145. p 進数体ニオケル或ル群ニツイテ

國吉秀夫（東北大）194○.I.8

§1.　k ヲ p 進数体、Ω/k ヲ有限拡大トシ　$G(k/\Omega)=(A\in\Omega;\ N_{\Omega/k}A.=1)$ トシマス。Ω/k Abel ノトキ、$G(k/\Omega)$ ニツイテ、局所類体論ノ Anordnungssatz ニ類似シタ定理ガ成立シマス。之ハ淡中先生ガ紙上数学談話会 236 ニテ示サレタモノデスガ、其所デハ $G(k/\Omega)$ ノ構造ニツイテノ定理ガ載ッテ居リマス。之ハ中山、秋月両先生ニヨリ、一般ノ場合ニ拡張サレマシタガ。（247, 252, 255）此所デハ Ω/k Abel ノトキ、ソノ Galois 群 $\mathfrak{G}$ ト $G(k/\Omega)$ トノ関係ニツキ注意シタイト思ヒマス。

S.Sasaki.　Sci. Rep. Tohoku. Imp. Univ., 29. (1940). 219-267.

$\mathfrak{O}$ ノ不変系ヲ $(n_1, \cdots\cdots n_r)$ n_{i+1}/n_i トシマスト ソレニ対シテ

$\mathfrak{O} = \mathfrak{Z}_1 \times \cdots\cdots \times \mathfrak{Z}_r$, $\mathfrak{Z}_i = \{\sigma_i\}$ ハ n_i 次 巡回群

ト分解致シマス。ソノトキ.

$$G(k/\Omega)/\Omega^{1-\lambda}_{\mathfrak{O}} = A_2 \times A_3 \times \cdots\cdots \times A_r$$

但シ. $A_i \cong \mathfrak{Z}_i \times \mathfrak{Z}_{i+1} \times \cdots\cdots \times \mathfrak{Z}_r$.

$\Omega^{1-\lambda}_{\mathfrak{O}}$ ハ $\omega^{1-\lambda}$, $\omega \in \Omega$, $\lambda \in \mathfrak{O}$. 生成スル群 トス.

ナル関係ガ成立シマス。之ヲ証明致シマス。

淡中先生ノ結果ニヨレバ. $G(k/\Omega) = \left(\dfrac{a_{\sigma,\tau}}{a_{\tau,\sigma}},\ \Omega^{1-\lambda}_{\mathfrak{O}}\right)$ デアルガ.

σ, τ ハ $\mathfrak{O}$ ノ元 スベテヲ取ル必要ハナク. (1) ノ σ_i ニ関スルモノノミ

ニテ十分デアル。即チ.

L.1. $G(k/\Omega) = \left(\dfrac{a_{\sigma_i,\sigma_j}}{a_{\sigma_j,\sigma_i}},\ \Omega^{1-\lambda}_{\mathfrak{O}}\right)$ 但シ. $(a_{\sigma,\tau})$ ハ Exponent ガ $(\Omega:k)$ ナル Ω/k ノ因子団トスル.

証明_ 帰納法ニヨル。$\mathfrak{N} = \mathfrak{Z}_1 \times \cdots\cdots \times \mathfrak{Z}_{r-1}$ トシ. 之ニ対スル体ヲ N トスルト

$N_{\Omega/k}(A) = 1$ ナル A ヲトレバ

(3) $$N_{\Omega/N}(A) = n^{1-\sigma_r} \qquad n \in N$$

$n' \equiv a_{\sigma, n}$ mod $N^{*}_{\Omega/N}$ デアルカラ. $\sigma = \prod_i \sigma_i^{x_i}$ トスレバ.

