137. 平面のアフィン変換群の位相幾何學的特徴づけ(II)

寺阪英孝 (1948. 12. 1)

§3. §2に於ける如く開線 (offene Linie) で一次独立を定める代りに、もつと抽象的な一次独立性については中沢氏、Haupt・Nöbeling-Pauc 三氏の研究がある (Birkhoff: Lattice theory 参照) から、その定義を一部借用する。

記号は三氏のを用ひて．$A[a.b.c]$ $U[a.b.c]$を夫々$a.b.c$がAbbängig．Unabhängigなることを表はすものとする．ここに$A[\cdots]$．$U[\cdots]$は次の公理を充たすべきものと考へる．［AはUの否定）：

I．$A[a,a,b]$

II．$a \neq b$．$A[a.b.x]$、$A[a,b.y] \to A[b.x.y]$．　$\underline{a\ b\ x\ y}$

III．$\forall a.b(\neq)$．c．近傍$U(c)$．$\exists c' \in U(c)$：$U[a,b.c]$．

IV．$\forall a.b.c$：$U[x\ b.c]$ $\exists U(a)$．$U(b)$．$U(c)$：

$a' \in U(a)$．$b' \in U(b)$．$c' \in U(c) \to U[a',b',c']$

以上は导入用な一次従II に関する公理で．これに変換群の公理を入れる：

V．$\mathfrak{G}$はE^2を自身に移す位相変換の連続群で

$U[a.b.c]$．$U[a'.b',c'] \to \exists$，$T \in \mathfrak{G}$：$T(a,b.c)=(a',b',c')$．

以上から$a \neq b$なる二点$a.b$を通り§2こいふ閲線$L(a.b)$の存在が証明され，從つて前の結果から$\mathfrak{G}$はアフィン変換群と同型なることが分る。

以下閲線$L(a.b)$の存在を証明する．

§4.

三点$(a.b.c)$がどの$T \in \mathfrak{G}$によつても$U[a',b',c']$なる三点(a',b',c')に移せないとき$L[a,b,c]$と書き．そうでないとき non $L[a.b.c]$と書く．

① ≪$a \neq b$なら$L[a.b.x]$なるxは三つづつ$L[\cdots]$の關係にある≫

（証）$L[a,b,x]$，$L[a,b.y]$．$a.b.x,y(\neq)$とする．若しも non $L[b,x,y]$なら$\exists T$：$T(b.x.y)=(b',x',y')$ ここにb',x',y'は$U[b',x',y']$なる或る三点．すると$T(a)$，b',x',y'の中$U[T(a),b',x']$又は$U[T(a),b',y']$のいづれかが成立つ．（←II）∴ non $L[a,b,x]$又は non $L[a.b.y]$となり矛盾する．$x=a$ 其他の場合は明か．よつて

$$a \neq b,\quad L[a,b.x],\ L[a.b.y] \to L[b,x.y]$$

これより已知の如く$L[a.b.x]$，$L[a.b.y]$．$L[a.b.z] \to L[x.y.z]$以．定義$\{x \mid L[a.b.z]\}=L(a.b)$・$a,b$を特記せず$L(a.b)$を單に$L$と書くこともある．①から．

② ≪$a',b'(\neq) \in L(a.b) \to L(a',b')=L(a.b)$≫

又$L[a,b.c] \to L[T(a),T(b).T(c)]$故

$\boxed{3}$ ≪ LはT∈𝔊でLに移る. 即ち $a \neq b$, $T(a,b)=(a',b')$, $T \in \mathfrak{G} \to T(L(a,b)) = L(a',b')$ ≫

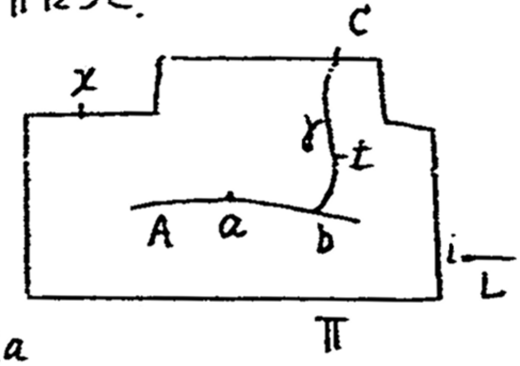
$\boxed{4}$ ≪ Lは開集合 ≫ (←IV)

$\boxed{5}$ ≪Lの各点は E^2-L の各から到達可能 *erreichbar* である≫

(証) $E^2-L \ni p$ から直線的に到達可能なLの一点を a とする. $x \in L$ につき $T(p,a,x)=(p,x,a)$ なる $T \in \mathfrak{G}$ を考へると $T(\overline{pa})$ が p から x に到達する道である.

