc + (ac)(bc) = 0$　即チ $(ac)(bc) = bc$
定義ニヨリ $ac \geq bc$.

扨，乗法ノ associative law：凡テノ a, b, c ニツイテ $(ab)c = a(bc)$ ナル事ヲ示サウ。

先ヅ Lemma 1.系ニヨリ $a \geq ab$, Lemma 1 ニヨリ $a \geq (ab)c$, Lemma 2 ニヨリ $a(bc) \geq \{(ab)c\}(bc)$.　他方ニ於テ Lemma 1 系ニヨリ，$b \geq ab$, Lemma 2 ニヨリ $bc \geq (ab)c$.　定義ニヨリ $\{(ab)c\}(bc) = (ab)c$　従ッテ $a(bc) \geq (ab)c$,　a ト c ヲ取換ヘレバ $(ab)c \geq a(bc)$.　最後ニ，(ii) ニヨリ $(ab)c = a(bc)$ デアル。

§3. 公理系ノ独立性.　次ニ私ハ 1, 2, 3, 4, 5_1, 5_2, 6, 7, 8 ノ九個ノ公理ガ互ニ独立デアル事ヲ示シタイノデアルガ，他ノ場合ハ既ニ知レテ居ル[5]ノデ問題トナッテ居ル 5_1, 5_2 ニ就テ述ベヨウ。

例 I.　5_2 ガ他ノ七個ノ公理ト共ニ成立シ，5_1 ガ不成立デアルコト

平面上ノ平行二直線 l 及ビ l' トノ点ノ全体ヲ A^* トシ，A^* 以外ノ点ハ空集合トシテ取リ扱フ．a, b, c 等ハ l 及ビ l' 即チ A^* ノトノ有限個ノ点集合ヲ表ハシ，θ ハ空集合ヲ表ハスモノトスル．

$a+b$ ： a ト b トノ Symmetric difference.

特ニ a ト b トノ凡テノ点ガ相重ナル 即チ $a=b$ ナルトキ，$a+a=\theta$ ト定義スル．

$a \cdot b$ ： a ヲ $m(\geqq 1)$ 個ノ点集合，b ヲ $n(\geqq 1)$ 個ノ点集合トシテ a ト b トカラ各一点ヲトッテ作ッタ mn 個ノ点対ヲ両端トスル線分ノ中点ヲ c_i $(i=1, 2, 3, \cdots, mn)$ トシ $a\cdot b=\{c_1\}+\{c_2\}+\{c_3\}+\cdots\cdots+\{c_{mn}\}$ ト定義スル．但シ $\{c_i\}$ ハ 一点 c_i ヲ集合ト見做シタモノヲ示ス．

1, 2, 3 及ビ $a+b=b+a$ 等ノ成立ハ明カデアル．従ッテ 4 ノ成立ハ自ヅト明カデアル．

6 ノ成立 ： b ト c トガ互ニ相素ナラザルトキソノ共通部分ヲ d デ表ハシ，n_d 個ノ点集合トスレバ，$ab+ac$ ニ於テハ ab, ac ノ夫々ニ於ケル a ト d トノ各一点ヲトッテ作ッタ mn_d 個ノ点対カラ出来ル中点ハ同一ノモノガ二ツ宛デアルカラ現ハレナイ．ソノ他ノ点ハ a ト d ニ含マレナイ b トカラノ各一点ヲトッテ作ッタ $m(n_b-n_d)$ 個ノ点対カラ出来ル中点及ビ a ト d ニ含マレナイ c トカラノ各一点ヲトッテ作ッタ $m(n_c-n_d)$ 個ノ点対カラ出来ル中点ヲ加ヘ合セタモノデアル．之ラノ点ハ a ト b ノミカ c ノミニ属シ．．．ノ点ヲ含マナイ点集合 $b+c$ トカラ各一点ヲトッテ作ッタ $m\{(n_b-n_d)+(n_c-n_d)\}$ 個ノ点対カラ出来ル中点ト一致スル．即チ $a(b+c)=ab+ac$ ガ成立スル．

尚 b ト c トガ互ニ相素ナルトキ成立スルコトハ自ヅト明カデアル．
又 $ab=ba$ ガ成立スルコトハ明カデアル．従ッテ 7 ノ成立ハ自ヅト明カデアル．

8 ノ成立 ： $a=b$ ナル場合ノ ab ハ a ト b トカラノ各一点ヲトッテ作ッタ mn 個ノ点対ノ中，同一ノ点ガトラレヽバ中点ハ之ト一致シ，相異ナル点ガ取ラレヽバ c_i ノ中ニ同一ノモノガ2ッ宛現ハレルカラ ab ノ中ニ現ハレナイ．依ッテ ab ハ a ト一致スル．即チ $aa=a$ ガ成立スル．