(4) $$\equiv \prod_i a^{x_i}_{\sigma_i, n} \qquad \text{mod.}\ N^{*}_{\Omega/N}$$

(3), (4) ヨリ_ $N_{\Omega/N}(A) = (\prod_i a^{x_i}_{\sigma_i}, n \cdot N_{\Omega/N}\,\omega)^{1-\sigma_r}$

$$= \prod_i (a^{1-\sigma_r}_{\sigma_i, n})^{x_i} \qquad N_{\Omega/N}(\omega^{1-\sigma_r}) = N_{\Omega/N}\left(\prod_i \left(\frac{a_{\sigma_r,\sigma_i}}{a_{\sigma_i,\sigma_r}}\right)^{x_i} \cdot a^{1-\sigma_r}\right)$$

故ニ 帰納法ノ仮定ニヨリ

$$G(k/\Omega) = \left(\frac{a_{\sigma_i,\sigma_j}}{a_{\sigma_j,\sigma_i}},\ \Omega^{1-\lambda}_{\mathfrak{O}}\right)$$

次ニ. 簡単ナ場合ニ関シテ. Lemma ヲ述ベル。H/k Abel ヲ拡大.

Galois 群 $\mathfrak{g}$ ノ不変系ヲ (n_1, n_2) n_2/n_1 トス。

$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2$ $\mathfrak{g}_i = \{\tau_i\}$ ハ n_i 次ノ巡回群.

(a') ヲ Exponent ガ $(H:k)$ ナル H/k ノ因子団トスレバ L.1. ヨリ.

$$G(k/H) = \left(\frac{a'_{\tau_1,\tau_2}}{a'_{\tau_2,\tau_1}},\ H^{1-\lambda}_{\mathfrak{g}}\right)$$

デアルガ. $\dfrac{a'_{\tau_1,\tau_2}}{a'_{\tau_2,\tau_1}}$ ノ mod. $H^{1-\lambda}_{\mathfrak{g}}$ ノ位数ニツイテ. 次ノ Lemma ガ

成立スル。

L.2. $\left(\frac{a'_{\tau_1,\tau_2}}{a'_{\tau_2,\tau_1}}\right)^x \in H_{\mathfrak{z}}^{1-\lambda}$ ナラバ $n_2 | x$.

証明. $\mathfrak{z}_i$ ニ対応スル中間体ヲ H_i トスル。

$$\left(\frac{a'_{\tau_1,\tau_2}}{a'_{\tau_2,\tau_1}}\right)^x \in H_{\mathfrak{z}}^{1-\lambda} \quad \text{ナル故} \quad \left(\frac{a'_{\tau_1,\tau_2}}{a'_{\tau_2,\tau_1}}\right)^x = h_1^{1-\tau_1} h_2^{1-\tau_2}$$

両辺ノ N_{H/H_2} ヲ作ル。

$$\text{左辺} = N_{H/H_2}\left(\frac{a'_{\tau_1,\tau_2}}{a'_{\tau_2,\tau_1}}\right)^x = \left(a'^{\,1-\tau_1}_{\tau_2,\mathfrak{z}_2}\right)^x = \left(a'^{\,x}_{\tau_2,\mathfrak{z}_2}\right)^{1-\tau_1}$$

$$= \left(a'_{\tau_2^x,\mathfrak{z}_2}\cdot N_{H/H_2} k''\right)^{1-\tau_1}$$

$$\text{右辺} = N_{H/H_2}(h_1^{1-\tau_1})$$

$$\therefore \quad \left(a'_{\tau_2^x,\mathfrak{z}_2}\right)^{1-\tau_1} = \left(N_{H/H_2}\theta\right)^{1-\tau_1}$$

(5) $$\therefore \quad a'_{\tau_2^x,\mathfrak{z}_2} = \alpha\cdot N_{H/H_2}\theta \qquad \alpha \in k.$$

然ルニ $\alpha \in N^*_{H/H_2}$ デアル。 1)

$\alpha \in H_2$ ト考ヘテ、k ニ対スル Norm ハ

$$N_{H_2/k}\alpha = \alpha^{n_1} = \left(\alpha^{\frac{n_1}{n_2}}\right)^{n_2} \in N^*_{H_1/k}$$

故ニ 局所類体論ノ Verschiebungssatz ニヨリ。

(6) $$\alpha \in N^*_{H/H_2}$$

従ッテ (5)、(6) ヨリ、

$$a'_{\tau_2^x,\mathfrak{z}_2} \in N^*_{H/H_2} \qquad \therefore \quad \tau_2^x = 1$$

