135. 双計量リーマン空間に就て(V)

京師 田畑不二夫 (1948.12.1)

□19.2. $\|t_{\lambda\mu}\|$が rank 1なる半正値形式（従って$t_{\lambda\mu}=t_\lambda t_\mu$）且つ $\frac{\partial t_\lambda}{\partial u^\mu}=\frac{\partial t_\mu}{\partial u^\lambda}$なる時は適当なる座標変換の後 $dt=du^0$; $ds^2=S_{ab}du^a du^b$ $(a.b=1,2,\cdots n)$ の形を採る（勿論$|S_{lm}|\neq 0$）。この双計量リーマン空間$\mathfrak{N}$に於ては双計量がこの形を保つ特殊な座標変換は $\bar{u}^0=u^0+C$, $\bar{u}^l=\bar{u}^l(u^l)$ であるが，我々の数式中にu^0に関して陽に現れるのは主として$\frac{d}{du^0}$, $\frac{\partial}{\partial u^0}$等の形式に於てであって之は上の$\bar{u}^0=u^0+C$なる変換に對しては不変形式と見做す事が出来るから残るは$\bar{u}^l=\bar{u}^l(u^l)$のみが問題となる。そこで$u^0\equiv t$をパラメーターとする計量$ds^2=S_{lm}(u^l t)du^l du^m$を持つ$n$次元リーマン空間を考えて之に對して$\bar{u}^l=\bar{u}^l(u^l)$なる変換に對する不変式を研究する幾何學は特に如上の$\mathfrak{N}$に對する変換$\bar{u}^\lambda=\bar{u}^\lambda(u^\lambda)$に関しての$(n+1)$次元双計量リーマン幾何学と同等である。この意味に於て右の特殊な$(n+1)$次元双計量リーマン空間を更めてn次元動線素（或は変計量）リーマン空間$\mathfrak{R}$と称する事が許されるであらう。$\mathfrak{R}$のテンソルを$\mathfrak{N}$のテンソルと見る時はその0成分が全て0となる事及びこの逆の云へる事は明かであるが附言して置く。

□6.2. $t_{\lambda\mu}v^\lambda v^\mu=1$ なるベクトル野から□6.の如くして生ずる（$T(u^\lambda)$に横たはる）ベクトル野を$\bar{v}^\lambda$とする。

茲に$\bar{v}^\lambda$に對しては$\frac{ds}{dt}=\sqrt{\frac{S_{\lambda\mu}du^\lambda du^\mu}{t_{\lambda\mu}du^\lambda du^\mu}}=\sqrt{S_{\lambda\mu}\bar{v}^\lambda\bar{v}^\mu}$. 即ち$\bar{v}^\lambda$はその

大きさが速度を表してゐると見る事が出来る事から$\mathfrak{V}^\lambda$を速度ベクトルと考える事が出来、$\mathfrak{V}^\lambda$の場は$\gamma(u^\lambda)$の運動を表はしてゐる(し、若しΥが存在するときはΥの運動を表してゐると見る事が出来る)。

V^λの変化を$\mathfrak{V}^\lambda$方向のdu^λに就て計算すれば $dV^\lambda=\frac{\partial \mathfrak{V}^\lambda}{\partial u^\alpha}V^\alpha dt-\mathfrak{V}^\lambda T_{\alpha\beta,\gamma}\mathfrak{V}^\alpha\mathfrak{V}^\beta V^\gamma dt$ であつて特に $t_{\lambda\mu}=t_\lambda t_\mu$ 且 $\frac{\partial t_\lambda}{\partial u^\mu}=\frac{\partial t_\mu}{\partial u^\lambda}$ なるときは $dV^\lambda=\frac{\partial\mathfrak{V}^\lambda}{\partial u^\alpha}V^\alpha dt$ 及 $\frac{\partial V^\lambda}{\partial u^\alpha}\mathfrak{V}^\alpha=\frac{\partial \mathfrak{V}^\lambda}{\partial u^\alpha}V^\alpha$ の形に書く事が出来る。

