133. 單項化定理ノ証明ニツイテ

（東北大）　淡中 忠郎（1948. 11. 30）

辞項化サレタ単項化定理ノ証明ノ現在最モ簡単ナモノハ弥永氏ニヨルモノデアルガ巧妙過ギテとりつくガヨクワカラナカツタノデ 講義ヲ機会ニ多少吟味ノ結

果. "形式的"ニハ少シ短クナッタノデ御報告シ度イ. 勿論本質的ニハ全然同ジ証明デアルガ, 群拡大ノ事トカ, 次数lであるニ関スル吟味ヲ省略スルコトガ出来ルノデ, 直接証明トシテ文章ガ短カイト云フ点ダケガ取リ得デアル.

$\mathfrak{G}$ヲ某あーべる体, $\mathfrak{U}$ヲソノ交換子群(従ッテあーべる群), $\Gamma=\mathfrak{G}/\mathfrak{U}$ノ元素ヲ $\sigma, \tau, \cdots$ トシテ $\mathfrak{G}/\mathfrak{U}$ ノ代表ヲ $S_1=1$, S_σ トスレバ,

$$\prod_\sigma D_{\sigma,\tau}=1, \quad (D_{\sigma\tau}=S_\sigma S_\tau S_{\sigma\tau}^{-1})$$

トナルコトガ求ムル結果デアル.

$S_\sigma U S_\sigma^{-1}=U^\sigma$ ト置ケバ結合律カラ

$$D_{\sigma,\tau} D_{\sigma\tau,\rho}=D_{\tau,\rho}^{\sigma} D_{\sigma,\tau\rho}$$

$\sigma\neq 1$ ニ対シテ記号 A_σ ヲ対応サセ,

$$\overline{U}=(\prod_\sigma A_\sigma^{c_\sigma})U \quad (U\in\mathfrak{U})$$

ノ集合 $\overline{\mathfrak{U}}$ ヲ結合

$$\overline{U}\,\overline{U}'=\prod_\sigma A_\sigma^{c_\sigma+c'_\sigma}UU'$$

ニヨリあーべる群ニスル. 但シ

$$\prod_\sigma A_\sigma^{c_\sigma}U=1 \rightleftarrows c_\sigma=0, \quad U=1.$$

$\overline{\mathfrak{U}}$ノ自己同型 $\overline{U}\to\overline{U}^\sigma$ヲ, $\mathfrak{U}$ノ元素ニツイテハ $U^\sigma=S_\sigma U S_\sigma^{-1}$,
A_τニツイテハ $A_\tau^\sigma=A_\sigma^{-1}A_{\sigma\tau}D_{\sigma,\tau}^{-1}$ ニヨリ定義スル. 但シ $A_1=1$ トシテ置ケバ A_τ^σ ハアラユル場合ニ意味ヲ持ツ. コノ時

(1) $\overline{U}^1=\overline{U}$, (2) $(\overline{U}^\tau)^\sigma=\overline{U}^{\sigma\tau}$,
(3) $(\overline{U}_1\overline{U}_2)^\sigma=\overline{U}_1^\sigma\overline{U}_2^\sigma$

上式デ(2)ガ本質的デ

$$(A_\rho^\tau)^\sigma=(A_\tau^{-1}A_{\tau\rho}D_{\tau,\rho}^{-1})^\sigma$$
$$=(A_\sigma A_{\sigma\tau}^{-1}D_{\sigma,\tau})(A_\sigma^{-1}A_{\sigma\tau\rho}D_{\sigma,\tau\rho}^{-1})D_{\tau,\rho}^{-\sigma},$$
$$A_\rho^{\sigma\tau}=A_{\sigma\tau}^{-1}A_{\sigma\tau\rho}D_{\sigma\tau,\rho}^{-1}$$

及ビ始メニ述ベタ結合律カラ出ル.

サテ問題ノ式ヲ変形スレバ

$$\prod_\sigma D_{\sigma,\tau}=\prod_\sigma A_\sigma^{-1}A_{\sigma\tau}A_\tau^{-\sigma}=\prod_\sigma A_\tau^{-\sigma}=A_\tau^{-\Sigma\sigma}$$

従ッテ

$$A_\tau^{\Sigma\sigma} = A_\tau^{\Gamma} = 1$$

ガボムル等式ト同値デアル。

今任意ノτデ

$$A_\tau^{\Delta} = 1 \quad (\text{但シ } \Delta = \textstyle\sum c_\sigma \sigma)$$

ナラバ

$$A_\tau^{\sigma} = A_\sigma^{-1} A_{\sigma\tau} D_{\sigma,\tau}^{-1} \equiv A_\sigma^{-1} A_{\sigma\tau} \ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{U})$$

デアルカラ.

$$1 = A_\tau^{\Delta} \equiv \prod_\sigma A_\sigma^{-c_\sigma} A_{\sigma\tau}^{c_\sigma} \equiv \prod_\sigma A_\sigma^{-c_\sigma + c_{\sigma\tau^{-1}}}$$