再ビ Ω/k ニ戻リ L.1 ノ記号ヲ用ヒル。

L.3. $\left(\frac{a_{\sigma_i,\sigma_j}}{a_{\sigma_j,\sigma_i}}\right)^{n_j} \in \Omega_{\mathfrak{n}}^{1-\lambda}$ 但シ $i<j$

証明 $\mathfrak{Z}_j$ ニ対スル体ヲ Z_j トスレバ、Ω/Z_j ハ巡回体。一方

$$N_{\Omega/Z_j}\left(\frac{a_{\sigma_i,\sigma_j}}{a_{\sigma_j,\sigma_i}}\right) = \left(a^{n_j}_{\sigma_j,\mathfrak{z}_j}\right)^{1-\sigma_i} = \left(a_{\sigma_j^{n_j},\mathfrak{z}_j} N_{\Omega/Z_j} c\right)^{1-\sigma_i}$$

$$= N_{\Omega/Z_j} c^{1-\sigma_i}$$

$$\left(\frac{a_{\sigma_i,\sigma_j}}{a_{\sigma_j,\sigma_i}}\right)^{n_j} = c^{1-\sigma_i} d^{1-\sigma_j} \in \Omega_{\mathfrak{n}}^{1-\lambda}$$

1) 此ノ下ノ 此ノ証明ハ淡中先生ニ依ル。元ノ証明ハ実ニ 複雑デアッタ。

定理. $G(k/\Omega)\,\Omega_{\mathfrak{a}}^{1-\lambda} = A_2 \times A_3 \times \cdots\cdots \times A_r$

$$A_i = Z_{i.\,i+1} \times Z_{i.\,i+2} \times \cdots\cdots \times Z_{i.\,r}$$

$Z_{i.j}$ ハ. $\dfrac{a_{\sigma_i.\sigma_j}}{a_{\sigma_j.\sigma_i}} \mod \Omega_{\mathfrak{a}}^{1-\lambda}$ ニヨリ生成サレ $\mathfrak{z}_j$ ニ同型。

証明

(7) ‥‥‥‥ $\prod \left(\dfrac{a_{\sigma_i.\sigma_j}}{a_{\sigma_j.\sigma_i}}\right)^{x_{i.j}} \in \Omega_{\mathfrak{a}}^{1-\lambda}$

ナル関係式アリトスル. 任意ノ $i<j$ ヲトリ. $\mathfrak{z}_i \times \mathfrak{z}_j$ ヲ除イタ他ノ直積因子ヲ $\mathfrak{n}'$. ソレニ対スル体ヲ Z トシ. (7) ノ両辺ノ $N_{\Omega/Z}$ ヲ作ル.

$$N_{\Omega/Z}\left(\frac{a_{\sigma_p.\,\sigma_t}}{a_{\sigma_t.\,a_p}}\right) = 1 \qquad t \neq i.j \quad p \neq i,j$$

$$N_{\Omega/Z}\left(\frac{a_{\sigma_i.\,\tau}}{a_{\tau.\,\sigma_j}}\right) = a^{1-\sigma_i}_{\tau.\,\mathfrak{n}}$$

デアルカラ (7) ハ

$$\left(\frac{a^{\mathfrak{n}}_{\sigma_i.\sigma_j}}{a_{\sigma_j.\sigma_i}}\right)^{x_{i.j}} \in Z^{1-\lambda}_{\mathfrak{z}_i \times \mathfrak{z}_j}$$

トナルガ. Chevalley ニヨリ. $(a^{\mathfrak{n}}_{\sigma_i.\sigma_j})$ ハ多元体ニ対応スル Z/k ノ因子団デアル。 故ニ. L.2 ヨリ.

$$n_j \mid x_{i.j}$$

従ッテ L.3 ヨリ. (7) ニテ $\dfrac{a_{\sigma_i.\sigma_j}}{a_{\sigma_j.\sigma_i}}$ ナル項ハ本質的ニハ現ハレナイ。

i.e. (7)ナル式ハ. 本質的ニハ存在シナイ。 q.e.d.

此ノ定理ノ直接ノ結論トシマシテ. 松島先生ノ結果 (談話1113) ガ得ラレマス.

系 Ω/k abel ノトキ $G(k/\Omega) = \Omega_{\mathfrak{a}}^{1-\lambda}$ ナラバ Ω/k ハ巡回拡大デアル.