5_2 ノ成立 ： a ヲ l 上ノ任意ノ集合，b ヲ l' 上ノ任意ノ集合トスレバ a, b カラノ各一点ヲ取ッテ作ッタ線分ノ中点ハ l ト l' トノ距離ノ中点ノ軌跡上ノ点デアルカラ A^* ニ属サナイ．依ッテ ab ノ凡テノ点ハ A^* ニ属サナイ．

即チ $ab=\theta$ デアル．ソコデ A^* ニ於ケル任意ノ集合 C ヲトリ $a(bC)$ ヲ考ヘルニ C ノ点デシカモ ℓ 上ニアル点ト ℓ' 上ニアル b ノ点トニヨッテ作ラレル線分ノ中点ハ上ト同ジ理由ノ下ニ A^* ニ属サナイ．他方 C ノ点デシカモ ℓ' 上ニアルモノト b トノ点ニヨッテ作ラレル線分ハ ℓ' 上ニアル故ソノ中点モ亦 ℓ' 上ニアル．従ッテ bC ハ結局ノトコロ定カ ℓ' 上ノ点集合デアル．依ッテ $a(bC)=\theta$ トナル事ハ何レノ場合ニモ成立スル．即チ $ab=\theta$ ナラバ任意ノ $C\in A^*$ ニ対シ $a(bC)=\theta$ デアル．

5_1 ノ不成立：例ヘバ a ヲ ℓ 上ノ二点 a_1，a_2 トカラ成ル集合，b ハ ℓ 上ノ点 a_1 ト ℓ' 上ノ点 b_1 トノ二点カラ成ル集合トシ，C^* ハコレラ a_1，a_2 及ビ b_1 ノ三点カラ成ル集合トスレバ，C^*a ニ於テハ ℓ 上ノミノ点対ニヨル中点ハ 8 ニヨリ a_1，a_2 ノミ現ハレ，点対 (a_i, b_1)，$i=1,2$ ニヨル中点ハ 5_2 ニ於ケル理由ノ下ニ θ デアル．依ッテ C^*a ノ中ニハ a_1, a_2 ノミ現ハレル．即チ $C^*a=a$ デアル．他方 C^*b ニ於テハ，a_1，点対 (a_2, a_1) ニヨル中点及ビ b_1 ガ現ハレル．従ッテ $C^*b \neq b$ デアル．

例2．5_1 ガ他ノ七個ノ公理ト共ニ成立シ，5_2 ガ不成立デアルコト

+	0	I	a	b	c	A	B	Γ
0	0	I	a	b	c	A	B	Γ
I	I	0	A	B	I	a	b	c
a	a	A	0	Γ	B	I	c	b
b	b	B	Γ	0	A	c	I	a
c	c	Γ	B	A	0	b	a	I
A	A	a	I	c	b	0	Γ	B
B	B	b	c	I	a	Γ	0	A
Γ	Γ	c	b	a	I	B	A	0

×	0	I	a	b	c	A	B	Γ
0	0	0	0	0	0	0	0	0
I	0	I	a	b	c	A	B	Γ
a	0	a	a	I	I	0	A	A
b	0	b	I	b	I	B	0	B
c	0	c	I	I	c	Γ	Γ	0
A	0	A	0	B	Γ	A	Γ	B
B	0	B	A	0	Γ	Γ	B	A
Γ	0	Γ	A	B	0	B	A	Γ

ココニ於テハ C^* トシテハ凡テノ要素ニ就テ $Ia=a$ ガ成立スル I ヲ採用シタ．5_1 ノ成立ト共ニ他ノ七個ノ公理ハ成立スル．

5_2 ノ不成立：例ヘバ $aA=0$ ナルニカヽハラズ $a(Ab)=aB=A\neq 0$ デアル．

註 (1). 例ヘバ G. Birkhoff. "Lattice theory" (The American Mathematical Society. Colloquium Publications vol. XXV. 1940) pp 95－96 參照.

(2). 例ヘバ G. Birkhoff. "Lattice theory" p 97 參照.

(3). M.H. Stone. "The theory of representations for Boolean algebras" (Transactions of the American Mathematical Society vol. 40, 1941) 參照.

(4) E.R. Stabler, "Sets of postulates for Boolean rings" (The American Mathematical Monthly. vol. 48, 1941) 參照.

(5) B.A. Bernstein, "Postulate-sets for Boolean rings" (Transactions of the American Mathematical Society vol. 55, 1943) 參照.