□6.3. 従つて$\mathfrak{R}$に於ては $\frac{\partial V^l}{\partial u^\alpha}\mathfrak{V}^\alpha=\frac{\partial\mathfrak{V}^l}{\partial u^\alpha}V^\alpha$ 即 $\frac{\partial V^l}{\partial u^a}\mathfrak{V}^a+\frac{\partial V^l}{\partial t}=\frac{\partial\mathfrak{V}^l}{\partial u^a}V^a$ の形を採る。

$\mathfrak{V}^\lambda$方向へのV^lの長さの変化 $\frac{\partial S_{lm}V^lV^m}{\partial u^\alpha}\mathfrak{V}^\alpha=\left(\frac{\partial S_{lm}}{\partial u^\alpha}\mathfrak{V}^\alpha+S_{la}\frac{\partial\mathfrak{V}^a}{\partial u^m}+\frac{\partial \mathfrak{V}^a}{\partial u^l}S_{am}\right)V^lV^m\equiv A_{lm}V^lV^m$ であり、若し$\mathfrak{V}^\lambda$による運動が全ての長さを不変に保つ條件は$\mathfrak{V}^\lambda$に関する微分方程式 $A_{lm}=0$ が解を持つ事である。

$\mathfrak{V}^\lambda$方向へのn次元体積の変化の割合は $\frac{\partial\mathfrak{V}^\lambda}{\partial u^\lambda}+S^a_{al}\mathfrak{V}^l$ であつてこれを0と置きて得たる$\mathfrak{V}^\lambda$に関する方程式は一般に解を有する事から一般に非圧縮流体運動は存在する事が判る。

$\mathfrak{V}^\lambda$方向への面積変化

$$\frac{d\begin{vmatrix}S_{ih}&S_{ik}\\S_{jh}&S_{jk}\end{vmatrix}\begin{Vmatrix}X^h & X^k\\ Y^h & Y^k\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}X^i&X^j\\Y^i&Y^j\end{Vmatrix}}{\partial u^\alpha}\mathfrak{V}^\alpha$$

$$=(S_{hi}A_{kj}+S_{kj}S_{hi}-S_{ki}A_{hj}-S_{hj}A_{ki})X^hX^iY^kY^j$$

であつて特に $n=3$ なるときは全ての面積変化が0なる事と全ての長さが0なる事とは運動に於て全等なる事も判る。

□16.2. $\mathfrak{R}$に於ては $V^\lambda+L^\lambda_{\alpha\beta}V^\alpha du^\beta\equiv\bar V^\lambda$ とする時 $\bar V^0=0$ である。一方 $\bar V^l\equiv V^l+L^l_{\alpha\beta}V^\alpha du^\beta=V^l+S^l_{ab}V^a du^b+S^l_{a0}V^a dt\equiv V^l+dV^l+\delta V^l=(V^l+dV^l)+\delta(V^l+dV^l)=(V^l+\delta V^l)+d(V^l+\delta V^l)$ である事から $L^\lambda_{\mu\nu}$ による平行移動は V^l+dV^l なる $\gamma(u^\lambda)$ に於ける Levi-Civita の平行移動と $\Sigma(u^\lambda)$ n方向への移変即変形運動との二つを合成したものと見做す事が出来る。ベクトルの始点W^λはW^0, $W^l+\delta W^l$へと静止空間に於て運動する。以上から$\Sigma(u^\lambda)$は$\Sigma(u^\lambda+du^\lambda)$へその各移されるか、$\gamma(u^\lambda)$への$\mathfrak{R}(u^\lambda+du^\lambda)$の展開はLevi-Civitaの展開を変形させたものとして理解される。

