139. 位相完備性に就て

森田紀一 (1948. 11. 8)

完全正則空間Rが Čech のコンパクト化 β(R) に於て G_δ 集合であるとき Čech は位相完備であると定義し 之が距離空間に對する Fréchet の位相完備なる概念の拡張であることを示した。即ち彼は次の定理を証明した[1]

<u>定理1</u> 距離空間が(Čech の意味で)位相完備なるために必要且つ十分な條件は 完備な距離空間と同位相になることである。

扨て完全正則空間Rが一様位相空間と考へ得ることは周知の如くであり、一様位相空間に対してはやはり完備なる概念が定義されてゐる。この完備性と上の位相完備性との間にも定理1に示されてゐる様な関係が存在するであらうか。答は否定的である。位相完備でありながら完備な一様位相空間とは成り得ぬものが存在する。例へば $\aleph_1$ の Anfangszahl ω_1 より小なる順序数 α の集合に於て α の近傍として $\gamma < x \leqq \alpha$ なる x の全体をとることにすれば、この空間Rは completely normal となるが、よく知られてゐる様に、如何なる一様位相を考へても完備にはならない。然しこのRに一点 ω_1 を附加すれば β(R)を得るのであるから、Rは β(R) に於て開集合、従ってRは Čech の意味では確に位相完備である。然らば逆に完備な一様位相空間は、位相完備であるか。之も成立しない様に思はれる。(定理2参照)。然しこの二つの完備性の概念の間には若干の

関係が成立する。次に之を述べよう．

先づRから Čech のコンパクト化 $\beta(R)$ を作り，Rの開集合Gに對し，$\beta(R)$ に於ける R－Gの閉包 $\overline{R-G}$ の $\beta(R)$ に於ける補集合を $\eta(G)$ で表はす $\eta(G)=\beta(R)-\overline{R-G}$．今Rに対し 一様位相を与へる被覆系 $\{\mathfrak{U}_\alpha \mid \alpha \in \mathfrak{A}\}$ があるとき，

$$H_\alpha=\sum_{U\in\mathfrak{U}_\alpha}\eta(U)$$

と置けば，H_α は $\beta(R)$ に於ける開集合で $R\subset H_\alpha$ である．從つて $R\subset\prod H_\alpha$ となることは明らかであるが，実は次の定理が成立する．

<u>定理2</u>．$\{\mathfrak{U}_\alpha\}$ によるRの一様位相が完備であるために必要且つ十分な條件は

$$R=\prod_\alpha H_\alpha$$

が成立することである．

次に空間Rに於て一様位相を定義する被覆系 $\{\mathfrak{U}_\alpha \mid \alpha\in\mathfrak{A}\}$ があるとき，$\mathfrak{A}$ の濃度を此の一様位相の濃度といふことにする．又Rの（位相と一致する）一様位相の濃度の最小値を $\mathfrak{m}(R)$ で表はすことにする．Rが距離空間であるときに限つて $\mathfrak{m}(R)\leqq\mathfrak{m}_0$ となる訳である．然るときは次の定理が成立する．

<u>定理3</u>　*fully normal space* Rが 位相完備であれば，Rに（その位相を変へずに）完備な一様位相を與へることが出来る。從で完備な一様位相の濃度をして $\mathfrak{m}(R)$ を超えぬ様にすることが出来る。

この定理3に於て，Rが位相完備でなくても，$\beta(R)$ に於て $\mathfrak{m}(R)$ 以下の個数の開集合の共通部分として表はされるならば同様の結論が得られるし，又完備な一様位相の濃度に條件をつけなければ，Rが位相完備であることは必要ではない。即ち *fully normal* ならば，常に或る一様位相に関して完備なのである。[2] 之等のことは定理３に対する我々の証明から直ちに看取されるのであつて，定理3の証明は定理2を利用して行ふ．

<u>定理4</u>　*fully normal* な空間Rが，濃度が高々 $\mathfrak{m}(R)$ の完備な一様位相空間と同位相になるための必要且十分な條件は、Rが $\beta(R)$ に於て高々 $\mathfrak{m}(R)$ 個の開集合の共通部分として表はされることである。

空間Rが距離空間であれば $\mathfrak{m}(R)\leqq\mathfrak{m}_0$ であるから，定理4の系として定

理1が得られることになる. 定理3に於て *fully normal* の仮定は省けない。本論文の最初に掲げた例はこのことを示してゐる.

<u>定理2の証明</u> <u>必要</u>. $x \in \prod H_\alpha$ とすれば, 各 α に對し $x \in \eta(U_\alpha)$, なる $U_\alpha \in \mathfrak{U}_\alpha$ が存在する。この U_α から点 a_α をとれば, $\{a_\alpha\}$ は(広義の) Cauchy 列をつくる. 何者, $x \in \eta(U_\alpha)\cdot\eta(U_\beta) = \eta(U_\alpha U_\beta)$ より $U_\alpha U_\beta \neq 0$. よつて $\mathfrak{U}_\gamma < \mathfrak{U}_\beta$, $\mathfrak{U}_\beta^* < \mathfrak{U}_\alpha$ とすれば,

$$a_\gamma \subset S(U_\beta\ \mathfrak{U}_\gamma) \subset S(S(a_\beta, \mathfrak{U}_\beta), \mathfrak{U}_\gamma) \subset S(a_\beta, \mathfrak{U}_\alpha)$$