Ω/k ヲ Galois 拡大トスルトキ、此ノ結果ハソノママ成立致シマセン. 例ヘバ Galois 群 $\mathfrak{g}$ ガ. $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}'$. $\mathfrak{g}'$ 共ニ巡回群ノヤウナ Galois 拡大 Ω/k ヲトリマスト.

$$G(k/\Omega) = \Omega_{\mathfrak{g}}^{1-\lambda}$$

ナルコトガ証明サレマス.

§2 今マデハ abel 拡大ニ限ッテ来マシタガ. 次ニ 任意ノ有限拡大 K/k ノ $G(k/K)$ ニツイテ 考ヘテ見マス。k 上ノ無限 abel 拡大 $\bar{A}$ ニ対スル局所類体論ノ記号 $H(\bar{A}/k)$ ハ 次ノ如ク定義サレマス。

$$H(\bar{A}/k) = \bigcap_{A} N^{*}_{A/k}$$

此所デ A ハ k 上ノ 有限次 abel 拡大デ $\bar{A}$ ノ 部分体トナルモノ全体ヲ動クトシマス。

L.4 k 上ノ最大 abel 拡大体ヲ $\bar{\Omega}$ トスレバ

$$H(\bar{\Omega}/k) = 1$$

証明. $\alpha \in H(\bar{\Omega}/k)$, $\alpha = P^{\varepsilon}\cdot e$ 但シ $(P) = \mathfrak{p}$ ハ k ノ素 ideal e ハ 単数トス。ソノトキ $\varepsilon = 0$ デアル。

$\varepsilon \neq 0$ ナラバ. 単数全体ノナス群ヲ E トシ $|\beta| > |\varepsilon|$ ナル整数 β ヲトリ P^{β} ト. E トノ生成スル群ヲ H_0 トスレバ. 明カニ $(k^{*} : H_0) < \infty$ 故ニ H_0 上ノ類体 A_1 ガ存在スル $\alpha \in H(\bar{\Omega}/k) < N^{*}_{A_1/k} = H_0$ デアルガ H_0 ノ構成法カラ $\alpha \notin H_0$ トナリ. 矛盾トナル。 $\therefore\ \varepsilon = 0$.

$\alpha = 1$ 若シ $\alpha \neq 1$ ナラバ 十分大ナル n ニ対シテ.

$$\alpha \not\equiv 1 \mod \mathfrak{p}^{n}$$

ソノトキ $\quad e_n \equiv 1 \mod \mathfrak{p}^{n}$

ナル e_n ノナス単数群ヲ E_n トシ. $H_n = (P, E_n)$ トスレバ. 明カニ H_n 上ノ類体 A_n ガ存在シ $\alpha \in H_n$ デナクテバナラヌ。一方 ソノ作リ方ヨリ. $\alpha \notin H_n$ デ 矛盾トナル。

定理.2. K/k ヲ有限拡大トスレバ.

$$G(k/K) = H(K\bar{\Omega}/K)$$

証明 明カニ $G(k/K) < H(\bar{\Omega}/K)$

逆ニ $\Theta \in H(\bar{\Omega}K/K)$ ヲトリ $\theta = N_{K/k}\Theta$ トスル

$\theta = 1$ ナラバ k 上ノ abel 拡大 A ガ存在シテ (L.4)

$$\theta \in N^{*}_{A/k}$$

A ヲ十分大キクトッテモ差支ヘナイカラ. $A \supseteq K$ トスル. ソノトキ A/K ハ abel 拡大.

$$Ⓗ \in N^*_{AK/K}$$

故ニ Verschiebungssatz ニヨリ

$$N_{K/k}Ⓗ = \theta \in N^*_{A/k}$$

之ハ矛盾デアル。 $\theta = 1$ q. e. d.

此ノ直接ノ結論トシテ 次ノコトガ云ヘマス。

系. k上ノ有限拡大体ヲK, K上ノ Abel 拡大体ヲAトスレバ A/k ガ Abel 拡大トナルタメノ 必要十分条件ハ.

$$G(k/K) \subset N^*_{A/K}$$