□5.2 $\mathfrak{R}$に於て$t_\alpha S^\alpha=0=t_\alpha S'^\alpha$なる$S^\lambda$, S'^λを採つて$\frac{\delta S^\lambda}{\partial u^\alpha}S'^\alpha$が*Levi-Civita*の平行移動と全じである爲の條件は計量移変にあつては$A^\lambda_{\mu\nu}=L^\lambda_{\mu\nu}+S^{\lambda\alpha}t_\nu D_{\mu\alpha}$なる形を持つ事である。互に$D_{\mu\nu}+D_{\nu\mu}=0$ $t^\alpha D_{\alpha\nu}=0$。従つて□27の測地移変の係数は$\Delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}=L^\lambda_{\mu\nu}+\frac{1}{2}S^{\lambda\alpha}t_\nu\left(\frac{\partial S_{\alpha c}}{\partial u^a}S_{\mu b}-\frac{\partial S_{\mu c}}{\partial u^a}S_{\alpha b}\right)\alpha^c\alpha^b du^\nu$ $\left(\alpha^a=\frac{du^a}{ds}\right)$なる形に書ける事から上の條件を満足してゐる事が判る。

□28. $(u^\lambda)_0$, $(du^\lambda)_0$を與へたとき之を通る基本的な曲線として$\left(\sqrt{\frac{S_{\lambda\mu}du^\lambda du^\mu}{t_{\lambda\mu}du^\lambda du^\mu}}\right)_0\equiv v$なる定速測地線を考へる事が出來るならば之を$\frac{d^2u^l}{dt^2}+S^l_{\mu\nu}\frac{du^\mu}{dt}\frac{du^\nu}{dt}-\frac{1}{2}\frac{\partial S_{mn}}{\partial t}\frac{du^m}{ds}\frac{du^n}{ds}\frac{du^l}{dt}=0$で表す。$(u^\lambda)_0$に於けるこの曲線の方向を$\left(\frac{du^l}{ds}\right)_0=\alpha^l$とすれば、この解は$u^l=(u^l)_0+\alpha^l s+\frac{1}{4v}\frac{\partial S_{mn}}{\partial t}\alpha^m\alpha^n\alpha^l s^2-\frac{1}{2}S^l_{mn}\alpha^m\alpha^n s^2-\frac{1}{v}S^l_{m0}\alpha^m s^2+\cdots\cdots$となる。ここでs, v等を一定にして置いて$\alpha^l$のみを$\delta u^l=A^l$丈け変化させれば$\delta u^l=A^l s+\frac{1}{2v}\frac{\partial S_{mn}}{\partial t}\alpha^m A^n\alpha^l s^2+\frac{1}{4v}\frac{\partial S_{mn}}{\partial t}\alpha^m\alpha^n A^l s-S^l_{mn}\alpha^m A^n s^2-\frac{1}{v}S^l_{n0}A^m s+\cdots\cdots$となる。ここで$\alpha^l$は$S_{lm}\alpha^l\alpha^m=1$を保たせてあるから$\alpha^m$方向の測地曲線に関する$\alpha^m+\delta u^m$方向の夫の相對的向きを言ふ所の$A^l$は$\alpha^m$と垂直である事に注意しておく。$\frac{\partial u^l}{s}$と$A^l$とを比較して作れる$dA^l=\frac{1}{2v}\frac{\partial S_{mn}}{\partial t}\alpha^m\alpha^l A^n s+\frac{1}{4v}\frac{\partial S_{mn}}{\partial t}\alpha^m\alpha^n A^l s-S^l_{mn}\alpha^m A^n s-\frac{1}{v}S^l_{m0}A^m s$は$(u^\lambda)_0$で一つのベクトル野を定義するのであるが之を測地移変での共変微分は$\frac{1}{4}\frac{\partial S_{mn}}{\partial t}\alpha^m\alpha^n A^l dt$となり、即ち、このベクトル野は測地移変で並行と云ふ事になる。要之任意の$(u^\lambda)_0$, $(du^\lambda)_0$を與へれば、自然的に$(u^\lambda)_0$で空間ベクトル方向野が定まり（かかる方向の集合は角を保存する事は明かである）之が測地移変で平行となると云ふのである（$v=\infty$或は$dt=0$とすれば*Levi-Civita*の平行移動との関係がつく）。故に$\mathfrak{R}$に於てはかかる方向野A^λがu^λ, du^λに対して與へられたとき之が平行になるやうな計量移変は（$\mathfrak{R}$では空間ベクトルの平行性のみを考へればよい）測地移変に限ると云ふ結論が得られる。