従ッテ、 $-c_\sigma + c_{\sigma\tau^{-1}} = 0$ $(\sigma \neq 1)$ ノ $\tau = \sigma$ トスレバ $c_\sigma = c_1$ ト

ナルカラ $\Delta = c_1 \sum \sigma = c_1 \Gamma$。

即チ $A_\tau^{\Delta} = 1$ (τ任意) ナラバ $\Delta = c\Gamma$ ノ形デアル。

次ニ $\mathfrak{G}$ ノ任意ノ交換子ヲ作レバ、

$$(S_\sigma U_1)(S_\tau U_2)(S_\sigma U_1)^{-1}(S_\tau U_2)^{-1}$$
$$= U_1^{\tau - \sigma\tau}\ U_2^{\sigma\tau - \tau}\ D_{\sigma,\tau} S_{\sigma\tau} (D_{\tau,\sigma} S_{\tau\sigma})^{-1}$$
$$= U_1^{\sigma - \sigma\tau}\ U_2^{\sigma\tau - \tau}\ D_{\sigma,\tau} D_{\tau,\sigma}^{-1}$$
$$= U_1^{\tau - \sigma\tau}\ U_2^{\sigma\tau - \tau}\ A_\sigma^{\tau - 1}\ A_\tau^{1-\sigma}$$

デアルカラ$\mathfrak{G}$ノ交換子群$\mathfrak{U}$ノ元素ハ $\overline{U}^{1-\sigma}$ カラ生成サレタ群 $\overline{\mathfrak{U}}^{1-\sigma}$ ニ属スル.

あーべる群ノ底ヲ

$$\sigma_1, \ldots\ldots, \sigma_k' \quad (\sigma_i \text{ ノ次数 } e_i,\ e_1 \cdots\cdots e_k = n)$$

トスレバ

$$A_\tau^{\sigma} \equiv A_\sigma^{-1} A_{\sigma\tau}\ (\mathfrak{U}), \quad A_{\sigma\tau} \equiv A_\sigma A_\tau^{\sigma},$$
$$A_{\sigma^2} \equiv A_\sigma^{1+\sigma}, \quad \text{等々}$$

カラ

$$A_{\sigma_i}^{N_i} \equiv 1 \ (\mathfrak{U}) \quad (N_i = 1 + \sigma_i + \cdots\cdots + \sigma_i^{e_i - 1})。$$

次ニ $\mathfrak{U}$ ノ生成元ヲ $U_1, \cdots\cdots, U_t$ トスルト今迄ノ所論カラ

$$
\begin{array}{ccccccc|c}
A_{\sigma_1} & A_{\sigma_2} & \cdots & A_{\sigma_k} & u_1 & \cdots & u_l & \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\left\{
\begin{array}{l}
A_{\sigma_1}^{N_1} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = 1 \\
\qquad A_{\sigma_2}^{N_2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = 1 \\
\qquad\qquad A_{\sigma_k}^{N_k} \cdots\cdots\cdots = 1 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots u_1 \cdots\cdots = 1 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = 1 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots u_l = 1
\end{array}
\right.
$$

ノ形ノ等式ガ成立スル。但シ点々ノ部分ハ上段ニ書イタ元素ノ $\sum c_\sigma(1-\sigma)$ ノ形ノ中デアル。従ッテ $A_{\sigma_1}, \cdots\cdots, u_1, \cdots\cdots$ ヲ消去スルコトニヨリ（之ハ上ノ $k+l$ 個ノ等式ヲ加法的ニ書キ指数ヲ係数ニ出シテ行列式論ヲ用ヒレバヨイ）

$$A_{-}^{\Delta} = 1$$

ガ容易ニ出ル．（一旦 $A_{\sigma_i}^{\Delta} = 1$, $u_j^{\Delta} = 1$ トナルガ $A_{\sigma\tau} \equiv A_\sigma A_\tau^\sigma \ (\mathfrak{U})$ ヲ繰リ返ヘセバ $A_\sigma^{\Delta} = 1$ ガ得ラレル）。

ココニ・

$$
\Delta = \left| \begin{array}{cccc}
N_1 & \cdots & & \\
& \ddots & \cdots & \\
\cdots & N_k & & \\
& & 1 & \\
& & & \ddots \; 1
\end{array} \right|
\qquad \left(\begin{array}{l} \text{点々ノ部分ハ} \\ \sum c_\sigma(1-\sigma)\text{ノ形} \end{array} \right)
$$

前ニ述ベタコトカラ

$$\Delta = \sum c_\sigma \sigma = c \sum \sigma$$

デアルガ $\sum a_\sigma \sigma \to \sum a_\sigma$ ニヨリ群環ノ準同型対応ガ得ラレルカラ．

$$
\left| \begin{array}{ccc}
e_1 & & \\
& \ddots \; e_{k_1} & \\
& & \ddots \; 1
\end{array} \right| = n = c \sum 1 = cn
$$

トナリ $\Delta = \Gamma$ ガ得ラレ 之ト $A_\sigma^{\Delta} = 1$ カラ所要ノ $A_\sigma^{\Gamma} = 1$ ガ証明サレル。

〔終〕