136. 平面のアフィン変換群の位相幾何學的特徴づけ(I)

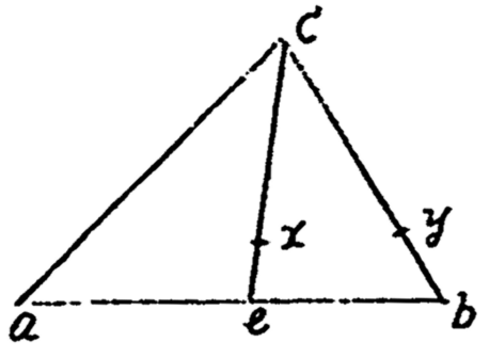
寺 阪 英 孝 (1948 10.15)

E^n のアフィン変換群を位相組何学的に特徴づける問題に満足な解答を与へることは、満足の程度によつてむづかしい。まづ手初めに平面E の場合にはどんな形が与へられるものか その一応の解決法を考へてみよう。

§1. E^2 の三点 a.b.c が同じ直線上にないとき、互に独立な三点といはう。すると 《$\mathfrak{G}$ はE^2 を自身に寫す位相変換の連續群で、E^2の互に独立な三点a.b.cを同様な三点a'.b'.c'に移す変換T(これをT$(a.b.c) = (a'.b'.c')$と書く)が$\mathfrak{G}$中に一つ、唯一つ存在するなら、$\mathfrak{G}$はE^2 のアフィン変換群と同型である》ことが分る。これを示すには《T∈$\mathfrak{G}$は直線を直線に移す》ことさへ言へればよいことは明であるから、帰謬法を用ひて、この証明をしてみよう。

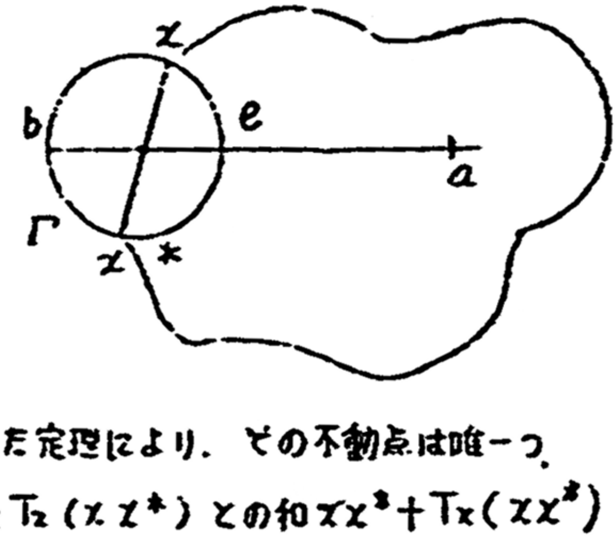
ここで一直線Lとその上に三点 a.b.c とがあり、$\mathfrak{G}$の一変換T_1 によつて

a, b, e が同一直線上にない三点 a_1, b_1, e_1 に移つたと仮定する。すると e に十分近い点 x に対しては、$a_1, b_1, T_1(x)$ も互に独立であるから、a、b と共に独立な点 c をあらかじめ定めておけば、$a_1, b_1, T(x)$ を a, b, c に移す $T_2 \in \mathfrak{g}$ が存在し、しかも連続であるから、線分 ce 上を点 x が c から e まで動いたとき、a, b, c を a, b, x に移す $\mathfrak{g}$ の変換 T_x はいつでも存在し且 $x \to e$ のときも T_x は連続である。同様に線分 bc 上を点 y が b から c に動いたときも



$T_y(a, b, c) = (a, b, y)$ なる T_y は $y = b$ の所でさへ連続である。そこで T_x, T_y によつて、a, b, c を a, c, e に移す変換が連続的に結ばれることが分つた。更に一点をL上で e から b に動かすことにより、結局 a, b, c を a, c, b に移す $\mathfrak{g}$ の変換は $\mathfrak{g}$ の連続な変換のScharで結ばれることが分る。不動変換は明に平面の向き(*Indicatrix*)を変へぬ変換であるから、以上により《a, b, c を a, c, b に移す変換 S は向きを変へぬ変換である》こととなつた。すると x, y, z 及び x', y', z' が互に独立な三点なるとき $T(x, y, z) = (a, b, c)$ とすれば $T^{-1}ST(x, y, z) = (x, z, y)$ であるから 一般に《互に独立な三点 x, y, z を x, z, y に移す変換は平面の向きを変へない変換である》こととなつた。

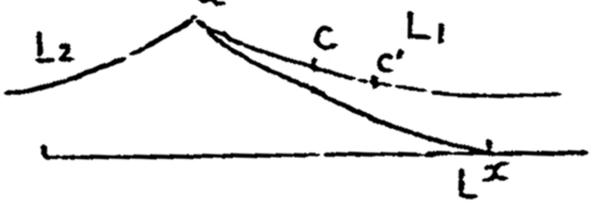
そこで又前 a, b, e にもどり、be を直径とする円を Γ とし、Γ 上で直径の両端になつてゐる点を x, x^* で表はして、$T_x(a, x, x^*) = (a, x^*, x)$ なる $T_x \in \mathfrak{g}$ と考へると、T_x は向きを変へぬ変換であつて且 $T_x^2 = 1$ であるから、知られた定理により、その不動点は唯一つ、即ち a だけであり、又直径 xx^* とその像 $T_x(xx^*)$ との和 $xx^* + T_x(xx^*)$ に関して a の次数(*Ordnung*)は0ならざる値 k をもつ。T_x は x について連続な変換のScharであるから、k は Γ 上で x の位置に係らない筈であるが、x が x^* に来たとき $x^*x + T_{x^*}(x^*x)$ は向きが反対であるから $-k$ となつてしまう。



この矛盾により同一直線上の三点 $a. b\, e$ が然らざる三点 a_1, b_1, e_1 に移るということは誤であることとなり、定理は証明された

§2　次に直線という所を位相化して開線 *offene Linie*（即ち直線の開位相像）L とし、E^2 上で二点 $a. b(\neq)$ に対して $a, b \in L$ なる L が一つ、唯一つ存在するものと仮定する。よつて互に独立である三点では同上の L 上にない三点のことであると定義すれば、§1 の定理がそのまゝ成立することが分る。

まづ φ の変換で L が又 L に移ることは前と同じに証明される。すると L の族が連続であること、即ち $a \to a'$, $b \to b'$ なら $L(a\, b) \to L(a', b')$ であることが導かれる。次に L の"平行性"が問題となる。



今一つの L 外の一点 a と $x \in L$ とを通る $L_x = L(a, x)$ を考へると、x が L 上を一方に ∞ まで動けば L_x は一つの L_1 に収れんするし、又他の方向に ∞ まで動けば L_x は L_2 に収れんする。

今 $c \in L_1$, $c' \in L_1$, $b \in L$ とし、$T(a, b, c) = (a, b, c')$ なる T を考へると T は L を L に、L_1 を L_1 に移すことが分る。これを利用して、$L_1 = L_2$ となることが証明され、従つて"平行線の公理"が成立する。

これから"平行移動"が二点 a, b によつて決定されることも分り、幾何学基礎論の常とう手段で L の族が直線の族に位相変換で移せることが導ける。―

L を開線 *offene Linie* とせず単に一次元集合とすれば如何、又 E^n の場合如何等　まだ問題は残つてゐる。興味を持たれる方に研究して頂きたいものである。