□29 $(S_{\lambda\mu}+t_{\lambda\mu}=)\,u_{\lambda\mu}$なる計量を與へられたリーマン空間を$\mathfrak{R}'$として$\mathfrak{R}'$

に於ける全てのテンソルの$\mathfrak{T}(u^\lambda)$成分を以て作れる$\mathfrak{V}'$の部分非ホロノーム空間を$\mathfrak{T}'$とし全様にして$\mathfrak{X}'$をも考へる。部分空間論で云ふ所の$\mathfrak{T}'$の曲率テンソル$S^{\omega}_{\mu}S^{\tau}_{\lambda}S^{\nu}_{\varepsilon;\omega} \equiv H^{\cdot}_{\mu\lambda}{}^{\nu} = S^{\omega}_{\mu}S^{\tau}_{\lambda}\left(\frac{\partial S^{\nu}_{\tau}}{\partial u^{\omega}} + t^{\nu\beta}\,\Gamma_{\tau\omega\beta} + t^{\nu\beta}\right.$ $T_{\tau\omega,\beta}$ より作れる$H^{\cdot\cdot}_{\varepsilon\mu\lambda}{}^{\nu}{}_{\cdot} = S^{\omega}_{\mu}S^{\varepsilon}_{\lambda}\,T_{\varepsilon\alpha,\omega}t^{\alpha\nu}$ となつて$H^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\mu\lambda}$が$\lambda,\mu$に関し對稱なる條件は$\mathfrak{T}$がホロノームなる事である。同様の事が$\overset{\circ}{t}{}^{\omega}_{\mu}{}^{\cdot}_{\lambda}\ \overset{\circ}{t}{}^{\nu}_{\tau;\omega}$に関しても云へる。

$\mathfrak{T}'$がホロノームなる時即$\mathfrak{T}$が存在するとき$\mathfrak{T}$の主方向は$H_{\nu\omega} \equiv \frac{1}{2}S^{\mu}_{\lambda,\alpha}$ $S^{\lambda}_{\mu;\beta}\,S^{\alpha}_{\nu}\,S^{\beta}_{\mu} = \frac{-1}{2}S^{\alpha\beta}t^{\tau\delta}(S_{\tau\nu,\alpha}\,S_{\beta\omega,\delta} + \Gamma_{\tau\omega,\alpha}\,S_{\beta\nu,\delta})$ なる形に表せる。

□30. $t_{\lambda\mu} = t_\lambda t_\mu$ なるとき部分空間論に於ける第二基本テンソル$h_{\lambda\mu} \equiv S^{\omega}_{\lambda}S^{\pi}_{\mu}t_{\omega;\pi}$ は $S^{\omega}_{\mu}S^{\alpha}_{\lambda}t^{\varepsilon}\left[-S_{\omega\alpha,\varepsilon} + \left\{t_{\varepsilon}\left(\frac{\partial t_\omega}{\partial u^\beta} - \frac{\partial t_\beta}{\partial u^\omega}\right) + t_\omega\left(\frac{\partial t_\beta}{\partial u^\varepsilon} - \frac{\partial t_\varepsilon}{\partial u^\beta}\right) + t_\beta\left(\frac{\partial t_\varepsilon}{\partial u^\omega} - \frac{\partial t_\omega}{\partial u^\varepsilon}\right)\right\}\right]$ となり $h_{\lambda\mu} = h_{\mu\lambda}$ となるのは $t_\lambda du^\lambda = 0$ が積分可能，即$\mathfrak{T}$が存在するときでこのとき$h_{\lambda\mu} = -t^{\varepsilon}S_{\lambda\mu,\varepsilon}$ なる形をとり、之の主方向即ち部分空間論に於ける主曲率方向は□20に於ける各々の歪軸に異ならない事が判る。(時空の研究 7)　　(昭和23. 11. 23)