$\boxed{6}$ ≪Lは有界な成分 *component* をもたない≫

(証) Lが有界な成分Aを含んだとし Lと素でAを内部に含む多角形Πを求め, $a \in A$, $b \in L$, $a \neq b$, $c \in \Pi$ を定め、各 $x \in \Pi$ につき,



$T_x(a,b,c)=(a,b,x)$ なる $T_x \in \mathfrak{G}$ を考へれば T_x は x について連續な変換族をなす. Cからbに到達する E^2-L の道($\boxed{5}$)を γ とすれば, $T_x(\gamma)$ は x が Π を動いたとき Πの内部を蔽ふから [←寫像度論] a を通るものがある、矛盾 — $\boxed{5}$. $\boxed{6}$ から,

$\boxed{7}$ ≪ E^2-L は有界でない領域から成立する≫

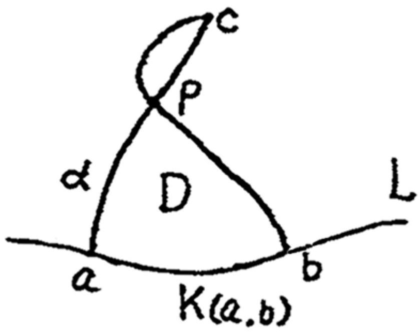
$\boxed{8}$ ≪Lの二点 a, b (≠)に対し $a, b \in K \subset L$ なる有界連續体Kが存在する≫

(証) Lが有界な連續体を含むことは確. これを $T \in \mathfrak{G}$ で移し, a, b を含むように すれば可 —

定義. かかるKで *irreducible* のものを $K(a,b)$ とかく.

$\boxed{9}$ ≪ $\cup[a,b,c]$ なら $T(a,b,c)=(b,a,c)$ なる $T \in \mathfrak{G}$ は向きを変へる對合的変換 $T=E$ である ≫

(証) $T^2=E$ は V から明. 次に c から a に到達する道を α とし $T(\alpha) \cap \alpha$ の中 a に最も近い点を p とすれば $\widehat{ap} \subset \alpha$ とその像 $T(\widehat{ap})$ とは $K(a,b)$ の一部と共に一つの有界な領域Dを囲む. もしもTが向きを変へない変換ならば, 既知の如くTは180°の廻轉と



位相的に同等であるから $D+T(D)+\widehat{ap}+T(\widehat{ap})+p=G$ は p を含む有界領域となり、G の境界は $\subset L$. これは $\boxed{7}$ に反する.—

$\boxed{10}$ 《L は開線 *offene Linie* である》

(証) $a, b (\neq) \in L$ を固定し向きを変へる對合的変換 $S \in \mathfrak{G}$ を考へる（$\boxed{9}$ の T を transform して得られる）と. 既知の如く S の不動点集合は a, b を通る開線 L^* をつくる. $\exists c \in L^* - L$ なら $S(a, b, c) = (a, b, c)$ 故. $S = E$ となり矛盾するから $L^* \subset L$. もしも $\exists c \in L - L^*$ なら. $E^2 - L^*$ の成分中 c を含む方からは c を L へ到達不可能故 $\boxed{5}$ に反する.

よつて $L = L^*$ —

以上で目的は達せられた.

I—V の公理は直ちに E^n に拡張出来る. しかしこのとき $\mathfrak{G}$ がアフィン変換群と同型か否かを決定するのに上記の証明法はそのまゝでは用ひられない. 對合的変換の不動点の集合が果してどういふ時に *linear space* と *homöomorph* かは一般の E^n では不明だからである.