となるからである. 従つて R が完備であるなら, $\lim a_\alpha = a$ なる点 $a \in R$ がある。然らば $x = a$ が成立する. 若し然らずとすれば, $a \in U$, $x \in V$, $\overline{U}\cdot\overline{V} = 0$ なる $\beta(R)$ の開集合 U, V がある. $U_0 = U \cdot R$ とおけば

$$U \subset \eta(U_0) \subset \eta(\bar{U}_0 \cdot R) \subset \overline{U}.^{3)}$$

故に $\eta(U_0)\cdot V = 0$. 扨て $a \in R$, $\therefore$ $a \in U_0$. よつて $S(a, \mathfrak{U}_\alpha) \subset U_0$ なる $\mathfrak{U}_\alpha$ がある. そこで,

$$a_\gamma \in S(a, \mathfrak{U}_\beta), \quad \mathfrak{U}_\gamma < \mathfrak{U}_\beta, \ \mathfrak{U}_\beta^* \mathfrak{U}_\alpha$$

とすれば,

$$U_\gamma \subset S(a_\gamma, \mathfrak{U}_\gamma) \subset S(S(a, \mathfrak{U}_\beta), \mathfrak{U}_\gamma) \subset S(a, \mathfrak{U}_\alpha) \subset U_0$$

故に $\eta(U_\gamma) \subset \eta(U_0)$. 仮定によれば $x \in \eta(U_\gamma)$. 然るに一方 $x \in V$, $\eta(U_0)\cdot V = 0$. 之は矛盾である。故に $x = a \in R$.

<u>十分</u>. $\{A_\lambda\}$ を R に於ける *Cauchy filtre* とする. $\{\overline{A_\lambda}\}$ は *finite intersection property* をもつから, $\prod \overline{A}_\lambda \neq 0$. そこで $a \in \prod \overline{A}_\lambda$ なる点 a をとれば必ず $a \in R$ である. 何者もし $a \bar{\in} R = \prod H_\alpha$ とすれば $a \bar{\in} H_\alpha$ なる或る α がある. $\mathfrak{U}_\beta^* < \mathfrak{U}_\alpha$ とすれば, R に於ける閉苞を $\sim$ で表はすとき, 任意の $U_\beta \in \mathfrak{U}_\beta$ に對し

$$\widetilde{U}_\beta \subset S(\widetilde{U}_\beta, \mathfrak{U}_\beta) = S(U_\beta, \mathfrak{U}_\beta) \subset \text{或る}\ U_\alpha,\ U_\alpha \in \mathfrak{U}_\alpha$$

よつて $\eta(U_\beta) \subset \eta(U_\alpha)$.[4] 従つて $a \bar{\in} \eta(\widetilde{U}_\beta)$ となる.

処で $\{A_\lambda\}$ は Cauchy filtre. よつて或る $U_\beta \in \mathfrak{U}_\beta$ に對し $A_\lambda \subset U_\beta$ となる或る A_λ が存在する。

$$a \in \overline{A}_\lambda \subset \bar{U}_\beta \subset \eta(\bar{U}_\beta)$$

之は前の結果 $a \bar{\in} \eta(\tilde{U}_\beta)$ に矛盾する. 以上により $a \in R$. 従ってRは $\{\mathfrak{U}_\alpha\}$ に関して完備である.

<u>定理3の証明</u>　Rの一様位相を与へる被覆系 $\{\{\mathfrak{U}_\alpha\}\ \alpha \in A\}$ があるとする. (Aの濃度は $\mathfrak{m}(R)$) 扨てRは $\beta(R)$ に於て

$$R = \prod G_\alpha$$

と表はされるが, ここで α の動く範囲は A と仮定してよい. G_α は開集合である. Rの一点 x に対し $\bar{V}_x \subset G_\alpha$ て且つ或る $U_\alpha \in \mathfrak{U}_\alpha$ に含まれる様なRに於ける x の近傍 V_x が存在する. 然るときは, $\mathfrak{V}_\alpha = \{V_x \mid x \in R\}$ はRの open covering をなす. 而して $\eta(V_x) \subset \eta(\hat{V}_x) \subset \bar{V}_x \subset G_\alpha$. よって,

$$K_\alpha = \sum_x \eta(V_x) \subset G_\alpha \qquad \therefore \prod K_\alpha = R$$

Rは fully normal. 従って $\mathfrak{V}_\alpha$ を初項にもつ normal sequence $\{\mathfrak{V}_{\alpha,n} \mid n = 1, 2, \cdots\}$ を作り, 更に之等の有限個の intersection を作れば, かくして得られる被覆の個数は A の濃度を超えない. 然して之等の被覆はRにその位相と一致する一様位相を与へることは $\mathfrak{V}_\alpha < \mathfrak{U}_\alpha$ より明らかであり, 且つ既に $\prod K_\alpha = R$ であるから, 定理2により, Rはこの一様位相に関して完備である. 従って定理3が証明される.

註 1) 長田氏は定理1の別証明を本誌8号で与へられた.

2) 本誌第9号白田氏談話96. 定理5.

3) Rの閉集合Fに対しては $\eta(F) = \bar{F}$ とおく.

4) $\tilde{U}_\beta$ と $R - S(\tilde{U}_\beta, \mathfrak{U}_\beta)$ とは completely separated. 故に $\eta(\tilde{U}_\beta) \subset \eta(S(\tilde{U}_\beta, \mathfrak{U}_\beta))$

(1948. 10. 25)